УДК 519.21

Н. В. Карташов (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЭРГОДИЧНОСТИ ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

We obtain a new explicit relation for the calculation of spectral index of ergodicity of birth and death process with continuous time. The calculation of index is reduced to the solution of optimization nonlinear programming problem which contains the infinitesimal matrix of the process. As an example, we use the new method for finding exact values of indices of exponential ergodicity for some Markov queuing systems.

Отримано нову явну формулу для обчислення спектрального показника ергодичності процесу народження та загибелі з неперервним часом. Обчислення показника зведено до розв'язку оптимізаційної задачі нелінійного програмування, яка містить інфінітезимальну матрицю процесу. Як приклад новим методом знайдено точні значення показників експоненціальної ергодичності для деяких марковських систем масового обслуговування.

1. Введение. Рассмотрим марковский процесс рождения и гибели X_t, $t \geq 0$, с дискретным пространством состояний $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ и непрерывным временем t. Процесс определяется своими интенсивностями рождения λ_n и гибели μ_n в состоянии n. Инфинитезимальная матрица процесса имеет вид

$$G = (g_{i,j},\ i,j \in E), \quad g_{i,i+1} = \lambda_i, \quad i \geq 0, \quad g_{i,i-1} = \mu_i, \quad i \geq 1,$$
$$g_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i), \quad i \geq 1,\ g_{0,0} = -\lambda_0, \quad g_{i,j} = 0, \quad |i-j| > 1. \tag{1}$$

При условии положительной возвратности [1] переходные вероятности процесса $p_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$ сходятся при $t \to \infty$ к стационарным вероятностям π_j. При некоторых дополнительных предположениях [2] эта сходимость является экспоненциальной:

$$p_{ij}(t) - \pi_j = O\big(\exp(-\varepsilon t)\big), \qquad t \to \infty, \tag{2}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ при всех i, j.

В данной статье исследуется неположительный показатель эргодичности как функция матрицы G:

$$e(G) = \sup_{i,j} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\left|p_{ij}(t) - \pi_j\right|. \tag{3}$$

Очевидно, что (3) совпадает с точной верхней гранью значений $-\varepsilon$ в (2).

Ван Дорн ([3], теорема 2.3.2) доказал, что для экспоненциально эргодичных процессов рождения и гибели показатель (3) совпадает со спектральным показателем эргодичности:

$$\alpha(G) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \log \|P(t) - \Pi\|. \tag{4}$$

Здесь матрицы $P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \in E)$, $\Pi = (\pi_j,\ i,j \in E)$ и матричная норма равна норме соответствующих линейных операторов в банаховом пространстве

$$L_2(\pi) = \left\{ f = (f_j,\ j \in E),\ \|f\|^2 = \sum_{j\in E} |f_j|^2 \pi_j < \infty \right\}. \tag{5}$$

Основной результат данной статьи состоит в том, что показатель (4) и, как следствие, (3) являются решением определенной задачи нелинейного программирования, которая включает интенсивности рождения и гибели. В качестве следствия получены явные выражения для спектральных показателей эргодичности процессов массового обслуживания в системах $M/M/1$, $M/M/m$, $M/M/\infty$, $M/M/1/N$ и др. Некоторые из этих выражений ранее получены другими методами в работах Ван Дорна [3, 4], Н. В. Карташова [5], Чена [6] и других авторов. Существенно отличные от (8) функционалы были предложены ранее в работах Зейфмана [7] и Кийжма [8] для решения аналогичной задачи. Отметим, что в статье [7] в отличие от теоремы 2, приведенной ниже, содержится только неравенство для показателя эргодичности. В работе [8] рассмотрен случай, когда интенсивности рождения и гибели постоянны начиная с некоторого номера (см. первый абзац раздела 3 в [8]).

Используемый в данной работе метод основан на понятии обратимости марковского процесса, введенном Колмогоровым [9], Карлином и МакГрегором [10] и рассмотренном для процесса с произвольным измеримым пространством значений в статье Н. В. Карташова [11]. Количественные оценки с явными константами и показателями в (2) приведены в работах Н. В. Карташова [5, 12, 13].

