УДК 517.98

Ю. С. Мішура (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ ТА НА ЙОГО ПІДМНОЖИНАХ

We consider the criterion and sufficient conditions of the existence of solution of equation $Z_t x = t^{n-1}x/(n-1)! + \int_0^t a(t-s)AZ_s x\,ds$ in the Banach space X. We obtain the resolvent of the Volterra equation by differentiating the considered solution on subsets of X. We consider a notion of "incomplete" resolvent and its properties. We also weaken the Prüss conditions on the smoothness of kernel a in the case where A generates C_0-semigroup and the resolvent is considered on $D(A)$.

Наведено критерій і достатні умови існування розв'язку рівняння $Z_t x = t^{n-1}x/(n-1)! + \int_0^t a(t-s)AZ_s x\,ds$ в банаховому просторі X. Резольвенту рівняння Вольтерра одержано як результат диференціювання цього розв'язку на деяких підмножинах X. Введено поняття і розглянуто властивості „неповної" резольвенти. Послаблено також умови Прюсса на гладкість ядра a у випадку, коли A генерує C_0-напівгрупу і резольвента розглядається на $D(A)$.

1. Вступ. Розглянемо абстрактне рівняння Вольтерра вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Ax(s)\,ds, \qquad x: R_+ \to X, \tag{1}$$

де X — банахів простір, A — необмежений замкнений лінійний оператор в X з непорожньою резольвентною множиною $\rho(A)$. В цьому випадку $D(A)$ всюди щільна в X. Серед робіт, присвячених рівнянням вигляду (1), виділимо [1 – 3]. Розглянемо, разом з (1), наступні рівняння:

$$S_t x = x + \int_0^t a(t-s)AS_s x\,ds, \qquad t \ge 0, \quad x \in X, \tag{2}$$

та

$$Z_t x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + \int_0^t a(t-s)AZ_s x\,ds, \qquad t \ge 0, \quad x \in X, \quad n \ge 1 \tag{3}$$

(очевидно, (2) — це частковий випадок (3), коли $n = 1$). Нехай рівняння (1) має резольвенту. Це означає, що існує сильно неперервна сім'я $\{S_t,\ t \ge 0\}$ обмежених лінійних операторів на X, яка комутує з A і задовольняє рівняння (2). Тоді будь-який сильний розв'язок рівняння (1) подається за допомогою формули

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t S_{t-r}f(r)\,dr\right) = S_t f(0) + \int_0^t S_{t-r}f'(r)\,dr,$$

де друга рівність має місце для $f \in W^{1,1}(R_+, X)$. Таким чином, достатньо розглянути розв'язок рівняння (2). В роботах [1, 2] встановлено достатні умови існування резольвенти у випадках, коли A генерує C_0-напівгрупу. Структура даної статті така: розглянуто критерій та достатні умови існування розв'язку рівнянь (2) і (3) у випадку, коли A генерує m-інтегровну напівгрупу, і одержано резольвенту як результат диференціювання розв'язку (3) на підмножинах X. Доведено єдиність резольвенти на деякому підпросторі X. Введено поняття „повної" і „неповної" резольвенти та відношення між ними. Нарешті, у випадку, коли A породжує C_0-напівгрупу і резольвента розглядається на $D(A)$, послаблено умови Прюсса [1, 2] на гладкість ядра a (оскільки ці умови близькі до необхідних, суттєво послабити їх при розгляді резольвенти на всьому X практично неможливо).

2. Критерій та достатні умови існування розв'язку рівняння (3). Припустимо, що ядро a допускає перетворення Лапласа при $\lambda \geq \lambda_0$, і покладемо $\hat{a}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} a(t)\,dt$, $\lambda \geq \lambda_0$, $H_n(\lambda) := \lambda^{-n}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ для таких $\lambda \geq \lambda_0$, що $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$. Наступний результат доводиться аналогічно до відповідних теорем [1 – 4].

