УДК 531.36

С. П. Сосницкий

О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем

В соответствии с известной теоремой Лагранжа — Дирихле положение равновесия натуральных систем устойчиво, если потенциальная энергия принимает в нем строгий локальный минимум. Так как теорема Лагранжа — Дирихле в общем случае необратима, то представляется интересным вопрос о нахождении возможно более слабых ограничений, когда неустойчивость все-таки имеет место (см. обзоры [1, 2]).

1. Рассмотрим натуральную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \tag{1}$$

где $T(q, \dot{q}) = (\|\dot{q}\|^2 + \dot{q}^T A(q)\dot{q})/2$, $\|\dot{q}\| = \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle}$, $A(0) = 0$. Будем считать, что $L(q, \dot{q}) = T - \Pi \in C^1_q(D \subset R^n_q)$, $t \in R$. Пусть точка $q = \dot{q} = 0$ соответствует положению равновесия системы (1) и $\Pi(0) = 0$. Предположим, кроме того, что функция $\Pi(q)$ допускает представление в виде $\Pi(q) = \Pi_k + R(q)$, $R(q) = o(\|q\|^k)$, где Π_k — однородная форма степени k.

Теорема 1. *Если в точке $q = 0$ форма Π_k не имеет минимума и выполняются условия*

$$\lim_{\|q\|\to 0}\frac{\|\partial R/\partial q\|}{\|q\|^{k-1+\alpha}} = 0, \quad \lim_{\|q\|\to 0}\frac{A(q)}{\|q\|^{\alpha}} = 0, \quad \mathrm{const} = \alpha \in (0, 1), \tag{2}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Представив уравнения Лагранжа (1) в гамильтоновой форме

$$dq/dt = \partial H/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H/\partial q, \tag{3}$$

$$H(q, p) = (\|p\|^2 + p^T B p)/2 + \Pi(q) = h = \mathrm{const}, \tag{4}$$

$$B(q) = (E + A)^{-1} - E, \quad B(0) = 0,$$

определим множество $\Lambda = \{q, p \in S_\varepsilon = \|q \oplus p\| < \varepsilon : H = 0,\ \langle q, p\rangle - \delta f > 0\}$, где $f = \exp(-\|q\|^{\alpha})\|q\|^{k/2+1}$, $0 < \delta = \mathrm{const}$. Покажем, что при подходящем выборе δ $\Lambda \neq \varnothing$.

Действительно, на основании (4) при $h = 0$ приходим к равенству

$$T(q, \dot{q}) = T^*(q, p) = -\Pi(q), \tag{5}$$

в соответствии с которым и оценкой $\|p\|^2(1 - \Delta_1(q)) \leqslant 2T^*(q, p) \leqslant \|p\|^2(1 + \Delta_2(q))$, где $0 \leqslant \Delta_i(q) = o(1)$, $i = 1, 2$, имеем

$$\|p\|^2 \geqslant -\frac{2\Pi}{1 + \Delta_2} = -2\Pi_k + o(\|q\|^k). \tag{6}$$

Рассматривая производную по направлению q от дроби $\Pi_k/\|q\|^k$ и замечая при этом, что с учетом теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\frac{d}{dq}(\Pi_k) = \frac{\partial \Pi_k}{\partial q}\frac{q}{\|q\|} = \frac{k\Pi_k}{\|q\|}, \qquad \frac{d}{dq}(\|q\|^k) = k\|q\|^{k-1},$$

получаем

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\Pi_k}{\|q\|^k}\right) \equiv 0. \tag{7}$$

На основании (7) дробь $\Pi_k/\|q\|^k$ на любом фиксированном направлении q сохраняет постоянное значение, а так как в точке $q=0$ согласно условию теоремы форма Π_k не имеет минимума, то среди всех возможных направлений q, исходящих из точки $q=0$, существует такое, на котором $\Pi_k/\|q\|^k<0$. Следовательно,

$$\sup_{q\in S_\varepsilon}(-\Pi_k/\|q\|^k)=\max_{q\in S_\varepsilon}(-\Pi_k/\|q\|^k)=\mu^2\neq 0. \tag{8}$$

Согласно (6), (8) и произволу в выборе направления обобщенного импульса p, для того чтобы множество Λ не было пустым, достаточно выбор δ подчинить условию $\delta<\sqrt{2\mu}$.

