УДК 517.38

М. А. Перельмутер, Ю. А. Семенов

О существенной самосопряженности эллиптических операторов второго порядка с измеримыми коэффициентами

Рассмотрим матрицу $(a_{kj}(x))$, $k, j = 1, \ldots, l$, элементами которой являются вещественные измеримые функции на $\mathbb{R}^l$ такие, что

$$a_{kj}(x) = a_{jk}(x) \text{ для почти всех (п. в.) } x \in \mathbb{R}^l, \tag{1}$$

$$\sum_j \xi_j^2 \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}(x)\, \xi_k \xi_j \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^l, \text{ п. в. } x \in \mathbb{R}^l \tag{2}$$

(здесь и далее суммирование предполагается по индексам, которые изменяются от 1 до l). Рассмотрим также формальное дифференциальное выражение $L = -\sum\limits_{k,j} \partial/\partial x_k a_{kj}(x)\, \partial/\partial x_j + V$.

Цель ранной работы — исследование условий, при которых оператор $L \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^l)$ в существенном самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^l, d^l x)$ (далее $L^p(\mathbb{R}^l, d^l x) \equiv L^p$, $\|\cdot\|_p$ — норма в L^p, $C_0^\infty(\mathbb{R}^l) \equiv C_0^\infty$).

Везде ниже через $L_k^p \equiv L_k^p(\mathbb{R}^l, d^l x)$ будем обозначать пространство Соболева, т. е. пространство измеримых функций на $\mathbb{R}^l$, которые вместе со всеми своими обобщенными производными до порядка k включительно принадлежат L^p.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2), $0 \leqslant V \in L^2$ *и* $a_{kj} - \delta_{kj} \in L_1^4$, $k, j = 1, \ldots, l$ (δ_{kj} — *символы Кронекера*). *Тогда* $L \restriction C_0^\infty$ *в существенном самосопряжен в* L^2.

Доказательство проводится по следующей схеме: 1) строится самосопряженный оператор $H \supset L \restriction C_0^\infty$, который обладает «хорошими» свойствами, т. е. $\exp(-tH)$ — сжатие во всех L^p, оператор H можно аппроксимировать в смысле сильной резольвентной сходимости в L^2 соответствующими операторами с гладкими коэффициентами и т. п.; 2) рассматривается ядро оператора H $\mathcal{E} = (H+1)^{-1}[L^2 \cap L^\infty]$ и показывается, что $\mathcal{E} \subset L_2^2 \cap L^\infty \cap L_1^4$; 3) если $H_0 = (-\Delta \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^l))^\sim$, то можно показать, что множество $R = \bigcup_{n\geqslant 1} (1 + H_0/n)^{-1} \mathcal{E} \subset L_2^p$, $2 \leqslant p < \infty$, — ядро H; 4) на основании стандартной техники регуляризации по Фридрихсу и обрезания функций доказывается, что всякую функцию из R можно аппроксимировать функциями из C_0^∞ в норме графика оператора H.

Доказательство. Рассмотрим на множестве C_0^∞ квадратичную форму

$$a_0[u, v] = \int_{\mathbb{R}^l} \Big(\sum_{k,j} a_{kj}(x)\, \partial u/\partial x_k\, \partial \bar{v}/\partial x_j + V(x)\, u(x)\, \bar{v}(x) \Big) d^l x,$$

а также матрицы $(a_{kj}^{(n)}) = \Big(\delta_{kj} + (a_{kj} - \delta_{kj})/\Big(1 + \sum_k a_{kk}/n\Big)\Big)$ (которые назовем усечением матрицы (a_{kj})). Из положительной определенности и симметричности матрицы (a_{kj}) следует, что $|a_{kj}| \leqslant (a_{kk} + a_{jj})/2$. Из этого неравенства непосредственно вытекает, что $|a_{kj}^{(n)}| \leqslant \mathrm{const}(n)$. Рассмотрим теперь соответствующие квадратичные формы, заданные на пространстве Соболева L_1^2:

$$a_n[u, v] = \int_{\mathbb{R}^l} \Big(\sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x)\, \partial u/\partial x_k\, d\bar{v}/\partial x_j + \min\{V(x), n\}\, u(x)\, \overline{v(x)} \Big) d^l x$$

