УДК 517.9

Ю. И. Петунин, В. Д. Погребной

Некоторые вопросы вложения фактор-пространств и банаховых алгебр

Банахово пространство E_1 называется алгебраически вложенным в банахово пространство E_0, если существует инъективный алгебраический гомоморфизм $j: E_1 \to E_0$, действующий из E_1 в E_0. Отображение j называется оператором вложения, а про банахово пространство E_1 говорят, что оно алгебраически вложено в E_0 с помощью оператора вложения j. Если оператор вложения j непрерывен, то банахово пространство E_1 называется топологически вложенным в E_0. Пусть банахово пространство E_1 алгебраически вложено в E_0; тогда E_1 алгебраически изоморфно векторному подпространству

$E_{01} = j(E_1) \subset E_0$; кроме того, в E_{01} можно ввести топологию τ_{10}, порожденную нормой пространства $E_1 : \| x' \|_{E_{01}} = \| j^{-1}(x') \|_{E_1}$, $x' \in E_{01}$, поэтому ради краткости будем иногда отождествлять образ $j(E_1)$ пространства E_1 в E_0 с самим пространством $E_1 : E_{01} = j(E_1)$ и писать $E_1 \subset E_0$. На векторном пространстве E_1 аналогичным образом вводится топология τ_{01}, индуцированная нормой $E_0 : \| x \|^* = \| j(x) \|_{E_0}$, $x \in E_1$. Легко видеть, что в случае топологического вложения E_1 в E_0 топология τ_1 пространства E_1 мажорирует топологию τ_{01}: $\tau_1 \geqslant \tau_{01}$.

Пусть банахово пространство E_1 нормально вложено в E_0 [1, с. 10]; напомним, что E_1 называется родственным (почти родственным) с E_0, если единичный шар $S_1(E_1)$ пространства E_1 замкнут в топологии τ_{01} (замыкание $S_1(E_1)$ в топологии τ_{01} является ограниченным множеством в метрике пространства E_1) [2, с. 125]. Для некоторых специальных типов банаховых пространств установим: 1) при каких условиях из алгебраического вложения следует топологическое; 2) будут ли E_1 и E_0 почти родственными, если банахово пространство E_1 нормально вложено E_0.

Предположим, что E_1 топологически вложено в E_0 и M_1 — замкнутое подпространство E_1, M_0 — замыкание множества $j(M_1)$ в пространстве E_0 и E_i/M_i, $i = 0, 1,$ — фактор-пространство E_i по подпространству M_i. Рассмотрим естественное отображение $\tau_j : E_1/M_1 \to E_0/M_0$, определяемое следующим образом: если $\hat{x} = x \oplus M_1 \in E_1/M_1$, то $\tau_j(\hat{x}) = x \oplus M_0 \in E_0/M_0$.

Теорема 1. *Отображение $\tau : E_1/M_1 \to E_0/M_0$ является оператором топологического вложения банахова пространства E_1/M_1 в E_0/M_0 тогда и только тогда, когда множество M_1 замкнуто в линейном нормированном пространстве (E_1, τ_{01}).*

Доказательство. Необходимость. Пусть τ_j — оператор топологического вложения фактор-пространства E_1/M_1 в E_0/M_0. Предположим противное: замыкание M_{01} подпространства M_1 в топологии τ_{01} не совпадает с M_1. Пусть произвольный элемент $x \in M_{01}$, но $x \bar{\in} M_1$; тогда $\hat{x} = x \oplus M_1 \neq \hat{\theta}$. Поскольку $M_{01} \subset M_0$, то $x \in M_0$. Поэтому $\tau_j(\hat{x}) = x \oplus M_0$ является нулевым фактор-классом в фактор-пространстве E_0/M_0, что противоречит инъективности отображения τ_j.

Достаточность. Легко видеть, что в любом случае отображение τ_j — непрерывный алгебраический гомоморфизм. Покажем, что оно инъективно. В самом деле, пусть $\hat{x} = x \oplus M_1$ — произвольный элемент из E_1/M_1. Если $\tau_j(\hat{x})$ есть нулевой элемент фактор-пространства E_0/M_0, то $x \in M_0$. Так как $x \in E_1$, то $x \in M_{01} = M_1$. Поэтому $\hat{x} = x \oplus M_1$ — нулевой элемент фактор-пространства E_1/M_1. Теорема доказана.