Положив $t\in I^+=[0,\infty)$, рассмотрим на множестве Λ производную от функции $V=\langle q,p\rangle-\delta f$ по векторному полю, определяемому уравнениями (3). В результате получим:

$$\frac{dV}{dt}=\|p\|^2+p^TBp-k\Pi_k-q\frac{\partial R}{\partial q}-\frac{1}{2}q\frac{\partial}{\partial q}(p^TBp)-$$

$$-\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2-1}(k/2+1-\alpha\|q\|^\alpha)(\langle q,p\rangle+p^TBq). \tag{9}$$

Разрешая (5) относительно Π_k, равенству (9) с учетом (2) можно придать форму

$$dV/dt=(k/2+1)[\|p\|^2-\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2-1}\langle q,p\rangle]+$$

$$+\alpha\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2-1+\alpha}\langle q,p\rangle+o(\|q\|^{k+\alpha}). \tag{10}$$

Поскольку, согласно определению Λ, $\|p\|>\delta f/\|q\|\cos(\widehat{q,p})\geqslant\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2}$, то представляя равенство (10) в виде

$$dV/dt=(k/2+1)\|p\|[\|p\|-\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2}\cos(\widehat{q,p})]+$$

$$+\alpha\delta\exp(-\|q\|^\alpha)\|q\|^{k/2-1+\alpha}\langle q,p\rangle+o(\|q\|^{k+\alpha}),$$

заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ на множестве Λ производная

$$dV/dt>\alpha\delta^2\|q\|^{k+\alpha}+o(\|q\|^{k+\alpha}) \tag{11}$$

положительна. Так как по определению множества Λ функция V на нем также положительна и $V=0$ на $\partial\Lambda\cap S_\varepsilon$, то множество Λ сочетает в себе свойства абсолютного сектора и абсолютного экспеллера, и в соответствии с теоремой Четаева [3, с. 25] (см. также [2, с. 137]) положение равновесия $q=p=0$ системы (3) неустойчиво. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Структура множества Λ позволяет оценить характер поведения фазовых траекторий системы (3) с началом на Λ.

Действительно, в соответствии с определением Λ справедливо неравенство $\langle q,p\rangle-\delta f=\langle q,\dot q\rangle-\delta f+o(\langle q,\dot q\rangle)>0$, которое в дальнейшем удобно представить в виде

$$d\|q\|^2/dt>2\delta\|q\|^{k/2+1}+o(\|q\|^{k/2+1})=2\delta(\|q\|^2)^{(k+2)/4}+o(\|q\|^{k/2+1}). \tag{12}$$

На основании (12)

$$d\|q\|^2/dt>\lambda(\|q\|^2)^{(k+2)/4},\quad 0<\lambda<2\delta,\quad \lambda=\text{const}. \tag{13}$$

Интегрируя (13) при $k>2$ в пределах от 0 до $t\in I^+$, получаем неравенство $\|q(t)\|^{(k-2)/2}>(\|q(0)\|^{-(k-2)/2}-\lambda(k-2)t/4)^{-1}$, позволяющее оценить характер ухода из Λ исследуемых решений $\|q(t)\|>(\|q(0)\|^{-(k-2)/2}-\lambda(k-2)t/4)^{-2/(k-2)}$.

Аналогично в случае $t\in I^-=(-\infty,0]$ имеем $\|q(t)\|<(\|q(0)\|^{-(k-2)/2}-\lambda(k-2)t/4)^{-2/(k-2)}$, откуда следует существование асимптотических к положению равновесия траекторий при $t\to-\infty$. А из обратимости системы (1) по отношению к t следует существование траекторий, примыкающих к точке $q=p=0$, когда $t\to\infty$.

Случай $k=2$ рассмотрен Ляпуновым [4].

В качестве частного случая из теоремы 1 следует конечномерный вариант результата работы [5].

Замечание 2. Хотя теорема Четаева о неустойчивости приводится обычно для систем, обладающих свойством единственности решений, тем не менее при ее доказательстве последнее не является существенным.

2. Изложенный выше подход к доказательству неустойчивости равновесия натуральных систем позволяет распространить его на более общий случай, когда потенциальная энергия допускает представление в виде $\Pi=P_m+R(q)$, $P_m=\sum\limits_{k=2}^{m}\Pi_k$, $R(q)=o(\|q\|^m)$. В остальном исходные предпосылки те же, что и в п. 1.

Определим множества

$$\Omega=\{q\in s_\varepsilon=\|q\|<\varepsilon:\Pi(q)<0\},$$

$$\Omega_i=\left\{q\in s_\varepsilon:P_i=\sum_{k=2}^{i\leqslant m}\Pi_k<0\right\},\quad \Omega_i^*=\Omega\cap\Omega_i.$$

Теорема 2. *Если существует* $\varepsilon>0$ $(D\supset\bar{s}_\varepsilon)$ *такое, что*: 1) $\Omega\neq\varnothing$; 2) $\Omega_m^*\neq\varnothing$; 3) $0\in\overline{\Omega}_m^*$; 4) $\Omega_i^*(i<m)=\varnothing$; 5) $-P_m\geqslant\mu^{*2}\|q\|^m$ $\forall q\in\omega\subset\subset\Omega_m^*$, $\mu^*=\mathrm{const}$, $0\in\bar{\omega}$, *где* ω — *некоторое собственное подмножество множества* Ω_m^*; 6) $\|\partial R/\partial q\|/\|q\|^{m-1+\alpha}\to0$, $A(q)/\|q\|^\alpha\to0$ *при* $\|q\|\to0$, *то положение равновесия системы* (1) *неустойчиво*.