(все производные понимаются в смысле распределений). Очевидно, что матрицы $(a_{kj}^{(n)})$ обладают следующими свойствами:

$$|\vec{\xi}|^2 \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x)\, \xi_k \xi_j \leqslant \mathrm{const}(n)\, |\vec{\xi}|^2 \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^l; \tag{3}$$

$$\sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x)\, \xi_k \xi_j \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}^{(n+1)} \xi_k \xi_j. \tag{4}$$

Из (3) вытекает, что каждая из форм a_n, $n = 1, 2, \ldots$, с $\mathcal{D}(a_n) = L_1^2$ замкнута, а из (4) видно, что $a_n \leqslant a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Итак, имеем монотонно возрастающую последовательность замкнутых симметричных неотрицательных форм $\{a_n\}$. Определим предельную форму

$$\mathcal{D}(a) = \{u \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{D}(a_n) : \sup_{n\geqslant 1} a_n[u, u] < \infty\}, \quad a[u, u] = \lim_{n\to\infty} a_n[u, u].$$

Эта форма замкнута (см. [1]) и плотно определена, так как $C_0^\infty \subset \mathcal{D}(a)$. Следовательно, согласно теоремам о представлении [2, гл. VI] a ассоциирует неотрицательный самосопряженный оператор H, являющийся расширением $L \restriction C_0^\infty$. Из результатов работы [2, гл. VIII, §3] вытекает, что $(H - \lambda)^{-1} = s - \lim_{n\to\infty} (H_n - \lambda)^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, где H_n — операторы, построенные по матрицам $(a_{kj}^{(n)})$, $V_n = \min\{V, n\}$.

Хорошо известно, что в случае ограниченных V, a_{kj} $(k, j = 1, \ldots, l)$ оператор H можно аппроксимировать в смысле сильной резольвентной сходимости в L^2 соответствующими операторами с гладкими коэффициентами a_{kj}, V, положив, например, $a_{kj}^{(m)} = \mu_m * a_{kj}$, $V_m = \mu_m * V$, где $\mu_m(x) = \mu(mx)\left(\int \mu(mx)\, d^l x\right)^{-1}$, $\mu \in C_0^\infty$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\mu(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\mu(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$ (см., напр., [3, 4]). А поскольку при любом $n = 1, 2, \ldots$ $a_{kj}^{(n)} \in L^\infty$, $V_n \in L^\infty$, то

$$(H - \lambda)^{-1} = s - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (H_{nm} - \lambda)^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty). \tag{5}$$

Построенный выше оператор H обладает свойством

$$\|(H + 1)^{-1} u\|_p \leqslant \|u\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \forall u \in L^1 \cap L^\infty, \tag{6}$$

поскольку в случае гладких коэффициентов V, a_{kj} это непосредственно следует из принципа максимума, а при наших предположениях вытекает из (5).

Рассмотрим множество $\mathscr{E} = (H+1)^{-1}[L^2 \cap L^\infty]$, которое, очевидно, является ядром оператора H. Наша цель — доказать вложение $\mathscr{E} \subset L_2^2 \cap \cap L^\infty \cap L_1^4$.

Заметим, что ниже будет широко применяться коммутаторная техника. Пусть A, B, вообще говоря, неограниченные операторы в банаховом пространстве. Определим коммутатор равенством $[A, B] = AB - BA$ с естественной областью определения. В частности, если B имеет непрерывный обратный, то равенство $[A, B^{-1}] = B^{-1}[B, A]B^{-1}$ следует понимать на всех элементах $u \in \mathscr{D}(A)$, для которых $B^{-1}u \in \mathscr{D}(A)$, $AB^{-1}u \in \mathscr{D}(B)$.