Заметим, что условия теоремы 1 не всегда выполняются: если $f(x) \in E_1$, но $f(x) \bar{\in} E_0'$ [3, с. 48], то подпространство $M_1 = \{x : f(x) = 0\}$ не замкнуто в (E_1, τ_{01}). С другой стороны, в случае замкнутости множества $j(M_1)$ в E_0 заключение теоремы 1 оказывается справедливым.

Теорема 2. *Пусть $E_0 \supset E_1$ — родственные нормально вложенные банаховы пространства и M — подпространство E_1, замкнутое в пространстве E_0. Тогда фактор-пространства E_0/M и E_1/M — почти родственные нормально вложенные банаховы пространства.*

Доказательство этого утверждения проведем методом от противного. Предположим, что пространства $E_1/M \subset E_0/M$ не являются почти родственными. Тогда в фактор-пространстве E_1/M существует такая последовательность элементов $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \ldots$, что $\| \hat{a}_n \|_{E_1/M} > n$ и $\hat{a}_n$ принадлежит замыканию $\bar{\hat{S}}_1$ единичного шара $\hat{S}_1$ пространства E_1/M по норме пространства E_0/M [4, теорема 3.3]. Так как $\hat{a}_n \in \bar{\hat{S}}_1$, то найдется последовательность $\{\hat{x}_m^{(n)}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $\hat{x}_m^{(n)} \in \hat{S}_1$, для которой

$$\| \hat{a}_n - \hat{x}_m^{(n)} \|_{E_0/M} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{1}$$

С другой стороны, $\|\hat{a}_n\|_{E_0/M} < 1$, поэтому отсюда и из соотношения (1) следует, что можно выбрать элементы $a_n \in \hat{a}_n$ и $x_m^{(n)} \in \hat{x}_m^{(n)}$ так, что $\|a_n\|_{E_0} < 1$, $\|x_m^{(n)}\|_{E_1} < 1$ и

$$\inf_{y\in M} \|a_n - x_m^{(n)} + y\|_{E_0} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{2}$$

Условие (2) означает, что в метрике пространства E_0 расстояние между подпространством M и единичным шаром $S_1(a_n)$ пространства E_1 с центром в точке a_n равно нулю.

Обозначим через $S_1^{M_i}$ множество элементов x подпространства M с нормой $\|x\|_{E_i} \leqslant 1$, $i = 0, 1$. В силу предыдущего норма $\|y\|_{E_0}$ элемента $y \in S_1(a_n)$ не превосходит 2, поэтому

$$\rho_0(M, S_1(a_n)) = \rho_0(S_1(a_n), 2S_1^{M_0}) = 0, \tag{3}$$

где ρ_0 — расстояние в метрике пространства E_0.

На подпространстве M нормы $\|\ \|_{E_0}$ и $\|\ \|_{E_1}$ эквивалентны, поэтому существует такая константа $C > 0$ (не зависящая от n), что

$$CS_1^{M_1} \supset 2S_1^{M_0}. \tag{4}$$

Пусть S_1 — единичный шар пространства E_1; в силу соотношений (3) и (4) $\rho_0(CS_1, S_1(a_n)) = 0$, или

$$\rho_0(S_1, C^{-1}S_1(a_n)) = 0. \tag{5}$$

Выберем число n так, чтобы $C^{-1}\|a_n\|_{E_1} > 2$, и пусть $b_n = C^{-1}a_n$; на основании равенства (5) $\inf\limits_{\|z\|_{E_1} = \|y\|_{E_1} \leqslant 1} \|b_n + y - z\|_{E_0} = 0$, или $\inf\limits_{y,z\in S_1} \|b_n/2 + (y - z)/2\|_{E_0} = 0$; мы получаем, таким образом, что элемент $b_n/2$ с нормой $\|b_n/2\|_{E_1} > 1$ принадлежит замыканию единичного шара S_1 в метрике пространства E_0. Последнее утверждение противоречит родственности пространств E_1 и E_0. Теорема доказана.

