УДК 517.946

А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений

В настоящей заметке с помощью матрицы Грина строится решение неоднородной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений с данными из достаточно широких пространств обобщенных функций.

Пусть Ω — область в R^n, ограниченная замкнутой поверхностью S класса C^∞; $D(\overline{\Omega})$ и $D(S)$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ и на S соответственно. В $\overline{\Omega}$ рассматривается эллиптическая по Петровскому система дифференциальных уравнений

$$L(x, D)\, u \equiv (L_{ij}(x, D))_{i,j=1,\ldots,p}\, u = F, \tag{1}$$

$$L_{ij}(x, D) = \sum_{|\mu| \leqslant t_j} a_\mu^{ij}(x)\, D^\mu, \quad a_\mu^{ij}(x) \in D(\overline{\Omega}), \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

$$D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}, \quad D_k^{\mu_k} = (-i\partial/\partial x_k)^{\mu_k}, \quad t_1 + t_2 + \ldots + t_p = 2m,$$

на S задано m граничных условий

$$B(x, D)\, u \equiv (B_{hj}(x, D))_{\substack{h=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}\, u = G \tag{2}$$

с коэффициентами из $D(S)$.

Считаем матрицу $B(x, D)$ $T = (t_1, \ldots, t_p)$-нормальной [1], т. е. такой, что ее можно дополнить до матрицы Дирихле порядка T. Пусть матрица $C(x, D)$ дополняет $B(x, D)$ до такой матрицы. Тогда существуют [1] матрицы $\hat{B}(x, D)$, $\hat{C}(x, D)$ такие, что для любых вектор-функций u, v с элементами из $D(\overline{\Omega})$ имеет место формула Грина

$$\int_\Omega v'(x)\, Lu(x)\, dx + \sum_{h=1}^{m} \int_S \hat{C}_h v(x)\, B_h u(x)\, dS = \int_\Omega (L^* v(x))' u(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m} \int_S \hat{B}_h v(x)\, C_h u(x)\, dS.$$

Здесь $L^* = L^*(x, D)$ — оператор, формально сопряженный к оператору $L = L(x, D)$; B_h, $\hat{B}_h$, C_h, $\hat{C}_h$ — строки матриц B, $\hat{B}$, C, $\hat{C}$ соответственно, коэффициенты этих матриц — функции из $D(S)$. Предполагаем, что задача (1), (2) эллиптическая [2, 3].

Пусть $[D(S)]^p$, $[D(\overline{\Omega})]^p$ — пространства вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ с элементами φ_j из $D(S)$ и $D(\overline{\Omega})$ соответственно; $[X(\overline{\Omega})]^p = \{\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p : \hat{B}\varphi|_S = 0\}$; $[Z(\overline{\Omega})]^p$ — произвольное функциональное пространство, удовлетворяющее условию $[X(\overline{\Omega})]^p \subset [Z(\overline{\Omega})]^p \subset [D(\overline{\Omega})]^p$; $[D'(S)]^p$, $[D'(\overline{\Omega})]^p$, $[Z'(\overline{\Omega})]^p$ — пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных вектор-функций) на $[D(S)]^p$, $[D(\overline{\Omega})]^p$, $[Z(\overline{\Omega})]^p$ соответственно; $\langle \varphi, F\rangle$ — действие обобщенной вектор-функции $F \in [D'(S)]^p$ на вектор-функцию $\varphi \in [D(S)]^p$, (φ, F) — действие $F \in [D'(\overline{\Omega})]^p$ $(F \in [Z'(\overline{\Omega})]^p)$ на $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$ $(\varphi \in [Z(\overline{\Omega})]^p)$.

Постановка задачи. Пусть $F \in [Z'(\overline{\Omega})]^p$, $G \in [D'(S)]^m$. Найти в Ω решение системы (1), удовлетворяющее условию (2).