Перейдем непосредственно к доказательству вложения $\mathscr{E} \subset L_2^2 \cap L^\infty \cap \cap L_1^4$. Сначала рассмотрим случай гладких коэффициентов a_{kj}, V. Пусть $v = (H+1)^{-1}u$, $u \in C_0^\infty$. При этом функция v достаточно гладкая, так что легко проверить, что $[\nabla_s, H]v = -\sum_{k,j} \nabla_k(\nabla_s a_{kj})\nabla_j v + \nabla_s V v - V\nabla_s v$ и

$$\|\Delta v\|_2 \leqslant \sum_s \|\nabla_s \nabla_s (H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant \sum_s (\|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_s u\|_2 +$$

$$+ \|\nabla_s (H+1)^{-1}[\nabla_s, H](H+1)^{-1}u\|_2),$$

где $\nabla_s \equiv \partial/\partial x_s$, $(\nabla_s\varphi) \equiv \partial\varphi/\partial x_s$. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant \sum_s \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_s u\|_2 +$$

$$+ \sum_{k,j,s} \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_k(\nabla_s a_{kj})\nabla_j (H+1)^{-1}u\|_2 +$$

$$+ \sum \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_s V(H+1)^{-1}u\|_2 +$$

$$+ \sum_s \|\nabla_s (H+1)^{-1/2}(H+1)^{-1/2}V^{1/2}V^{1/2}\nabla_s (H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_s \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_s\|_{2,2}\|u\|_2 + \sum_{k,j,s} \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_k\|_{2,2}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4 \times$$

$$\times \|\nabla_j (H+1)^{-1}u\|_4 + \sum_s \|\nabla_s (H+1)^{-1}\nabla_s\|_{2,2}\|V\|_2\|(H+1)^{-1}u\|_\infty +$$

$$+ \sum_s \|\nabla_s (H+1)^{-1/2}\|_{2,2}\|(H+1)^{-1/2}V^{1/2}\|_{2,2}\|V^{1/2}\|_4\|\nabla_s (H+1)^{-1}u\|_4,$$

где $\|\cdot\|_{p,q}$ — норма оператора как отображения L^p в L^q. С помощью неравенств $\|\nabla_s (H+1)^{-1/2}\|_{2,2} \leqslant 1$, $\|(H+1)^{-1/2}V^{1/2}\|_{2,2} \leqslant 1$, непосредственно вытекающих из конструкции H и условий (2), $V \geqslant 0$, получим:

$$\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant l\|u\|_2 + \sum_{k,j,s} \|(\nabla_s a_{kj})\|_4 \|\nabla_j (H+1)^{-1}u\|_4 +$$

$$+ l\|V\|_2\|u\|_\infty + \sum \|V\|_2^{1/2}\|\nabla_s (H+1)^{-1}u\|_4. \tag{7}$$

Теперь воспользуемся неравенством, которое восходит к работам Гальярдо и Ниренберга (см. [5, § 15]):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c(\varepsilon) < \infty : \|\nabla_j\varphi\|_{2p} \leqslant \varepsilon\|\Delta\varphi\|_p + c(\varepsilon)\|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \quad C_0^\infty. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получаем

$$\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant l\|u\|_2 + \varepsilon\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 \sum_{k,j,s} \|(\nabla_s a_{kj})'\|_4 +$$

$$+ c(\varepsilon)\|(H+1)^{-1}u\|_\infty \sum_{k,j,s} \|(\nabla_s a_{kj})\|_4 + l\|V\|_2\|u\|_\infty +$$

$$+ \varepsilon l \|V\|_2^{1/2}\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 + c(\varepsilon)\, l\|V\|_2^{1/2}\|(H+1)^{-1}u\|_\infty.$$

Из последнего неравенства при $\varepsilon < \left(\sum_{k,j,s}\|\nabla_s a_{kj})\|_4 + l\|V\|_2^{1/2}\right)^{-1}$ с учетом (6), находим

$$\|\Delta(H+1)^{-1}u\|_2 \leqslant \Big(1 - \varepsilon\sum_{k,j,s}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4 - \varepsilon l\|V\|_2^{1/2}\Big)^{-1}\Big(l\|u\|_2 +$$

$$+ c(\varepsilon)\|u\|_\infty \sum_{k,j,s}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4 + l\|V\|_2\|u\|_\infty + c(\varepsilon)\cdot l\|V\|_2^{1/2}\|u\|_\infty\Big) < \infty. \tag{9}$$