Замечание 1. Если пространство E_1 рефлексивно, то фактор-пространство E_1/M также рефлексивно [3, гл. IV, § 5, предложение 11], поэтому E_1/M будет родственным с пространством E_0/M [4, теорема 3.2].

Пусть E_1 и E_0 — банаховы алгебры; определение алгебраического вложения банаховой алгебры E_1 в E_0 формально остается точно таким же, как и в случае банаховых пространств, однако при этом нужно учитывать, что инъективный алгебраический гомоморфизм j, о котором идет речь в определении алгебраически вложенных банаховых пространств, сохраняет не только операции сложения и умножения на скаляр, но и операцию умножения элементов банаховой алгебры. Оператор j называется оператором вложения E_1 в E_0; если j непрерывен, то говорят, что банахова алгебра E_1 топологически вложена в E_0.

В теории банаховых алгебр очень важна проблема автоматической непрерывности алгебраических гомоморфизмов [5, 6]: говорят, что для банаховых алгебр E и F выполняется условие автоматической непрерывности гомоморфизмов, если всякий алгебраический гомоморфизм, действующий из E в F, будет непрерывным; в случае, когда всякий инъективный алгебраический гомоморфизм, отображающий E в F, будет непрерывным, говорят, что для алгебр E и F выполняется условие автоматической непрерывности инъективных гомоморфизмов. Условие автоматической непрерывности инъективных гомоморфизмов связано с проблемой топологического вложения алгебраически вложенных банаховых алгебр. Действительно, если $E_1 \subset E_0$ — алгебраически вложенные банаховы алгебры, обладающие свойством автоматической непрерывности инъективных гомоморфизмов, то E_1 топологически вложено в E_0, и обратно: если для алгебр из условия алгебраического вложения E_1 в E_0 следует их топологическое вложение, то алгебры E_1 и E_0 обладают условием автоматической непрерывности инъективных гомоморфизмов. В связи с этим исследуем проблему топологического вложения алгебраически вложенных банаховых алгебр. Хорошо известно

[7, с. 302], что всякая коммутативная банахова алгебра E_1, алгебраически вложенная в полупростую коммутативную банахову алгебру E_0, является топологически вложенной в E_0; другие аналогичные результаты получены для алгебры степенных рядов и некоторых специальных типов банаховых алгебр.

Обозначим через Δ_i множество характеров (мультипликативных линейных функционалов), определенных на банаховой алгебре E_i, $i = 0, 1$, а через $\operatorname{rad} E$ — радикал алгебры E [7, с. 297.]

Теорема 3. *Пусть коммутативная банахова алгебра E_1 алгебраически вложена в коммутативную банахову алгебру E_0, $E_1 \cap \operatorname{rad} E_0 = \{\theta\}$ и замыкание $\overline{S_1(E_1)}$ единичного шара пространства E_1 в топологии τ_0 пространства E_0 содержится в E_1. Тогда алгебра E_1 топологически вложена в E_0.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность элементов $\{x_n\}$ из E_1, которая сходится к нулю в метрике пространства E_1 и к элементу $y \in E_0$ в метрике пространства E_0. Без ограничения общности можно считать, что $\{x_n\} \subset S_1(E_1)$. Тогда $y \in \overline{S_1(E_1)}$, и в силу условий теоремы $y \in E_1$. Так как характеры $h \in \Delta_i$, $i = 0, 1$, непрерывны в норме пространства E_i, то $h(x_n) \to 0$ $\forall h \in \Delta_1$ и $h(x_n) \to h(y)$ $\forall h \in \Delta_0$. Далее, для любого $h \in \Delta_0$ $h(y) = 0$, поэтому $y \in \operatorname{rad} E_0$. Отсюда следует $y \in E_1 \cap \operatorname{rad} E_0$, так что $y = \theta$. Из последнего вытекает, в силу теоремы о замкнутом графике, что оператор вложения j непрерывен. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — алгебраически вложенные коммутативные банаховы алгебры, замыкание $\overline{S_1(E_1)}$ единичного шара пространства E_1 в топологии τ_0 пространства E_0 содержится в E_1 и (E_1, E_0) — винеровская пара* [8, с. 242], *причем алгебра E_1 полупроста. Тогда банахова алгебра E_1 топологически вложена в E_0.*