Доказательство. Аналогично п. 1 рассматриваем движение на множестве $\Lambda_m=\{q,p\in S_\varepsilon:H=0,\langle q,p\rangle-\delta f_1>0\}$, где $f_1=\exp(-\|q\|^\alpha)\times\|q\|^{m/2+1}$, $0<\delta=\mathrm{const}$. Рассуждая по вышеизложенной схеме, заключаем, что $\Lambda_m\neq\varnothing$, если $\delta<\sqrt{2}\mu^*$.

Рассматривая производную по векторному полю, определяемому уравнениями (3), от функции $V_1=\langle q,p\rangle-\delta f_1$, $t\in I^+$, получаем $dV_1/dt=dV/dt+\sum\limits_{k=2}^{m-1}(m-k)\Pi_k$, где dV/dt определяется равенством (10) с заменой в нем k на m.

Учитывая тождество $\sum\limits_{k=2}^{m-1}(m-k)\Pi_k=\sum\limits_{k=2}^{m-1}P_k$, неотрицательность, согласно условию 4), полиномов P_k $(k\leqslant m-1)$, $\forall q\in\Lambda_m$, неравенство (11) (при $k=m$), заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ производная $dV_1/dt>0$ на Λ_m. Поскольку $V_1>0$ на множестве Λ_m, по определению последнего, и $V_1=0$ на $\partial\Lambda_m\cap S_\varepsilon$, то, согласно теореме Четаева, положение равновесия системы (3) неустойчиво. Теорема 2 доказана.

По аналогии с п. 1, для рассмотренного класса систем справедливо замечание 1.

3. Доказательство неустойчивости натуральных систем в условиях теорем 1, 2 основано на возможности выделения в области допустимых движений главной части потенциала сил. В соответствии с этим теорему 2 можно распространить при соответствующих ограничениях на более широкий класс обобщенно-консервативных систем.

Рассмотрим голономную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0,\quad L(q,\dot{q})=T_2+T_1-\Pi(q)=$$

$$=(\|\dot{q}\|^2+\dot{q}^TA(q)\dot{q})/2+f^T(q)\dot{q}-\Pi(q).\tag{14}$$

Пусть $L(q, \dot q) \in C^1_{\dot q}$ $(D \subset R^n_q)$, остальные предположения и определения те же, что и в пп. 1, 2.

Теорема 3. *Если существует* $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ *такое, что выполнены условия* 1) — 6) *теоремы* 2, *и, кроме того,*

$$\lim_{\|q\| \to 0} \frac{|\partial f_i/\partial q_j - \partial f_j/\partial q_i|}{\|q\|^{m/2-1+\alpha}} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

то положение равновесия системы (14) *неустойчиво.*

Доказательство. Произведя в (14) замену переменных $q = q$, $\partial T_2/\partial \dot q = (E + A)\dot q = p$, приходим к системе

$$dq/dt = \partial H/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H/\partial q + G(E + A)^{-1} p, \tag{16}$$

$$H = (\|p\|^2 + p^T Bp)/2 + \Pi(q) = h = \text{const}, \quad G = (g_{ij}) = (\partial f_i/\partial q_j - \partial f_j/\partial q_i).$$

На основании (15) уравнения (16) допускают на множестве типа Λ_m представление в виде $dq/dt = \partial H/\partial p$, $dp/dt = -\partial P_m/\partial q + o(\|q\|^{m-1+\alpha})$, позволяющем воспользоваться далее схемой доказательства теоремы 2.

Теорема 3 является достаточным критерием обращения теоремы Рауса (см. [6]).

В отношении теоремы 3 также имеет место замечание 1, но с тем отличием, что существование траекторий системы (16), примыкающих к точке $q = p = 0$ при $t \to \infty$, следует из применения указанной выше схемы к системе с лагранжианом $L = T_2 - T_1 - \Pi$ (что объясняется необратимостью системы (14) по отношению к t).

Замечание 3. Приложение теоремы 3 особенно просто, когда $P_m = \Pi_m$, и форма Π_m в точке $q = 0$ не имеет минимума, поскольку в этом случае с учетом п. 1 всегда выполняются условия 1)—5).

1. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssatze von Lagrange — Dirichlet und Routh.— Arch. Rat. Mech. and Anal., 1971, 42, N 4, S. 281—316.
2. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения : Работы по аналитической механике.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 535 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М., Л. : ОНТИ, 1935.— 386 с.
5. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики.— Докл. АН СССР, 1982, 263, № 2, с. 285—289.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников.— М. : ВЦ АН СССР, 1967.— 141 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 10.11.83