Все приведенные выше рассуждения относились к случаю, когда a_{kj}, V, u — гладкие функции. Предположим теперь, что a_{kj}, V удовлетворяют условиям теоремы 1 и $u \in L^2 \cap L^\infty$. Пусть H_n — операторы с гладкими коэффициентами $a_{kj}^{(n)}$, V_n, причем последние построены так же, как при доказательстве (5). Выберем $\{u_n\} \subset C_0^\infty$ так, что $u_n \xrightarrow[L^2]{s} u$, $\sup_n \|u_n\|_\infty < \infty$. Тогда $(H_n+1)^{-1}u_n \xrightarrow[L^2]{s} (H+1)^{-1}u$. Непосредственная проверка показывает, что выбранные нами $a_{kj}^{(n)}$, V_n обладают следующими свойствами:

$$\sup_n (\|\nabla_s a_{kj}^{(n)})\|_4 + \|V_n\|_2) < \infty.$$

Поэтому на основании (9) $\sup_n \|\Delta(H_n+1)^{-1}u_n\|_2 < \infty$, т. е. $\{(H_n+1)^{-1}u_n\}$ — ограниченная последовательность в пространстве Соболева L_2^2. Поскольку L_2^2 локально слабо компактно, то из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность так, чтобы

$$(H_{n_m}+1)^{-1}u_{n_m} \xrightarrow[L^2]{s} (H+1)^{-1}u, \quad \Delta(H_{n_m}+1)^{-1}u_{n_m} \xrightarrow[L^2]{w} y \in L^2.$$

Поскольку Δ — замкнутый оператор, то $(H+1)^{-1}u \in L_2^2$. Итак, $\mathscr{E} \subset L_2^2$. Согласно (6) $\mathscr{E} \subset L^\infty$, и остается отметить, что (8) влечет $L_2^2 \cap L^\infty \subset L_1^4$.

Итак, $\mathscr{E} \subset L_2^2 \cap L^\infty \cap L_1^4$, поэтому $\forall u \in \mathscr{E}$

$$Hu = -\sum_{k,j} a_{kj}\nabla_k\nabla_j u - \sum_{k,j}(\nabla_k a_{kj})\nabla_j u + Vu, \tag{10}$$

где все производные понимаются в смысле обобщенных функций. Из вложения $\mathscr{E} \subset L_2^2 \cap L^\infty \cap L_1^4$ и условий на коэффициенты V, a_{kj} вытекает, что все слагаемые, за исключением, быть может, лишь первого, в правой части (10) принадлежат L^2, а поскольку $Hu \in L^2$, то и $\sum_{k,j} a_{kj}\nabla_k\nabla_j u \in L^2$.

Рассмотрим множество $R = \bigcup_{n\geqslant 1}(1 + H_0/n)^{-1}\mathscr{E}$, где $H_0 = (-\Delta \upharpoonright C_0^\infty)^\sim$.

Покажем, что $R \subset \mathscr{D}(H)$. Пусть $u \in R$, $u_n = (1 + H/n)^{-1}u$, тогда $u_n \xrightarrow[L^2]{s} u$. Из приведенных выше результатов об аппроксимации следует $Hu_n = s - L^2 - \lim_{m\to\infty} H_m(1 + H_m/n)^{-1}u$, где H_m — соответствующий оператор с гладкими коэффициентами. Тогда, учитывая вложение $R \subset \bigcap_{2\leqslant p<\infty} L_2^p$, имеем $u \in \mathscr{D}(H_m)$ и

$$H_m(1 + H_m/n)^{-1}u = (1 + H_m/n)^{-1}H_m u = (1 + H_m/n)^{-1} \times$$

$$\times \Big(\sum_{k,j} a_{kj}^{(m)}\nabla_k\nabla_j u + \sum_{k,j}(\nabla_k a_{kj}^{(m)})\nabla_j u + V_m u\Big).$$