Доказательство. Так как (E_1, E_0) — винеровская пара, то спектральные радиусы элемента $x \in E_1$ в пространствах E_1 и E_0 совпадают, т. е. $\sup_{h \in \Delta_0} |h(x)| = \sup_{h \in \Delta_1} |h(x)|$.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем $y \in \operatorname{rad} E_0$. Следовательно, $\sup_{h \in \Delta_0} |h(x)| = 0$ и $\sup_{h \in \Delta_1} |h(x)| = 0 \Rightarrow h(y) = 0 \quad \forall \quad h \in \Delta_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in \operatorname{rad} E_1 \Rightarrow y = \theta$. В силу теоремы о замкнутом графике отсюда вытекает непрерывность оператора вложения j. Теорема доказана.

Теоремы 3 и 4 можно обобщить на некоторый класс коммутативных топологических алгебр, так называемых p-банаховых алгебр, т. е. полных локально ограниченных алгебр [9]. Это возможно потому, что множество характеров Δ таких алгебр обладает всеми необходимыми для доказательства этих более общих утверждений свойствами множества линейных мультипликативных функционалов. Таким образом имеет место

Теорема 5. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — алгебраически вложенные коммутативные p-банаховы алгебры, причем замыкание $\overline{S_1(E_1)}$ единичного шара пространства E_1 в топологии τ_0 пространства E_0 содержится в алгебре E_1. Выполнение какого-либо одного из условий*

1) $E_1 \cap \operatorname{rad} E_0 = \{\theta\}$;

2) (E_1, E_0) — *винеровская пара и алгебра E_1 полупроста, влечет топологическое вложение алгебры E_1 в E_0.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теорем 3 и 4.

Будем говорить, что банахова алгебра E обладает свойством автоматической непрерывности для гомоморфизмов (инъективных гомоморфизмов), если всякий алгебраический (инъективный) гомоморфизм, действующий из произвольной банаховой алгебры F в E, будет непрерывным. Как было указано, коммутативные полупростые банаховы алгебры обладают свойством автоматической непрерывности для гомоморфизмов. Однако если в алгебре E есть ненулевые нульстепенные элементы, то это утверждение о свойстве автоматической непрерывности становится несправедливым [6, с. 151], поэтому отсутствие ненулевых нульстепенных элементов есть необходимое условие автоматической непрерывности. Отсюда следует, что для банаховой алгебры, радикал которой не содержит ненулевых нульстепенных элементов, условие полупростоты и автоматической непрерывности для гомоморфизмов равносильны.

Теорема 6. *Пусть E — конечномерная коммутативная банахова алгебра с единицей. E обладает свойством автоматической непрерывности для гомоморфизмов тогда и только тогда, когда она полупроста.*

Доказательство. Как известно [10, с. 382], радикал конечномерной алгебры состоит только из нульстепенных элементов, поэтому если для банаховой алгебры E выполнено условие автоматической непрерывности, то E не может содержать ненулевых нульстепенных элементов. Следовательно, ее радикал состоит лишь из нулевого элемента, а это означает, что E полупроста. Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Замечание 2. Условие коммутативности в этой теореме весьма существенно, поскольку существуют строго полупростые некоммутативные банаховы алгебры с нульстепенным элементом [6, с. 140].

Пусть φ — алгебраический гомоморфизм, действующий из банаховой алгебры E_1 и E_0. Обозначим через $\operatorname{Ker}\varphi$ ядро этого гомоморфизма. Легко видеть, что замкнутость $\operatorname{Ker}\varphi$ является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным условием непрерывности гомоморфизма φ. Однако в некоторых случаях это условие будет и достаточным; например, если $\dim E_0 < \infty$ (доказательство этого утверждения вытекает из [7, с. 48, упр. 9]). Кроме того, имеет место теорема.