Считаем вектор-функцию $u \in [D'(\overline{\Omega})]^p$ решением задачи (1), (2), если для каждой вектор-функции $\psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$ выполнено соотношение

$$(L^*\psi, u) = (\psi, F) + \langle \hat{C}\psi, G\rangle. \tag{3}$$

Пусть N — ядро задачи (1), (2), $\{\tilde{u}_h(x)\}_{k=1}^r$ — полная система линейно независимых вектор-функций из N такая, что

$$\int_\Omega \tilde{u}'_k \tilde{u}_j dx = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \qquad \tilde{u}_k(x) \in [D(\overline{\Omega})]^p, \quad k, j = 1, \ldots, r,$$

$\{\psi_h(x)\}_{k=1}^l$ — полная система линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений $L^*\psi = 0$ в пространстве $[X(\overline{\Omega})]^p$ такая, что

$$\overline{\psi}_k \overline{\psi}_j \equiv \int_\Omega \psi_k \psi_j dx + \int_S (\hat{C}\psi_k)' (\hat{C}\psi_j)\, dS = \delta_{kj} \ (\overline{\psi}_k = (\psi_{k1}, \ldots, \psi_{kp}, \hat{C}_1\psi_k, \ldots, \hat{C}_m\psi_k)).$$

Подставляя в соотношение (3) вектор-функции $\psi_k(x)$ вместо $\psi(x)$, получаем

$$(\psi_k, F) + \sum_{=1}^{m} \langle C_h\psi_k, G_k\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, l. \tag{4}$$

Это необходимое условие разрешимости задачи (1), (2). Его еще можно записать в виде $(\Psi, F) + \langle \hat{C}\Psi, G\rangle = 0$, где $\Psi(x)$ — матрица из вектор-функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_l(x)$, $(\Psi, F) = \begin{pmatrix} (\psi_1, F) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\psi_l, F) \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Решение обобщенной граничной задачи* (1), (2) *единственное в пространстве* $[D'(\overline{\Omega})]^p/\mathrm{N}$.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 — два решения задачи, $u - u_1 - u_2$. Тогда из (3) имеем

$$(L^*\psi, u) = 0 \quad \forall \psi \in [X(\overline{\Omega})]^p. \tag{5}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: $L^*\psi(x) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$, $\hat{B}\psi|_S = 0$, $\varphi(x) \in [D(\overline{\Omega})]^p$. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega \varphi'(x)\, \tilde{u}_h(x)\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что для каждой $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, удовлетворяющей условию (6), $(\varphi, u) = 0$. Найдем (φ, u) для произвольной $\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$. Легко проверить, что вектор-функция $\varphi_0(x) = \varphi(x) - \sum_{k=1}^{r} \int_\Omega \varphi'(y)\,\tilde{u}_k(y)\,dy \cdot \tilde{u}_k(x)$ из $[D(\overline{\Omega})]^p$ удовлетворяет условию (6), поэтому $\forall \varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$

$$(\varphi, u) = \left(\varphi_0 + \sum_{k=1}^{r} \int_\Omega \varphi' \tilde{u}_k dy \cdot \tilde{u}_k,\ u\right) = \sum_{k=1}^{r} \int_\Omega \varphi' \tilde{u}_k dy\, (\tilde{u}_k, u) = \left(\varphi,\ \sum_{k=1}^{r} c_k \tilde{u}_k\right),$$

$c_1, \ldots, c_r$ — постоянные. Это значит, что $u = u_1 - u_2 = \sum_{k=1}^{r} c_k \tilde{u}_k$ в пространстве $[D'(\overline{\Omega})]^p$.