Так как a_{kj}, V можно выбрать такими, что $V_m \xrightarrow[L^2]{s} V$, $a_{kj}^{(m)} - \delta_{kj} \xrightarrow[L_1^4]{s} a_{kj} - \delta_{kj}$, то из неравенства Гельдера и включения $u \in L_2^4 \cap L^\infty$ следует

$$\sum_{k,j} a_{kj}^{(m)} \nabla_k \nabla_j u + \sum_{k,j} (\nabla_k a_{kj}^{(m)}) \nabla_j u + V_m u \xrightarrow[L^2]{s}$$

$$\xrightarrow[L^2]{s} \sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j u + \sum_{k,j} (\nabla_k a_{kj}) \nabla_j u + Vu \equiv y \in L^2.$$

Поэтому $Hu_n = (1 + H/n)^{-1} u$. Переходя к пределу по $n \to \infty$, имеем: $u_n \xrightarrow[L^2]{s} u_n$, $Hu_n \xrightarrow[L^2]{s} y$, откуда, ввиду замкнутости оператора H, следует $u \in \mathcal{D}(H)$.

Покажем, что R — ядро H. Пусть $u \in \mathcal{E}$; поскольку $(1 + H_0/n)^{-1} u \xrightarrow[L^2]{s} u$, то задача сводится к доказательству сходимости $H(1 + H_0/n)^{-1} u \xrightarrow[L^2]{s} Hu$. Для этого достаточно показать сходимость $\{(1 + H_0/n)^{-1} u\}$ в норме графика каждого из операторов, входящих в правую часть (10). Ограничимся рассмотрением лишь первого слагаемого $\sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j$ (прочие аналогичны). Пусть $A_n = 1 + H_0/n$. С помощью коммутаторных равенств (строгое обоснование которых проводится с помощью аргументов, основанных на аппроксимации, аналогичных вышеприведенным), получаем

$$\sum_{k,j} a_{kj} \triangle_k \nabla_j (A_n^{-1} - 1) u = \sum_{k,j} a_{kj} (A_n^{-1} - 1) \nabla_k \nabla_j u =$$

$$= (A_n^{-1} - 1) \sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j u + \sum_{k,j} A_n^{-1} [H_0/n,\ a_{kj}] A_n^{-1} \nabla_k \nabla_j u$$

Поскольку $[H_0/n,\ a_{kj}] = -n^{-1} \sum_s (\nabla_s (\nabla_s a_{kj}) + (\nabla_s a_{kj}) \nabla_s)$, то

$$\sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j (A_n^{-1} - 1) u = (A_n^{-1} - 1) \sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j u -$$

$$- \sum_{k,j,s} A_n^{-1} \frac{\nabla_s}{\sqrt{n}} (\nabla_s a_{kj}) A_n^{-1} \frac{\nabla_k}{\sqrt{n}} (\nabla_j u - \varphi) -$$

$$- \sum_{k,j,s} A_n^{-1} \frac{\nabla_s}{\sqrt{n}} (\nabla_s a_{kj}) A_n^{-1} \frac{\nabla_k}{\sqrt{n}} \varphi - \sum_{k,j,s} A_n^{-1} (\nabla_s a_{kj}) \nabla_s \frac{A_n^{-1}}{n} \nabla_k (\nabla_j u - \varphi) -$$

$$- \sum_{k,j,s} A_n^{-1} (\nabla_s a_{kj}) \frac{\nabla_s}{\sqrt{n}} A_n^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \nabla_k \varphi,$$