Теорема 7. *Пусть E_1 и E_0 — банаховы алгебры, причем E_0 обладает свойством автоматической непрерывности для инъективных гомоморфизмов, и φ — алгебраический гомоморфизм, действующий из E_1 в E_0. Гомоморфизм φ непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ замкнуто.*

Доказательство. Если оператор φ непрерывен, то его ядро в любом случае является, очевидно, замкнутым множеством. Поэтому представляет интерес доказать обратное утверждение. Итак, пусть $\operatorname{Ker}\varphi$ замкнуто. Рассмотрим произвольный линейный оператор φ, действующий из топологического векторного пространства X в Y; обозначим через N замкнутое подпространство, содержащееся в ядре $\operatorname{Ker}\varphi$, а через π — каноническое отображение X в фактор-пространство X/N. Как известно [7, с. 48, упр. 9], существует единственный линейный оператор f, действующий из фактор-пространства X/N в топологическое векторное пространство Y, такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd},$$

и оператор f непрерывен одновременно с φ.

Положим $X = E_1$, $Y = E_0$, $N = \operatorname{Ker}\varphi$; тогда отображение f будет инъективным алгебраическим гомоморфизмом, а E_1/N — коммутативной банаховой алгеброй. На основании условий теоремы отображение f будет непрерывным; отсюда следует, что φ непрерывно. Теорема доказана.

В работе [11] получен следующий результат о вложении полных метризуемых алгебр: пусть E_1, E_0 — вещественные полные коммутативные метризуемые алгебры и E_0 удовлетворяет условию:

$$\forall \{y_n\} \subset E_0 : y_n \neq \theta, \quad y_n \to \theta \quad \exists \{h_n\} \subset \Delta_0 : \inf_n |h_n(y_n)| = \varepsilon > 0; \tag{6}$$

тогда любой линейный оператор $T : E_1 \to E_0$ такой, что $T(x^2) = (Tx)^2$ (в частности, алгебраический гомоморфизм), непрерывен. Заметим, что в формулировке этой теоремы авторы допустили некоторые неточности. Во-первых, условие (6) в указанном виде никогда не выполняется даже в случае коммутативных банаховых алгебр (для обоснования этого утверждения достаточно рассмотреть последовательность элементов $\{y_n\}$ вида: $y_{2n-1} = y_0$, $y_{2n} = y_0/n$, $n \in N$, $y_0 \neq \theta$). Во-вторых, введение класса линейных операторов

T, удовлетворяющих условию $T(x^2) = (Tx)^2$, не приводит к обобщению понятия гомоморфизма коммутативных алгебр, поскольку всякий линейный оператор с условием $T(x^2) = (Tx)^2$ действующий из коммутативной алгебры E_1 в E_0, является алгебраическим гомоморфизмом. Действительно, положим $a = x + y$, тогда $T(a^2) = T[(x+y)^2] = T(x^2 + 2xy + y^2) = T(x^2) + 2T(xy) + T(y^2) = [T(x)]^2 + [T(y)]^2 + 2T(xy)$; $T(a^2) = [T(x + y)]^2 = [T(x)]^2 + [T(y)]^2 + 2T(x)T(y)$. Поэтому $T(xy) = T(x)T(y)$. Таким образом, в вышеуказанной теореме из [11] следует говорить об алгебраических гомоморфизмах, а условие (6) сформулировать следующим образом:

$$\forall \{y_n\} \subset E_0 : \inf_n |||y_n||| > 0 \ \exists \{h_n\} \subset \Delta_{E_0} : \inf_n |h_n(y_n)| = \varepsilon > 0, \qquad (7)$$

где $|||y|||$ — псевдонорма, порождающая топологию E_0 [12, с. 42]. Легко видеть, что свойство (7) для коммутативных банаховых алгебр эквивалентно условию $\mathrm{char}\,\Delta > 0$ [2, с. 28], поэтому свойство (7) является более сильным условием, чем полупростота E_0, что связано с более общим классом рассматриваемых в [11] алгебр.

Укажем в заключение одно интересное свойство алгебры непрерывных функций $C(\Omega)$, связанное с понятием алгебраического вложения [13, с. 347].

