УДК 513.88

*А. И. Вейцблит*

# Об одном свойстве граничного спектра неотрицательных операторов

Рассмотрим $n$-мерное вещественное пространство $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, снабженное замкнутым телесным конусом $K$ и, таким образом, являющееся пространством Канторовича («$K$-пространством»). Пусть $A$ — неотрицательный линейный оператор: $A \geqslant 0 \Leftrightarrow AK \subset K$. Умножение $A$ на положительную константу не выводит из множества неотрицательных линейных операторов; поэтому при изучении природы спектра достаточно ограничиться классом неотрицательных операторов со спектральным радиусом, равным единице. Всюду в дальнейшем под словами «неотрицательный оператор» будем подразумевать неотрицательный линейный оператор со спектральным радиусом, равным единице.

Часть спектра оператора $A \geqslant 0$, лежащая на единичной окружности, называется граничным спектром. Будем говорить, что данное $K$-пространство обладает свойством $F$, если для каждого оператора $A \geqslant 0$ граничный спектр рационален в том смысле, что все его точки — натуральные корни из единицы (ср. [2]). Свойство $F$ было впервые обнаружено, по-видимому, Фробениусом [3] и сыграло важную роль в его теории неотрицательных матриц.

По поводу использованных в статье понятий и фактов см., например, [1].

Оператор $A \geqslant 0$ называется неразложимым, если для любых $v \in K$, $f \in K$ найдется такое натуральное $N = N(v, f)$, что $f(A^N v) > 0$. Отметим некоторые свойства неразложимых операторов.

Лемма 1. *Полугруппа степеней неразложимого оператора ограничена.*

Лемма 2. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *оператор* $A \geqslant 0$ *неразложим*; 2) *пространство* $\mathbb{W}$ *неподвижных векторов оператора* $A$ *одномерно и имеет общий луч с внутренностью конуса, а пересечение дополнительного к* $\mathbb{W}$ *спектрального подпространства оператора* $A$ *с конусом* $K$ *равно нулю.*

Если для каждого неотрицательного оператора, полугруппа степеней которого ограничена, граничный спектр рационален, то будем говорить, что $K$-пространство обладает свойством $F_1$. Рациональность граничного спектра всех неразложимых операторов назовем свойством $F_2$. По лемме 1 $F_2$ следует из $F_1$.

Следующая теорема получена автором совместно с Ю. И. Любичем. Близкое достаточное условие было указано в [4].

Теорема 1. *Для того чтобы $K$-пространство обладало свойством $F_1$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало трехмерного проектора $P \geqslant 0$ такого, что $K \cap \operatorname{Im} P$ — евклидов конус (т. е. $P$, $K$ задаются уравнением $\xi_1 \geqslant \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}$ в некоторой системе координат подпространства* $\operatorname{Im} P$).

Теорема 2. *Для того чтобы $K$-пространство обладало свойством $F_2$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало трехмерного проектора $P \geqslant 0$ такого, что $K \cap \operatorname{Im} P$ — евклидов конус и* $\operatorname{Ker} P \cap K = \{0\}$.

Для сжатий конечномерных нормированных пространств критерий рациональности граничного спектра, аналогичный теореме 1, был получен в [2].

Можно было бы поставить вопрос о геометрическом критерии рациональности граничного спектра в классе линейных операторов, порождающих ограниченную полугруппу степеней, для которых инвариантно заданное выпуклое тело. Ответ на этот вопрос мы уже имеем для шара (определяющего норму) и конуса (определяющего порядок). Возможность дальнейшего обобщения этих результатов ограничивает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $V$ — замкнутое выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, не содержащее подпространств и обладающее таким свойством: на любое одномерное подпространство имеется инвариантный относительно $V$ проектор.*

*Тогда* I) *если тело содержит нулевой вектор внутри, то это тело — единичный шар для некоторой нормы;* II) *если $V$ содержит нулевой вектор на границе, то оно является телом одного из следующих типов:* 1) *конусом;* 2) *пересечением конуса с шаром;* 3) *пересечением конуса с цилиндром, образующая которого параллельна некоторому граничному лучу конуса.*

Исследуем свойство $F$, т. е. рациональность граничного спектра всех $A \geqslant 0$. Как заметил Ю. И. Любич, из классической теоремы Фробениуса можно вывести такое следствие.