Пусть $\Gamma^0(x, y)$ $(x, y \in \overline{\Omega})$, $\Gamma(x, y)$ $(x \in \overline{\Omega},\ y \in S)$ — такие матрицы, что для произвольных вектор-функций $f \in [D(\overline{\Omega})]^p$, $g \in [D(S)]^m$ решение задачи $Au = \bar{f} - \overline{P}\bar{f}$, $Pu = 0$, где

$$A = (L, B), \quad \bar{f} = (f, g), \quad \overline{P}\bar{f} = \sum_{k=1}^{l} (\bar{f}\bar{\psi}_k)\,\bar{\psi}_k(x), \quad Pu(x) = \sum_{k=1}^{r} \int_\Omega \tilde{u}_k'(y) u(y) dy \cdot \tilde{u}_k(x),$$

имеет вид

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma^0(x, y)\, f(y)\, dy + \int_S \Gamma(x, y)\, g(y)\, dS.$$

Матрицу $(\Gamma^0(x, y), \Gamma(x, y))$ назовем матрицей Грина задачи (1), (2), следуя работам, посвященным доказательству существования и исследованию свойств вектор-функции Грина для эллиптических уравнений порядка $2m$ [4, 5] и матрицы Грина для систем, эллиптических по Даглису — Ниренбергу [6—9].

Из определения матрицы Грина следует

$$\begin{aligned} L(x, \partial/\partial x)\,\Gamma^0(x, y) &= \delta(x-y)\,E_p - \Psi(x)\Psi'(y), \quad x, y \in \overline{\Omega}, \quad L(x, \partial/\partial x)\Gamma(x, y) = \\ &= -\Psi(x)\,(\hat{C}(y, \partial/\partial y)\,\Psi(y))', \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in S, \quad B(x, \partial/\partial x)\,\Gamma^0(x, y) = \\ &= -\hat{C}(x, \partial/\partial x)\,\Psi(x)\,\Psi'(y), \quad x \in S, \quad y \in \overline{\Omega}, \quad B(x, \partial/\partial x)\,\Gamma(x, y) = \\ &= \hat{\delta}(x-y)\,E_m - \hat{C}(x, \partial/\partial x)\,\Psi(x)\,(\hat{C}(y, \partial/\partial y)\,\Psi(y))', \quad x, y \in S, \\ &\int_\Omega \tilde{U}'(x)\,\Gamma^0(x, y)\,dx = 0, \qquad \int_\Omega \tilde{U}'(x)\,\Gamma(x, y)\,dx = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где E_p — единичная матрица порядка p, $(\varphi(x), \delta(x-y)) = \varphi(y)$ $\forall \varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$, $\langle \varphi(x), \hat{\delta}(x-y)\rangle = \varphi(y)$ $\forall \varphi \in [D(S)]^p$, $\tilde{U}(x)$ — матрица из вектор-функций $\tilde{u}_1(x), \ldots, \tilde{u}_r(x)$.

Теорема 2. *Пусть обобщенные вектор-функции $F \in [Z'(\overline{\Omega})]^p$, $G \in [D'(S)]^m$ удовлетворяют условию* (4). *Тогда вектор-функция $u \in [D'(\overline{\Omega})]^p$, определяемая следующим образом*:

$$(\varphi, u) = \left(\int_\Omega \Gamma^{0\prime}(x, y)\,\varphi(x)\,dx,\ F\right) + \left\langle \int_\Omega \Gamma'(x, y)\,\varphi(x)\,dx,\ G\right\rangle \quad \forall \varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p, \tag{8}$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство. Используя основные свойства матрицы Грина, можно показать, что $\forall \varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p$ $\int_\Omega \Gamma^{0\prime}(x, y)\,\varphi(x)\,dx \in [D(\overline{\Omega})]^p$, $\int_\Omega \Gamma'(x, y) \times \varphi(x)\,dx \in [D(S)]^m$, а $\forall \psi \in [X(\overline{\Omega})]^p$

$$\int_\Omega \Gamma^{0\prime}(x, y)\,L^*\psi(x)\,dx = \psi(y) - \Psi(y)\left[\int_\Omega \Psi'(x)\,\psi(x)\,dx + \int_S (\hat{C}\Psi(x))'\,\hat{C}\psi(x)dS\right], \tag{9}$$

$$\int_\Omega \Gamma'(x, y)\,L^*\psi(x)dx = \hat{C}\psi(y) - \hat{C}\Psi(y)\left[\int_\Omega \Psi'(x)\,\psi(x)\,dx + \int_S (\hat{C}\Psi(x))'\,\hat{C}\psi(x)dS\right]. \tag{10}$$