2. Основные результаты. Рассмотрим следующий функционал от генератора G:

$$\gamma(G) = \sup_{u\in R_+^\infty} \inf_{n\geq 1} \mu_n\left(1+\theta_n - u_{n+1} - \theta_n/u_n\right), \tag{6}$$

где $\theta_n = \lambda_{n-1}/\mu_n$, $n\geq 1$, $R_+^\infty = \{u=(u_1,u_n,\ldots),\quad 0<u_n\leq\infty\}$.

Теорема 1. *Пусть процесс X эргодичен и показатель $\gamma(G)>0$. Тогда*

$$\alpha(G)\leq -\gamma(G). \tag{7}$$

***Следствие* 1.** *Пусть процесс X эргодичен. Тогда*

$$\alpha(G)\leq -\inf_{n\geq 1}\mu_n\left(1+\theta_n-\sqrt{\theta_n}-\sqrt{\theta_{n+1}}\right). \tag{8}$$

Определим для $u\in R_+^\infty$ функционалы, входящие в (6):

$$\begin{gathered} c_n(u) = \mu_n\left(1+\theta_n - u_{n+1} - \frac{\theta_n}{u_n}\right), \\ c(u) = \inf_{n\geq 1} c_n(u). \end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 2. *Предположим, что существуют $u\in R_+^\infty$ и $N\geq 1$ такие, что $c_n(u)=c(u)>0$ при $n\geq N$ и*

$$r_n \equiv \frac{\pi_n}{p_n^2 u_{n+1}}\sum_{i<n} p_i^2/(\mu_i\pi_i) \to \infty, \quad n\to\infty, \tag{10}$$

где

$$p_n = \prod_{i=2}^{n} u_i. \tag{11}$$

Тогда $\alpha(G)=-\gamma(G)=-c(u)$.

***Замечание* 1.** При условии $\gamma(G)>0$ множество

$$R_e^\infty \equiv R_+^\infty \cap \{u: c_n(u)=c(u)>0,\quad n\geq 1\} \tag{12}$$

не пусто.

***Замечание* 2.** Каждое из следующих условий достаточно для выполнения (10):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi_n}{p_n^2 u_{n+1}} = \infty;$

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n^2}{\mu_n\pi_n} > 0$ и $\sup\limits_n \dfrac{u_{n+1}p_n^2}{\pi_n} < \infty.$

Примеры.

1. *Система* $M/M/1$. *Пусть* $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \lambda$ *и* $\theta = \lambda/\mu \in (0, 1)$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu\left(1-\sqrt{\theta}\right)^2. \tag{13}$$

2. *Система* $M/M/\infty$. *Пусть* $\mu_n = n\mu$, $\lambda_n = \lambda$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu.$$

3. *Система* $M/M/2$. *Пусть* $\mu_n = \mu\min(n, 2)$, $\lambda_n = \lambda$ *и* $\theta = \lambda/\mu \in (0, 2)$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu\max_{u>0}\min\left(2+\theta-2u-\theta/u,\ 1+\theta-u\right) =$$

$$= \begin{cases} -\mu\left(\sqrt{2}-\sqrt{\theta}\right)^2, & \theta\in[2/9,\,2), \\ -\mu\left(1/2+\theta-\sqrt{1/4-\theta}\right), & \theta\in(0,\,2/9). \end{cases} \tag{14}$$

4. *Система* $M/M/m$. *Пусть* $\mu_n = \mu\min(n, m)$, $\lambda_n = \lambda$ *и* $\theta = \lambda/\mu \in (0, m)$. *Тогда*

$$\alpha(G) \le$$

$$\le -\mu\max_{u\in R_+^m}\min_{1\le n\le m}\left(n+\theta-nu_{n+1}-\theta/u\right) \le \tag{15}$$

$$\le -\mu\left(\sqrt{m}-\sqrt{\theta}\right)^2, \tag{16}$$

где по определению $u_{m+1}\equiv u_m$. *Если последнее неравенство является равенством, то неравенство* (15) *также является равенством. Это утверждение выполняется по крайней мере для* $\theta\in(m-1/2, m)$.