где $\varphi \in C_0^\infty$, откуда, применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $\| A_n^{-1} \|_{p,p} \leqslant 1$, $\| A_n^{-1} \nabla_s / \sqrt{n} \|_{p,p} \leqslant c(p)$, $\| \nabla_s A_n^{-1} \nabla_k / n \|_{p,p} \leqslant c(p)$, где $1 < p < \infty$, $c(p)$ не зависит от $n = 1, 2, \ldots$ и $c(2) = 1$, имеем

$$\Big\| \sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j (A_n^{-1} - 1) u \Big\|_2 \leqslant \Big\| (A_n^{-1} - 1) \sum_{k,j} a_{kj} \nabla_k \nabla_j u \Big\|_2 +$$

$$+\sum_{k,j,s}\left\{\left\|A_n^{-1}\frac{\nabla_s}{\sqrt{n}}\right\|_{2,2}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\left\|A_n^{-1}\frac{\nabla_k}{\sqrt{n}}\right\|_{4,4}\|\nabla_j u-\varphi\|_4+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|A_n^{-1}\frac{\nabla_s}{\sqrt{n}}\right\|_{2,2}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\|A_n^{-1}\|_{4,4}\|(\nabla_k\varphi)\|_4+$$

$$+\|A_n^{-1}\|_{2,2}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\left\|\nabla_s A_n^{-1}\frac{\nabla_k}{\sqrt{n}}\right\|_{4,4}\|\nabla_j u-\varphi\|_4+$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}\|A_n^{-1}\|_{2,2}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\left\|\frac{\nabla_s}{\sqrt{n}}A_n^{-1}\right\|_{4,4}\|(\nabla_k\varphi)\|_4\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|(A_n^{-1}-1)\sum_{k,j}a_{kj}\nabla_k\nabla_j u\right\|_2+\sum_{k,j,s}\left\{2c(4)\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\|\nabla_j u-\varphi\|_4+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\|(\nabla_k\varphi)\|_4+\frac{1}{\sqrt{n}}c(4)\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\|(\nabla_k\varphi)\|_4\right\}.$$

Очевидно, что первое слагаемое в (11) стремится к нулю. Рассмотрим остальные слагаемые. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем функцию $\varphi\in C_0^\infty$ так, чтобы $2c(4)\sum_{k,j,s}\|(\nabla_s a_{kj})\|_4\|\nabla_j u-\varphi\|_4<\varepsilon$. Тогда из (11) вытекает, что при достаточно большом n $\left\|\sum_{k,j}a_{kj}\nabla_k\nabla_j(A_n^{-1}-1)u\right\|_2<\varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, имеем $\sum_{k,j}a_{kj}\nabla_k\nabla_j(A_n^{-1}-1)u\xrightarrow[L^2]{s}0$. Таким образом, показано, что множество $R=\bigcup_{n\geqslant 1}(1+H_0/n)^{-1}\mathscr{E}$ — ядро H, причем из $\mathscr{E}\subset L^2\cap L^\infty$ следует $R\subset L_2^p$, $2\leqslant p<\infty$.

Покажем существенную самосопряженность H на множестве $\mathscr{F}=\bigcup_{\varepsilon>0}\{\rho_\varepsilon * u : u\in R\}$, где $*$ — знак свертки; $\rho_\varepsilon(x)=\rho(x/\varepsilon)\left(\int\rho(x/\varepsilon)\,d^l x\right)^{-1}$, $\rho\in C_0^\infty$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $\rho(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$. (Вложение $\mathscr{F}\subset\mathscr{D}(H)$ следует из аргументов, аналогичных тем, с помощью которых доказано вложение $R\subset\mathscr{D}(H)$.) Достаточно показать сходимость $\{\rho_\varepsilon * u\}$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ в норме графиков операторов $\sum_{k,j}a_{kj}\nabla_k\nabla_j$, $\sum_{k,j}(\nabla_k a_{kj})\nabla_j$, V для всех $u\in R$. Но учитывая, что $R\subset L_2^p\cap L^\infty$, $2\leqslant p<\infty$, этот факт непосредственно следует из неравенства Гельдера и известных свойств операции $\rho_\varepsilon *$.

Итак, доказана существенная самосопряженность H на множестве $\mathscr{F}\subset C^\infty$. Остается отметить, что прямые вычисления показывают, что $\forall u\in\mathscr{F}$ $\mu_n u\xrightarrow[L^2]{s}u$, $H\mu_n u\xrightarrow[L^2]{s}Hu$, где $\mu_n(x)=\mu(x/n)$, $\mu\in C_0^\infty$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$, $\mu(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$, т. е. множество $\bigcup_{n\geqslant 1}\mu_n\mathscr{F}\subset C_0^\infty$ — ядро оператора H. Тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что критическим местом является доказательство вложения $\mathscr{E}\subset L_2^2$. Именно здесь возникло ограничение $a_{kj}-\delta_{kj}\in L_1^4$. Все прочие рассуждения можно реализовать для более широкого класса функций a_{kj}.