Из формулы (9) следует $\forall\psi\in[X(\overline{\Omega})]^p \int\limits_{\Omega}\Gamma^{0\prime}(x,y)\,L^*\psi(x)\,dx\in[X(\overline{\Omega})]^p$. Отсюда, как при доказательстве теоремы 1, заключаем, что для каждой $\varphi_0(x)\in[D(\overline{\Omega})]^p$, удовлетворяющей условию (6), $\int\limits_{\Omega}\Gamma^{0\prime}(x,y)\,\varphi_0(x)\,dx\in[X(\overline{\Omega})]^p$.

Дальше, используя для каждой $\varphi\in[D(\overline{\Omega})]^p$ представление $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\tilde{U}(x)\int\limits_{\Omega}\tilde{U}'(y)\,\varphi(y)\,dy$ и предпоследнюю из формул (7), получаем $\int\limits_{\Omega}\hat{B}(y,\partial/\partial y)\times\Gamma^{0\prime}(x,y)\,\varphi(x)\,dx=0$, а значит, $\forall\varphi\in[D(\overline{\Omega})]^p\int\limits_{\Omega}\Gamma^{0\prime}(x,y)\,\varphi(x)\,dx\in[X(\overline{\Omega})]^p\subset[Z(\overline{\Omega})]^p$.

Таким образом, формулой (8) однозначно определена обобщенная вектор-функция $u\in[D'(\overline{\Omega})]^p$ для произвольных $F\in[Z'(\overline{\Omega})]^p$, $G\in[D'(S)]^m$. Остается показать, что u удовлетворяет условию (3), т. е. $\left(\int\limits_{\Omega}\Gamma^{0\prime}(x,y)\times L^*\psi(x)\,dx,F\right)+\langle\int\limits_{\Omega}\Gamma'(x,y)\,L^*\psi(x)\,dx,G\rangle=(\psi,F)+\langle\hat{C}\psi,G\rangle\quad\forall\psi\in[X(\overline{\Omega})]^p$. Это следует из формул (9), (10) и (4).

Утверждения доказанных теорем аналогичны соответствующим результатам работ [6, § 3; 10, формулы (61), (70)], в которых решения задачи (1), (2) изучаются в нормированных пространствах обобщенных функций и другими методами. Формула (8) обобщает формулу (3.4) из [6].

Используя результаты работ [7] и [11], полученные в настоящей заметке результаты можно перенести на случай граничной матрицы $B(x,\partial/\partial x)$, не являющейся T-нормальной.

1. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем.— Успехи мат. наук, 1967, **22**, вып. 5, с. 181—182.
2. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.— Мат. сб., 1965, **68**, № 3, с. 373—416.
3. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса и Л. Ниренберга. I.—Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, **28**, № 3, с. 665—706.
4. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 5, с. 3—32.
5. *Красовский Ю. П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, **33**, с. 109—137.
6. *Коваленко И. А., Ройтберг Я. А.* О граничных значениях обобщенных решений эллиптических систем.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 3, с. 308—319.
7. *Коваленко И. А., Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Функция Грина общих неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Даглису — Ниренбергу.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 664—668.
8. *Солонников В. А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. I. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1970, **110**, с. 107—145.
9. *Солонников В. А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. II.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1971, **116**, с. 181—216.
10. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения.— Мат. сб., 1969, **78**, № 3, с. 446—472.
11. *Коваленко И. А.* Некоторые применения теоремы о полном наборе гомеоморфизмов для эллиптических по Петровскому систем.— В кн.: Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1973, с. 44—56.

Львов. гос. ун-т

Поступила 11.10.83