5. *Система* $M/M/1/N$. *Пусть* $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \lambda$ *для* $n < N$, $\lambda_n = 0$ *при* $n \ge N$ *и* $\theta = \lambda/\mu$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu\min\left(1+\theta-\sqrt{\theta},\, 1\right). \tag{17}$$

6. *Зависящая от очереди убывающая интенсивность входного потока. Пусть* $\mu_n = \mu$, $\lambda_n = \lambda/(n+1)$ *и* $\theta = \lambda/\mu$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu(1-\nu), \tag{18}$$

где ν *— положительный корень уравнения* $\nu^2+\theta\nu-\theta = 0$.

7. *Зависящие от очереди возрастающие интенсивности входного потока и обслуживания. Пусть* $\mu_n = \mu n$, $\lambda_n = \lambda n$, $n\ge 1$, $\lambda_0 = r > 0$ *и* $\theta = \lambda/\mu \in (0, 1)$. *Тогда*

$$\alpha(G) = -\mu(1-\theta). \tag{19}$$

3. Доказательства. Обозначим

$$\chi_j = \sum_{i\le j}\theta_i,\quad \chi_0 = 1,\quad \chi = \sum\chi_j,\quad \pi_i = \chi_i/\chi. \tag{20}$$

При условии эргодичности $(\chi<\infty)$ матрица G в (1) имеет единственный в классе суммируемых последовательностей нетривиальный левый аннулятор $\pi = (\pi_j,\ j\in E)$. Координаты вектора π определены в (20).

Поскольку интенсивности λ_i и μ_i предполагаются конечными, то генератор G является σ-конечным ядром согласно определению 1 [11].

Лемма 1. *Мера на подмножествах произведения $E \times E$, которая задается совместным распределением $(\pi_j G_{ij},\ i, j \in E)$, является симметрической. Следовательно, ядро G является π-обратимым по определению 2 [11].*

Доказательство очевидно:

$$\pi_i G_{i,i+1} = \pi_i \lambda_i = \pi_i \theta_i \mu_{i+1} = \pi_{i+1} \mu_{i+1} = \pi_{i+1} G_{i+1,i}.$$

Определение [11]. *Обобщенным потенциалом R в $L_2(\pi)$ процесса X называется линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор в $L_2(\pi)$, который определен на линейном подпространстве $G(L_2(\pi))$ таким образом, что равенство $f = Rh$ выполняется тогда и только тогда, когда $h = -Gf$ и скалярное произведение $\pi f = 0$, $f, h \in L_2(\pi)$.*

Для вычисления обобщенного потенциала рассмотрим последовательность

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{j} 1/(\mu_i \pi_i), \qquad \sigma_0 = 0. \tag{21}$$

Лемма 2. *Обобщенный потенциал R в $L_2(\pi)$ для процесса X задается матрицей*

$$R_{ki} = \sigma_{k \wedge i} \pi_i - \sum_{l > 0} \pi_l \sigma_{l \wedge i} \pi_i, \tag{22}$$

где $k \wedge i = \min(k, i)$. Оператор R является плотно определенным линейным оператором в $L_2(\pi)$.

Доказательство. Для функции $f \in L_2(\pi)$ рассмотрим систему уравнений $-Gf = h$ и $\pi f = 0$. Обозначив $g_0 = 0$, $g_i = f_i \mu_i \pi_i - f_{i-1} \mu_{i-1} \pi_{i-1}$, из тождеств

$$\pi_i h_i = -\pi_i (Gf)_i = f_i(\mu_i + \lambda_i)\pi_i - f_{i-1}\mu_i \pi_i - f_{i+1}\lambda_i \pi_i =$$
$$= f_i(\mu_i + \lambda_i)\pi_i - f_{i-1}\lambda_{i-1}\pi_{i-1} - f_{i+1}\mu_{i+1}\pi_{i+1} = g_i - g_{i+1}, \quad i \geq 0,$$

заключаем, что для всех $j > 0$

$$g_j = -\sum_{1 \leq i < j} \pi_i h_i.$$

Отсюда при $j \geq 1$ получаем

$$f_j - f_{j-1} = g_j / (\mu_j \pi_j) = -\sum_{1 \leq i < j} \pi_i h_i / (\mu_j \pi_j).$$

Следовательно,

$$f_k = f_0 - \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{1 \leq i < j} \pi_i h_i / (\mu_j \pi_j) = f_0 + \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{i \geq j} \pi_i h_i / (\mu_j \pi_j), \tag{23}$$

так как

$$0 = (\pi G) f = \pi (G f) = -\pi h = -\sum_{i \geq 0} \pi_i h_i.$$

Заметим, что из (23) вытекают равенства $f_k = f_0$ при условии $h \equiv 0$. Тогда $f \equiv 0$ как следствие тождества $\pi f = 0$. Значит, система $Gf = 0$, $\pi f = 0$ имеет только тривиальное решение и потенциальный оператор R корректно определен на своей области определения.