Замечание 2. Идея использовать для доказательства существенной самосопряженности неравенство Гальярдо — Ниренберга заимствована из [6].

Замечание 3. Теорема 1 — первый результат о существенной самосопряженности, в котором допускаются (при $l\geqslant 4$) локально неограниченные коэффициенты a_{kj}. Все ранее известные результаты содержат условие непрерывности по Гельдеру функций a_{kj} [7, 8] (см., однако [4], где a_{kj} равномерно непрерывны).

Теорема 1 относилась к случаю убывающих на бесконечности коэффициентов. В следующем результате подобные ограничения отсутствуют. Прежде чем его сформулировать, введем некоторые обозначения. Пусть $\lambda(x)$ — максимальное собственное число матрицы $(a_{kj}(x))$. Для $0 \neq x \in \mathbb{R}^l$ обозначим через (r, ω) сферические координаты точки x, т. е. $r = |x|$, $\omega = x/|x|$. Обозначим через S^l единичную сферу в $\mathbb{R}^l$; $\mu(r) = \operatorname{esssup}_{\omega \in S^l} \lambda(r, \omega)$, где esssup понимается в смысле обычной меры на S^l.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1), (2), $0 \leqslant V \in L^2_{\mathrm{loc}}$, $a_{kj} \in L^4_{1,\mathrm{loc}}$, $k, j = 1, \ldots, l$,

$$\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{\mu(r)}} = \infty. \tag{12}$$

Тогда $L \upharpoonright C_0^\infty$ *в существенном самосопряжен в* L^2.

Доказательство этой теоремы состоит в следующем. Как и при доказательстве теоремы 1, строится самосопряженный оператор $H \supset L$. Условие (12) гарантирует (см. [9]) конечность скорости распространения возмущений для гиперболического уравнения $d^2u/dt^2 + Hu = 0$. Факт конечности скорости распространения позволяет слелать вывод, что оператор H имеет ядро $\mathscr{D}_0$, состоящее из ограниченных финитных функций (см. [10]). Изучение оператора $H \upharpoonright \mathscr{D}_0$ сводится фактически к рассмотрению оператора типа L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 1.

В заключение отметим, что изложенные выше результаты нетрудно обобщить на дифференциальные операторы, содержащие члены первого порядка, вырождающиеся (a_{kj}), знаконеопределенные V и т. п.

1. *Simon B.* A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems.— J. Funct. Anal., 1978, **28**, N 3, p. 377—385.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М. : Наука, 1971.— 287 с.
4. *Семёнов Ю. А.* Гладкость обобщенных решений уравнения $(\lambda - \sum_{ij} \nabla_i a_{ij} \nabla_j) u = f$ с непрерывными коэффициентами.— Мат. сб., 1982, **118**, № 3, с. 399—410.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М. : Наука, 1975.— 480 с.
6. *Leinfelder H., Simader C. G.* Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials.— Math. Z., 1981, **176**, N 1, p. 1—19.
7. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения.— Успехи мат. наук, 1981, **36**, вып. 5, с. 3—56.
8. *Орочко Ю. Б.* Конечная скорость распространения и существенная самосопряженность некоторых дифференциальных операторов.— Функц. анализ и его прил., 1979, **13**, № 3, с. 95—96.
9. *Перельмутер М. А., Семенов Ю. А.* О конечности скорости распространения возмущений для гиперболических уравнений.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 1, с. 56—63.
10. *Oročko Yu. B.* Self-adjontness of the minimal Schrödinger operator with potential belonging to L^1_{loc}.— Rep. Math. Phys., 1979, **15**, N 2, p. 163—172.

УкрНИИпроектстальконструкция, Киев

Поступила 24.05.82
после доработки — 01.06.84