Теорема 3. *Если конус $K$ многогранный (т. е. задается конечной системой неравенств $f_i(x) \geqslant 0$, где $f_i$ — линейные функционалы), то $K$-пространство обладает свойством $F$.*

В доказательстве используется разложение неотрицательной матрицы в полупрямую сумму неразложимых (см. [3]). Возникает вопрос о возможности аналогичного разложения в произвольном $K$-пространстве. Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицателен.

Лемма 3. *Подпространство неподвижных векторов оператора $A \geqslant 0$, порождающего неограниченную полугруппу степеней, не пересекается с внутренностью конуса.*

Исходя из этого, можно было бы попытаться отщепить неподвижный вектор $v_0 \geqslant 0$ путем факторизации по подпространству $\langle v_0 \rangle$. Однако здесь возникает препятствие в виде гладкости границы конуса $K$.

Предложение 2. *Пусть $tv_0$, $t \geqslant 0$, — крайний луч конуса $K$, $d$ — метрика, определяемая какой-нибудь нормой в $\mathbf{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *найдется вектор $v \neq v_0$, опорный к конусу $K$ в точке $v_0$ и такой, что $\lim\limits_{s\to 0} d(v_0 + sv, K)/s = 0$;* 2) *замыкание образа $K$ при факторизации по подпространству $\langle v_0 \rangle$ содержит ненулевое подпространство (и, таким образом, не является конусом).*

Теорема 4. *Пусть $n > 5$. Если на границе конуса $K$ существует точка, в окрестности которой граница конуса локально задается уравнением класса гладкости $C^4$ и вторая квадратичная форма границы имеет максимальный ранг $(r = n - 2)$, то $K$-пространство не обладает свойством $F$.*

При $n = 4$ теорема 4 неверна. При $n = 5$ вопрос остается открытым

Теорема 4 выводится из следующего утверждения, характеризующего свойство $F$ в терминах геометрии конуса.

Теорема 5. *Пусть $v_0 \neq 0$ принадлежит границе конуса $K$ и вторая квадратичная форма границы в окрестности $v_0$ имеет максимальный ранг. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *существует оператор $A \geqslant 0$, для которого граничный спектр не рационален, полугруппа степеней не ограничена и $Av_0 = v_0$;* 2) *существует такое трехмерное аффинное подпространство $L$, проходящее через $v_0$ и не содержащее нуля, что в точке $v_0$ равен нулю третий дифференциал функции, определяющей двумерную поверхность — границу тела $L \cap K$.*

Из теоремы 4, в частности, следует, что для конусов с границей класса гладкости $C^4$ не существует разложения неотрицательных операторов в полупрямую сумму неразложимых. В самом деле, допустим, что любой оператор $A \geqslant 0$ можно представить в виде полупрямой суммы неотрицательных операторов, порождающих ограниченные полугруппы степеней. Тогда в силу теоремы 1 для $K$-пространств с конусом «общего вида» должно было бы выполняться свойство $F$, что, однако, противоречит теореме 4.

Другим следствием теоремы 4 является вывод о том, что свойство $F$ обязательно связано с наличием у конуса граней, т. е. неодномерных пересечений с опорными гиперплоскостями.

Следствие 1. *Если $n > 5$ и в $K$-пространстве выполняется свойство $F$, то каждая точка границы конуса $K$, в окрестности которой уравнение границы имеет класс гладкости $C^4$, принадлежит некоторой грани.*

С л е д с т в и е 2. *Если* $n > 5$ *и граница конуса* $K$ *в окрестности каждой точки, отличной от нуля, описывается уравнением класса* $C^4$, *то в* $K$-*пространстве свойство* $F$ *не выполняется.*

1. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ.— М. : Наука, 1969.— 475 с.
2. *Любич Ю. И.* О граничном спектре сжатий в пространствах Минковского.— Сиб. мат. журн., 1970, **11**, № 2, с. 358—369.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
4. *Красносельский М. А.* Об одном спектральном свойстве линейных вполне непрерывных операторов в пространстве непрерывных функций.— В кн.: Проблемы математического анализа сложных систем. Воронеж, 1968, вып. 2, с. 68—71.

Физ.-техн. ин-т низких температур, Харьков
Поступила 11.01.84