Из определения функции f получаем также

$$0 = \pi f = \sum \pi_k f_k = f_0 + \sum_{k \geq 0} \pi_k \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{i \geq j} \pi_i h_i / (\mu_j \pi_j).$$

Вычислив из этого уравнения значение f_0 и подставив его в (23), окончательно получим

$$f_k = -\sum_{i\geq 0}\pi_i h_i \sum_{k\geq 0}\pi_k \sum_{j\leq k\wedge i} 1/(\mu_j\pi_j) + \sum_{i\geq 0}\pi_i h_i \sum_{j\leq k\wedge i} 1/(\mu_j\pi_j) =$$

$$= \sum_{i\geq 0} h_i\left(\sigma_{k\wedge i}\pi_i - \sum_{l\geq 0}\pi_l\sigma_{l\wedge i}\pi_i\right).$$

Из последнего тождества следует (22).

Очевидно, что оператор R определен по крайней мере на функциях h с конечным носителем, так как выражение (22) как функция k ограничено для каждого конечного i. Следовательно, оператор R плотно определен в $L_2(\pi)$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим множество последовательностей с конечным носителем

$$W = \bigcup_N \{s = (s_i,\ i\geq 0),\quad s_i = 0,\quad i > N\}.$$

Определим на W функционалы

$$b(s) = \sum_{n\geq 0} s_n^2/(\mu_n\pi_n), \qquad d(s) = \sum_{n\geq 0}(s_{n+1}-s_n)^2/\pi_n \tag{24}$$

и рассмотрим множество

$$D_2^0(\pi) = \{s = (s_n,\ n\geq 0)\colon\ s_0 = 0,\quad d(s) = 1\}. \tag{25}$$

Лемма 3. *Справедливы тождества*

$$-\alpha(G) = 1/\sup\left(b(s),\ s\in D_2^0(\pi)\cap W\right) = \inf\left(d(s)/b(s),\ s\in W,\ s_0 = 0\right). \tag{26}$$

Доказательство. Учитывая леммы 1 и 2, заключаем, что выполнены условия теоремы 1 (b2) из [11] (а именно, σ-конечность и обратимость ядра G, единственность аннулятора π и плотность определения оператора R). Поэтому выполнены утверждения этой теоремы, где величина $\alpha(G)$ по определению [11] совпадает с (4). Следовательно,

$$-\alpha(G) = 1/\sup\left((h, Rh),\ h\in S_2^0(\pi)\cap D(R)\right), \tag{27}$$

где $D(R) = G(L_2(\pi))$ — область определения оператора R, а множество

$$S_2^0 = \{h\in L_2(\pi)\colon\ \pi h = 0,\quad \|h\| = 1\}.$$

Используя (21), (22) и тождество $h = 0$, для $h\in S_2^0(\pi)\cap W$ вычислим

$$(h, Rh) = \sum_i \pi_i h_i (Rh)_i = \sum_i \pi_i h_i \sum_j R_{ij} h_j =$$

$$= \sum_{ij}\pi_i h_i \sigma_{i\wedge j} h_j\pi_j - \sum_{ij}\pi_i h_i \sum_l \pi_l\sigma_{l\wedge j} h_j\pi_j =$$

$$= \sum_{ij}\pi_i h_i h_j\pi_j \sum_{k\leq i\wedge j} 1/(\mu_k\pi_k) =$$

$$= \sum_k 1/(\mu_k\pi_k)\sum_{i\geq k}\pi_i h_i \sum_{j\geq k} h_j\pi_j = \sum_k s_k^2/(\mu_k\pi_k) = b(s), \tag{28}$$

где последовательность

$$s_k = \sum_{i\geq k}\pi_i h_i. \tag{29}$$

Из (29) получаем $h_k = (s_k - s_{k+1})/\pi_k$ и $\|h\|^2 = d(s)$. Поэтому из включения $h \in S_2^0(\pi)$ вытекает включение $s \in D_2^0(\pi)$, как оно определено в (25), поскольку $s_0 = \pi h = 0$. Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. Значит, равенство (29) задает взаимно однозначное соответствие между $S_2^0(\pi)$ и $D_2^0(\pi)$. Заметим, что отображение (29) и его обратное переводят W в W.

