УДК 519.21

Д. Алимов

Об одном полунепрерывном марковском процессе пуассоновского типа

Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$, — однородный марковский процесс с непрерывным временем, принимающий неотрицательные вещественные значения, локальные переходные вероятности которого за малое время Δ ($\Delta \downarrow 0$) определяются соотношениями:

$$x \xrightarrow{\Delta} x+y:\ \frac{\lambda F(dy)}{ax+b}\Delta + o(\Delta),\quad x \geqslant 0,\quad x \to x-\Delta:\ 1-\frac{\lambda}{ax+b}\Delta + o(\Delta),$$

$$x > 0,\quad 0 \xrightarrow{\Delta} 0:\ 1-\frac{a}{b}\Delta + o(\Delta), \tag{1}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$, $F(dy)$ — распределение вероятностей на $(0, \infty)$. Из (1) видно, что при $a \downarrow 0$ процесс ξ_t превращается в полунепрерывный пуассоновский процесс с отражением в нуле.

Зафиксируем раз и навсегда неслучайное начальное состояние $\xi_0 = x_0$ и введем обозначения

$$H(t, z) = Me^{-z\xi_t}, \tag{2}$$

$$Q(t, z) = Me^{-z\xi_t}/(a\xi_t + b), \tag{3}$$

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zy} F(dy).$$

Умножим равенство (3) на a и продифференцируем по z. Получим

$$a\frac{\partial Q(t, z)}{\partial z} = -M\frac{a\xi_t}{a\xi_t + b}e^{-z\xi_t} = -Me^{-z\xi_t} + bM\frac{e^{-z\xi_t}}{a\xi_t + b},$$

или

$$H(t, z) = bQ(t, z) - a\partial Q(t, z)/dz. \tag{4}$$

Используя локальные переходные вероятности (1), выведем прямое дифференциальное уравнение Колмогорова для $H(t, z)$:

$$H(t+\Delta, z) = P(\xi_t = 0)\left[\left(1-\frac{a}{b}\Delta\right) + \frac{\lambda}{b}\Delta\varphi(z)\right] +$$

$$+\int_{+0}^\infty P(\xi_t \in dx)\frac{\lambda\Delta}{ax+b}e^{-zx}\varphi(z) + \int_{+0}^\infty P(\xi_t \in dx)\, e^{-zx}\left[1+\left(z-\frac{\lambda}{ax+b}\right)\Delta\right] =$$

$$= Me^{-z\xi_t} + z\Delta Me^{-z\xi_t} - z\Delta P(\xi_t = 0) + \lambda\Delta[\varphi(z) - 1]\, M\frac{e^{-z\xi_t}}{a\xi_t + b} =$$

$$= H(t, z) + z\Delta H(t, z) + \lambda\Delta[\varphi(z) - 1]\, Q(t, z) - z\Delta P(\xi_t = 0).$$

Отсюда при $\Delta \downarrow 0$ получим уравнение

$$\partial H(t, z)/\partial t = zH(t, z) + \lambda[\varphi(z - 1]\, Q(t, z) - zP(\xi_t = 0). \tag{5}$$

Это уравнение надо решать при условии

$$H(0, z) = e^{-zx_0},\quad x_0 > 0. \tag{6}$$

Из (4) и (5) после несложных преобразований получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка для определения $Q(t, z)$:

$$a\frac{\partial^2 Q(t,z)}{\partial z \partial t} = b\frac{\partial Q(t,z)}{\partial t} + az\frac{\partial Q(t,z)}{\partial z} -$$
$$- [bz + \lambda(\varphi(z) - 1)]\, Q(t,z) + zP(\xi_t = 0). \qquad (7)$$

Учитывая соотношение (см. (4) и (6))

$$H(0, z) = [bQ(t,z) - a\partial Q(t,z)/\partial z]_{t=0} = e^{-zx_0}$$

и переходя в (7) к преобразованиям Лапласа (по t), получаем

$$\frac{\partial \widetilde{Q}(s,z)}{\partial z} = \left[\frac{b}{a} + \frac{\lambda}{a}L(z,s) + \frac{\lambda}{a}\frac{\varphi(s)-1}{z-s}\right]\widetilde{Q}(s,z) + \frac{e^{-zx_0} - z\widetilde{P}(s)}{z-s}, \qquad (8)$$

где

$$\widetilde{Q}(s,z) = \int_0^\infty e^{-st}Q(t,z)\,dt, \quad \widetilde{P}(s) = \int_0^\infty e^{-st}P(\xi_t = 0)\,dt,$$

$$L(s, z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(s)}{z-s}.$$

Решая уравнение (8) относительно z при $z > s$ [1], имеем

$$\widetilde{Q}(s,z) = \exp\left\{\frac{b}{a}z\right\}\exp\left\{\frac{\lambda}{a}\int_s^z L(\omega,s)\,d\omega\right\}(z-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a} \times$$
$$\times\left[C(s) + \frac{1}{a}\int_s^z \exp\left\{-\frac{b}{a}u - \frac{\lambda}{a}\int_s^u L(\omega,s)\,d\omega\right\}\frac{e^{-ux_0} - u\widetilde{P}(s)}{(u-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a+1}}\,du\right]. \qquad (9)$$