Теорема 8. *Пусть E_0 — коммутативная полупростая банахова алгебра, в которую алгебраически вложена алгебра $C(\Omega)$, где Ω — компактное топологическое пространство. Если $C(\Omega)$ — плотная подалгебра E_0 в топологии пространства E_0, то алгебры $C(\Omega)$ и E_0 совпадают и их нормы эквивалентны.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть Ω — произвольное компактное топологическое пространство и $C(\Omega)$ — алгебра всех непрерывных функций на Ω с нормой $\|x\|_C = \max_{t \in \Omega} |x(t)|$, $\Delta = \{h(x) = h_t(x) = x(t) \ \ \forall t \in \Omega\}$ — множество характеров алгебры $C(\Omega)$ и $M = \{t : h_t(x) = x(t)\}$ — некоторое тотальное подмножество характеров алгебры $C(\Omega)$. Тогда множество M всюду плотно в топологическом пространстве Ω.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{M}$ замыкание множества M в топологии пространства Ω. Предположим противное: $\overline{M} \neq \Omega$, тогда множество $\Omega \setminus \overline{M} = U$ не пусто. Пусть t_0 — произвольный элемент из U; положим $A = \{t_0\}$, $B = \overline{M}$. Как известно, компактное топологическое пространство Ω является нормальным [14, с. 110], поэтому, в силу леммы Урысона [15, с. 132], существует такая непрерывная функция $x(t)$, определенная на пространстве Ω, что $x(t_0) = 1$, $x(t) = 0$ $\forall t \in B = \overline{M}$. Тогда $h_t(x) = 0$ $\forall t \in M$, что противоречит тотальности множества характеров $M = \{t : h_t(x) = x(t)\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8. Обозначим $E_1 = C(\Omega)$, Δ_i — множество характеров алгебры E_i, $i = 0, 1$, Δ_{01} — сужение множества характеров Δ_0 на алгебру E_1. Как было указано, всякая алгебра E_1, алгебраически вложенная в коммутативную полупростую банахову алгебру E_0, будет топологически вложена в E_0, поэтому $C(\Omega)$ плотно вложена в алгебру E_0 [1, с. 9]: $\|x\|_{E_0} \leqslant C\,\|x\|_{E_1}$ $\forall x \in E_1$, $C > 0$. Легко видеть, что Δ_{01} — тотальное множество характеров на $E_1 = C(\Omega)$. В силу леммы 2 $\Delta_{01} = \{t : h_t(x) = x(t), \ h_t \in E_0'\}$ всюду плотно в пространстве Ω; следовательно, $\forall x \in E_1 = C(\Omega)$

$$\|x\|_{E_0} \geqslant \sup_{t \in \Delta_{01}} |h_t(x)| = \sup_{t \in \Delta_{01}} |x(t)| = \sup_{t \in \Omega} |x(t)| = \|x\|_{E_1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 8 и лемма 1 останутся справедливыми, если E_0 заменить произвольной регулярной коммутативной банаховой алгеброй.

1. *Крейн С. Г.*, *Петунин Ю. И.*, *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
2. *Петунин Ю. И.*, *Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища школа, 1980.— 216 с.
3. *Бурбаки Н.* Топологические векторныс пространства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 410 с.
4. *Крейн С. Г.*, *Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств.—Успехи мат. наук, 1966, **21**, вып. 2 (128), с. 89—168.
5. *Sinclair A. M.* Automatic continuity of linears operators.— London Math. Soc. Lecture Note Series, **21** (C. U. P., Cambridge, 1976).— 92 p.
6. *Dales H. G.* Automatic continuity: a survey—Bull. London Math. Soc., 1978, **10**, p. 129—183.
7. *Рудин* Ф. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 448 с.
8. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
9. *Zelazko W.* Metric generalizations of Banach algebras.— Rozprawy Matematycne, 1965, 47, p. 3—69.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : Конечномерные линейные пространства.— М. : Наука, 1969.— 432 с.
11. *Taqdir Husain*, *Shu-Bun Ng*. On continuity of algebra homomorphisms and uniqueness of metric topology.— Math. Z., 1974, B, **139**, N 1.
12. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971. — 359 с.
13. *Функциональный* анализ / Под редакцией С. Г. Крейна.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
14. *Бурбаки Н.* Общая топология.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 272 с.
15. *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. Т. 1.— М. : Мир, 1966.— 594 с.

Киев. гос. ун-т — Поступила 26.10.83