Поскольку $W \subset D(R)$, как показано в лемме 2, и включение $W \subset L_2(\pi)$ является плотным, то из (27) и (28) непосредственно вытекает первое равенство в (26).

Второе равенство следует из первого, так как $d(s) = 1$ при $s \in D_2^0(\pi)$, а форма (24) является билинейной по s. Лемма 3 доказана.

Утверждение замечания 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть* $u \in R_+^\infty$ *и* $c(u) > 0$.

1. *Тогда найдется последовательность* $\overline{u} \in R_e^\infty$ *такая, что* $c(\overline{u}) = c(u)$.

2. *Если* $c_n(u) = c(u)$ *для* $n \ge N$, *то* $\overline{u} \in R_e^\infty$ *можно выбрать так, чтобы* $c(\overline{u}) = c(u)$ *и* $\overline{u}_n \le u_n$ *при* $n \ge 1$.

Доказательство. Пусть $c = c(u) > 0$.

1. Определим последовательно $\overline{u}_1 = u_1$ и $\overline{u}_{n+1} = 1 + \theta_n - \theta_n/\overline{u}_n - c/\mu_n$ для $n \ge 1$. Докажем по индукции, что $\overline{u}_n \ge u_n > 0$. При $n = 1$ эти неравенства выполнены. Если $\overline{u}_n \ge u_n$, то

$$\overline{u}_{n+1} \ge 1 + \theta_n - \theta_n/u_n - c/\mu_n = u_{n+1} + (c_n(u) - c)/\mu_n \ge u_{n+1} > 0,$$

что и требовалось доказать. Поскольку

$$c_n(\overline{u}) = \mu_n\left(1 + \theta_n - \overline{u}_{n+1} - \theta_n/\overline{u}_n\right) = \mu_n c/\mu_n = c,$$

то утверждение 1 доказано.

2. Определим по обратной индукции $\overline{u}_n = u_n$ для $n \ge N$, и $\overline{u}_n = \theta_n/\left(1 + \theta_n - \overline{u}_{n+1} - c/\mu_n\right)$, $n = N-1, N-2, \ldots, 1$. Тогда $0 < \overline{u}_n \le u_n$. Для $n = N$ эти неравенства выполнены. Если $0 < \overline{u}_{n+1} \le u_{n+1}$, то

$$1 + \theta_n - \overline{u}_{n+1} - c/\mu_n \ge 1 + \theta_n - u_{n+1} - c/\mu_n =$$

$$= \theta_n/u_n + (c_n(u) - c)/\mu_n \ge \theta_n/u_n > 0.$$

Следовательно, $\overline{u}_n > 0$ и $\overline{u}_n \le \theta_n/(\theta_n/u_n) = u_n$. Поэтому утверждение 2 вытекает из принципа обратной индукции, если заметить, что $c_n(\overline{u}) = c$ по определению $\overline{u}$. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *Множество* R_+^∞ *в* (6) *можно заменить на* R_e^∞.

Доказательство очевидно.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть последовательность $u \in R_+^\infty$ такова, что $c(u) > 0$, и $s \in D_2^0(\pi) \cap W$. Вычислим билинейную форму

$$\sum_n c_n(u) s_n^2/(\mu_n \pi_n) = \sum_n s_n^2 \left(1/\pi_n + 1/\pi_{n-1} - u_{n+1}/\pi_n - 1/(u_n \pi_{n-1})\right) =$$

$$= \sum_n (s_{n+1} - s_n)^2/\pi_n - \sum_n \left(s_{n+1}/\sqrt{u_{n+1}} - s_n\sqrt{u_{n+1}}\right)^2/\pi_n, \tag{30}$$

где использованы тождества $\pi_n = \theta_n \pi_{n-1}$, формула для квадрата суммы и перенумерация ряда. Заметим, что все суммы в (30) конечны, так как $s \in W$.