Для определения постоянной $C(s)$ перейдем к пределу в равенстве (9) при $z \downarrow s$. Поскольку при $z \downarrow s$ функция $\widetilde{Q}(s,z)$ остается ограниченной и $\lim\limits_{z\downarrow s}(z-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a} \to +\infty$, то выражение в квадратных скобках в (9) должно стремиться к нулю, что возможно только при $C(s) = 0$. Значит,

$$\widetilde{Q}(s,z) = \frac{1}{a}\exp\left\{\frac{b}{a}z\right\}(z-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a} \times$$
$$\times\int^z \exp\left\{-\frac{b}{a}u + \frac{\lambda}{a}\int_u^z L(\omega,s)\,d\omega\right\}\frac{e^{-ux_0} - u\widetilde{P}(s)}{(u-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a+1}}\,du. \qquad (10)$$

Для определения неизвестного преобразования Лапласа $\widetilde{P}(s)$, которое содержится в правой части (10), воспользуемся тем, что при $z \downarrow +\infty$ $\widetilde{Q}(s, z)$ остается ограниченной, а

$$\exp\left\{\frac{b}{a}z + \frac{\lambda}{a}(\varphi(s) - 1)\ln(z-s)\right\} \to +\infty,$$

поэтому интеграл, стоящий в правой части равенства (10), должен при $z \downarrow +\infty$ стремиться к нулю, т. е.

$$\int_s^{+\infty}\exp\left\{-\frac{b}{a}u + \frac{\lambda}{a}\int_u^{+\infty}L(\omega,s)\,d\omega\right\}\frac{e^{-ux_0} - u\widetilde{P}(s)}{(u-s)^{\lambda(\varphi(s)-1)/a+1}}\,du = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\widetilde{P}(s) = \int_s^{+\infty}\exp\left\{-\left(\frac{b}{a} + x_0\right)u - \frac{\lambda}{a}\int_0^u L(\omega,s)\,d\omega\right\}(u-s)^{-[\lambda(\varphi(s)-1)/a+1]}du/$$

$$/\int_{s}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{b}{a}u - \frac{\lambda}{a}\int_{0}^{u} L(\omega, s)\,d\omega\right\}(u-s)^{-[\lambda(\varphi(s)-1)/a+1]}u\,du. \qquad (11)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Преобразование Лапласа* $\tilde{P}(s)$ *переходной вероятности* $P(\xi_t = 0)$ *марковского процесса* ξ_t, $t \geqslant 0$, *определяется равенством* (11), *а преобразование* $\tilde{Q}(s, z) = \int_0^\infty e^{-st}Q(t, z)\,dt$, *где* $Q(t, z) = Me^{-z\xi_t}/(a\xi_t + b)$, *равенством* (10).

Замечание. Зная $\tilde{Q}(s, z)$ и используя (4), легко получить преобразование Лапласа $\tilde{H}(s, z)$, которое здесь не приводится ввиду его громоздкости.

Найдем стационарное распределение процесса ξ_t, $t \geqslant 0$, в предположении, что распределение $F(dy)$ имеет конечное математическое ожидание $\mu = \int_0^\infty yF(dy) < \infty$.

Обозначим: $P(dx)$ — искомое стационарное распределение, $P_0 = P\{0\}$ — его атом в нуле,

$$H(z) = \int_0^\infty e^{-zx}P(dx), \qquad (12)$$

$$Q(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{ax + b}P(dx). \qquad (13)$$

Аналогично тому, как было получено уравнение (8), находим

$$Q'(z) = \left[\frac{b}{a} + \frac{\lambda}{a}L(z)\right]Q(z) - \frac{P_0}{a}, \qquad (14)$$

где $L(z) = (\varphi(z) - 1)/z$. С помощью приема, аналогичного использованному в (8) и (9), находим, что

$$Q(z) = \frac{P_0}{a}\int_z^\infty \exp\left\{\frac{b}{a}(z-u) - \frac{\lambda}{a}\int_z^u L(\omega)\,d\omega\right\}du. \qquad (15)$$

Из (12) и (13) (см. [4]) непосредственно получаем

$$H(z) = bQ(z) - aQ'(z). \qquad (16)$$

Подставив теперь (14) и (15) в (16), получим

$$H(z) = P_0\left[1 - \frac{\lambda}{a}L(z)\int_z^\infty \exp\left\{\frac{b}{a}(z-u) - \frac{\lambda}{a}\int_z^u L(\omega)\,d\omega\right\}du\right]. \qquad (17)$$

Для определения P_0 перейдем в (17) к пределу при $z \downarrow 0$;

$$1 = P_0\left[1 + \frac{\lambda}{a}\mu\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{b}{a}u - \frac{\lambda}{a}\int_0^u L(\omega)\,d\omega\right\}du\right],$$

где $\mu = -L(0)$. Отсюда

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{a}\mu\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{b}{a}u - \frac{\lambda}{a}\int_0^u L(\omega)\,d\omega\right\}du\right]^{-1}.$$

Заметим, что если $\lambda\mu < b$, то при $a \downarrow 0$ это выражение переходит в известное выражение для стационарного распределения пуассоновского процесса с отражением в нуле. Действительно,

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{b}{a}u - \frac{\lambda}{a}\int_0^u L(\omega)\,d\omega\right\}du = \int_0^\infty \exp\left\{-b\vartheta - \lambda\int_0^\vartheta L(a\omega)\,d\omega\right\}d\vartheta,$$

поэтому

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \exp\left\{-b\vartheta - \lambda\int_0^\vartheta L(a\omega)\,d\omega\right\}d\vartheta =$$
$$= \int_0^\infty \exp\{-b\vartheta + \lambda\mu\vartheta\}\,d\vartheta = \frac{1}{b-\lambda\mu}.$$

1. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1959.— 468 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 25.05.84