Тогда по определениям (6), (9) и (24) из (30) получаем

$$c(u)\,b(s) \;=\; \sum_n c(u)\,s_n^2/(\mu_n\pi_n) \;\le\; \sum_n c_n(u)\,s_n^2/(\mu_n\pi_n) \;=$$

$$=\; d(s) - \sum_n \left(s_{n+1}/\sqrt{u_{n+1}} - s_n\sqrt{u_{n+1}}\right)^2/\pi_n \;\le\; d(s) \;=\; 1. \qquad (31)$$

Вычисляя верхнюю грань в (31) по $u \in R_+^\infty$ и $s \in D_2^0(\pi)\cap W$, находим

$$\gamma(G)\sup\left(b(s),\ s \in D_2^0(\pi)\cap W\right) \;\le\; 1. \qquad (32)$$

Поскольку $\gamma(G) > 0$ по условию, то верхняя грань в (32) конечна и из (26) следует

$$\gamma(G) \;\le\; 1/(1/(-\alpha(G))) \;=\; -\alpha(G).$$

Теорема доказана.

***Доказательство следствия* 1.** Положим $u_n = \sqrt{\theta_n}$. Тогда (8) непосредственно следует из (6) и (7).

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть $u \in R_+^\infty$ — заданная по условию последовательность и $N \ge 1$ — соответствующий номер. Построим согласно утверждению 2 леммы 4 последовательность $\overline{u} \in R_e^\infty$ такую, что $\overline{u}_n \le u_n$ и $c_n(\overline{u}) = c(\overline{u}) = c(u)$.

Определим рекуррентно следующую последовательность $s \in W$:

$$s_0 = 0, \quad s_{n+1} = s_n\overline{u}_{n+1}, \quad 1 \le n < N, \quad \text{и} \quad s_n = 0, \quad \text{для} \quad n > N.$$

Тогда $s_n = \overline{p}_n$, $2 \le n \le N$, где величины $\overline{p}_n$ определяются согласно (11) с заменой u_n на $\overline{u}_n$.

Подставив s и $u = \overline{u}$ в (30) и использовав (12), получим

$$c(\overline{u})\,b(s) \;=\; \sum_n c_n(\overline{u})\,s_n^2/(\mu_n\pi_n) \;=$$

$$=\; d(s) - \sum_n \left(s_{n+1}/\sqrt{\overline{u}_{n+1}} - s_n\sqrt{\overline{u}_{n+1}}\right)^2/\pi_n \;=\; d(s) - s_N^2/\overline{u}_{N+1}\pi_N. \qquad (33)$$

Заметим, что по определению $s_0 = 0$ и $s \in W$. Тогда $s \in D_2^0(\pi)\cap W$. Следовательно, согласно второму равенству в (26) леммы 3 справедлива оценка $-\alpha(G) \le d(s)/b(s)$. Используя ее, из (33) получаем

$$c(\overline{u}) \;=\; d(s)/b(s) - s_N^2/\overline{u}_{N+1}\pi_N b(s) \;\ge$$

$$\ge\; -\alpha(G) - s_N^2/\overline{u}_{N+1}\pi_N b(s) \;=\; -\alpha(G) - 1/\overline{r}_N, \qquad (34)$$

где $\overline{r}_N$ определяется согласно (10) при замене p_n на $\overline{p}_n$.

Заметим, что

$$r_N \;=\; \pi_N \sum_{i<N}\left(u_{N+1}\prod_{i<j\le N} u_j^2\right)^{-1}/(\mu_i\pi_i) \;\le\; \overline{r}_N, \qquad (35)$$

так как $u_j \ge \overline{u}_j$ по определению $\overline{u}$. Поэтому из (10) и (35) витекает, что $\overline{r}_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

Устремляя $N \to \infty$ в (34), получаем

$$c(u) \;\ge\; -\alpha(G) \;\ge\; \gamma(G) \;=\; \sup_{u\in R_+^\infty} c(u), \qquad (36)$$

где второе неравенство получается из теоремы 1. Следовательно, (36) является равенством, что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

Доказательство примеров. 1. Пусть $u_n = u$. Тогда

$$c_n(u) = c(u) = \mu(1 + \theta - u - \theta/u) \le \mu(1 - \sqrt{\theta})^2,$$

где оптимальное минимизирующее значение $u = \sqrt{\theta}$. Поскольку $p_n^2 \cong c\theta^n$ и $\pi_n \cong d\theta^n$, то $r_n \cong an \to \infty$ при $n \to \infty$. Согласно теореме 2 выполнено равенство (13).

2. Пусть $u_n = \theta/(n-1)$, $n > 1$, и $u_1 = \infty$. Тогда

$$c_1(u) = \mu(1 + \theta - \theta) = \mu,$$

$$c_n(u) = \mu n(1 + \theta/n - \theta/n - (\theta/n)/(\theta/(n-1))) = \mu, \quad n > 1.$$

Вычислив $p_n \cong c\theta^{n-1}/(n-1)!$ и $\pi_n \cong d\theta^n/n!$, получим $r_n \cong a(n-2)!\,\theta^n \to \infty$. Следовательно, требуемое равенство вытекает из теоремы 2.

3. Выберем $u_1 = \infty$, $u_n = u_2$, $n > 2$. Тогда $c_n(u) = c_2(u)$ при $n > 2$,

$$\gamma(G) \ge \sup_{u_2 > 0} \min(c_1(u), c_2(u)) =$$

$$= \mu \max_{u_2 > 0} \min\left(2 + \theta - 2u_2 - \theta/u_2, \quad 1 + \theta - u_2\right). \tag{37}$$

Из неравенства (37) непосредственно следует соответствующее равенство в (14).

Для доказательства равенства в (37) применим теорему 2 для $N = 2$ и последовательности u, определенной выше. Заметим, что по определению u $c_n(u) = c_2(u)$ при $n \ge 2$. Следовательно, осталось только доказать (10). Непосредственное вычисление показывает, что оптимальное значение u в (14) равно $u = \sqrt{\theta/2}$ при $\theta \in [2/9, 2)$ и $u = 1/2 - \sqrt{1/4 - \theta}$ при $\theta \in (0, 2/9)$. В обоих случаях $\pi_n \cong d(\theta/2)^n$.

Если $\theta \ge 2/9$, то $p_n^2 \cong c\pi_n$ и $r_n \cong an \to \infty$. Если $\theta < 2/9$, то можно проверить, что $\theta > 2u^2$ и из $\pi_n/p_n^2 \cong d(\theta/2u^2)^n$ следует $r_n \cong d(\theta/2u^2)^n \to \infty$. Согласно теореме 2 (14) является равенством.

4. Как в предыдущем примере, выберем $u_n = u_m$, $n > m$. Тогда (11) как неравенство непосредственно следует из (6). Положим $u_n = \sqrt{\theta/n}$, $1 \le n \le m$. Тогда

$$c_n(u) = \mu\left(\theta + n - n\sqrt{\theta/(n+1)} - \sqrt{\theta n}\right) \ge$$

$$\ge \mu\left(\theta + n - n\sqrt{\theta/n} - \sqrt{\theta n}\right) = \mu(\sqrt{n} - \sqrt{\theta})^2 \ge \mu(\sqrt{m} - \sqrt{\theta})^2$$

при условии $\theta \in (m - 1/2, m)$. Поэтому неравенство в (16) следует из теоремы 1.

Пусть (16) является равенством для некоторой последовательности $u \in R_+^\infty$ такой, что $u_n = u_m$, $n > m$. Тогда из $c_m(u) = \mu\left(\sqrt{m} - \sqrt{\theta}\right)^2$ получаем $u_m = \sqrt{\theta/m}$. Из выбора u заключаем, что $c_n(u) = c_m(u) = c(u)$ при $n \ge m$. Поэтому для применения теоремы 2 осталось доказать (10). Поскольку $\pi_n \cong c(\theta/m)^n$ и $p_n^2 \cong d(\theta/m)^n$, то $r_n \cong an \to \infty$. Следовательно, оба неравенства (15) и (16) являются равенствами.

5. Пусть $u_n = \sqrt{\theta}$ для $1 < n \le N$, $u_1 = \infty$. Тогда

$$c(u) = \mu \min\left(1 + \theta - \sqrt{\theta}, \left(1 - \sqrt{\theta}\right)^2, 1 - u_{N+1}\right).$$

Полагая $u_{N+1} \to 0$, получаем неравенство в (17). Для доказательства равенства заметим, что $r_{N+1} = 0$, так как $u_{N+1} \to 0$.

6. Пусть $u_n = \theta/\nu(n-1)$, $n > 1$, $u_1 = \infty$. Тогда

$$c_n(u) = \mu(1 + \theta/n - u_{n+1} - \theta/nu_n) =$$
$$= \mu(1 + \theta/n - \theta/n\nu - \theta\nu(n-1)/\theta n) =$$
$$= \mu(1 - \nu + (\theta + \nu - \theta/\nu)/n) = \mu(1-\nu), \quad n > 1,$$
$$c_1(u) = \mu(1 + \theta + \nu - \theta/\nu) = \mu(1-\nu).$$

Поэтому в силу теоремы 1 левая часть в (18) не больше правой части. Вычислим $p_n^2 \cong c(\theta/\nu)^{n-1}/(n-1)!$ и $\pi_n \cong d\theta^n/n!$ и $r_n \cong a(n-3)!(a\nu^2)^n \to \infty$. Следовательно, согласно теореме 2 справедливо равенство в (18).

7. Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = \theta$ и $u_{n+1} = 1 - \nu_n/n$, $n > 1$, где последовательность ν_n определяется рекуррентно из соотношений $\nu_1 = \varepsilon = 1 - \theta$, $\nu_{n+1} = \varepsilon + \nu_n\theta/(1 - \nu_n/n)$, $n > 0$. Поскольку $\nu_1 = \varepsilon$, то по индукции нетрудно проверить, что $0 < \nu_n \leq n\varepsilon$. Следовательно,

$$c_1(u) = \mu(1-u_2) = \mu(1-\theta),$$
$$c_n - \mu(1-\theta) = \mu(\nu_n - \nu_{n-1}\theta/u_n - \varepsilon) = 0, \quad n > 1.$$

Очевидно, что $u_{n+1} \geq \theta > 0$. Поэтому левая часть в (19) не больше правой части. Вычислим $u_{n+1}^2 \cong 1 - 1/n$, $p_n^2 \cong c/(n-1)$ и $\pi_n \cong d\theta^n$. Тогда $r_n \cong an^2\theta^{-n} \to \infty$. Согласно теореме 2 (19) является равенством.

1. *Chung K. L.* Markov chains with stationary transition probabilities. – New York: Springer, 1967.
2. *Kingman J. F. C.* The exponential decay of Markov transition probabilities // Proc. London Math. Soc. – 1963. – **13**. – P. 337 – 358.
3. *Van Doorn E.* Monotonicity and queuing applications of birth and death processes // Lecture Notes in Statistics. – New York: Springer, 1981. – Vol. 4.
4. *Van Doorn E.* Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth and death process // Adv. Appl. Probab. – 1985. – **17**. – P. 514 – 530.
5. *Kartashov N. V.* Estimate of ergodicity in the system $M/M/1$ // Theory Probab. Math. Statist. – 1982. – **24**. – P. 59 – 65.
6. *Chen Mu Fa.* From Markov chains to non-equilibrium particle systems. – Singapore: World Sci. Publ., 1992.
7. *Zeifman A. I.* Some estimates of the rate of convergence for birth and death processes // J. Appl. Probab. – 1991. – **28**. – P. 268 – 277.
8. *Kijima M.* Evaluation of the decay parameter for some specialised birth–death processes // Ibid. – 1992. – **29**. – P. 781 – 791.
9. *Kolmogorov A.* Zur Theorie der Markoffschen Ketten // Math. Ann. – 1936. – **112**. – P. 155 – 160.
10. *Karlin S., McGregor J. L.* The differencial equation of birth and death processes and the Stieltjes moment problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – **85**. – P. 489 – 546.
11. *Kartashov N. V.* An estimate of ergodicity exponent for general Markov processes with reversible kernels // Theory Probab. Math. Statist. – 1997. – **54** (to appear).
12. *Kartashov N. V.* Uniformly ergodic jump processes with bounded intensities // Ibid. – 1996. – **52**. – P. 91 – 103.
13. *Kartashov N. V.* Strong stable Markov chains. – Utrecht, Netherlands: VSP-TBiMC, 1996.

Получено 19.06.98