Теорема 1. *Рівняння* (3) *має сильно неперервний розв'язок, що допускає експоненціальну оцінку* $\|Z_t\| \leq Me^{\omega t}$ *для деяких* $M > 0$, $\omega \geq \lambda_0$ *тоді і тільки тоді, коли виконані наступні умови*:

A_1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$, $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$, $\lambda > \omega$;

A_2) *для всіх* $k \geq 0$ *та* $\lambda > \omega$

$$\left\| H_n^{(k)}(\lambda) \right\| \leq Mk!(\lambda - \omega)^{-k-1}.$$

***Зауваження* 1.** Очевидно, твердження теореми 1 має місце і в більш загальній ситуації. Розглянемо рівняння

$$\overline{Z}_t x = \alpha_t x + \int_0^t a(t-s) A \overline{Z}_s x\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

де $\alpha_t : R \to R$ — функція, що допускає перетворення Лапласа при $\lambda \geq \lambda_1$. Позначимо $\hat{\alpha}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \alpha_t\, dt$, $\overline{H}_n(\lambda) := \alpha(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$. Тоді для рівняння (4) є вірною теорема 1 із заміною $H_n(\lambda)$ на $\overline{H}_n(\lambda)$, $\lambda > \omega \vee \lambda_1$. Якщо ж розглядається рівняння

$$\overline{Z}_t x = \alpha_t Bx + \int_0^t a(t-s) A \overline{Z}_s x\, ds, \qquad t \geq 0, \qquad x \in D(B), \tag{5}$$

B — деякий лінійний оператор, позначимо $\overline{H}_n(\lambda)x := \alpha(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Bx$. Тоді при виконанні умови A_1) і умови

$$\left\| \overline{H}_n^{(k)}(\lambda)x \right\| \leq Mk!(\lambda - \omega)^{-k-1} \|Bx\|, \qquad \lambda > \omega, \qquad k \geq 0,$$

одержимо, що рівняння (5) має розв'язок на $D(B)$ з оцінкою $\|\overline{Z}_t x\| \leq$ $\leq Me^{\omega t}\|Bx\|$.

Наступна теорема містить умови, достатні для виконання умов A_1) та A_2). Нехай функція a є цілком додатною. Згідно з [1, 5], це означає, що $1/\lambda\hat{a}(\lambda)$ і $-\hat{a}'(\lambda)/\hat{a}(\lambda)^2$ є цілком монотонними на $(0, \infty)$. Доповнимо цю умову.

Означення 1. *Функція* a *називається супердодатною, якщо вона є цілком додатною і, крім того, існують такі* $M > 0$ *і* $\omega \geq \lambda_0$, *що*

$$\left| \left((\lambda \hat{a}(\lambda))^{-1} \right)^{(k)} \right| \leq Mk!(\lambda - \omega)^{-k-1}, \qquad k \geq 0, \qquad \lambda \geq \omega. \tag{6}$$

Очевидно, клас супердодатних функцій досить широкий.

Нагадаємо, що оператор A генерує n-інтегровну експоненціально обмежену напівгрупу $\{Q_t,\ t \in R_+\}$, коли функції $Q_t x$ сильно неперервні для всіх $x \in X$,

$$\|Q_t\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \in R_+, \tag{7}$$

для деяких $M > 0$, $\omega \geq 0$,

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^s \left[(s-r)^{n-1}Q_{t+r} - (t+s-r)^{n-1}Q_r \right] dr = Q_t Q_s, \quad s,\, t \in R_+,$$

і має місце рівність

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t\, dt, \quad \lambda > \omega. \tag{8}$$

Будемо вважати, що $m = 0$, якщо A генерує C_0-напівгрупу (різні сталі позначимо через M, C, ω та M_1, M_2, C_1, C_2, ω_1, ω_2).

Теорема 2. *Нехай A генерує m-інтегровну напівгрупу при $m \ge 1$, ядро a є супердодатним, $n \ge m+1$. Тоді рівняння* (3) *має розв'язок Z_t і $\|Z_t\| \le \le M_1 e^{\omega_1 t}$ для деяких $M_1 > 0$ і $\omega_1 \ge 0$.*

Доведення. Як було відзначено в [1], для будь-якої функції a, що допускає перетворення Лапласа, існує функція b експоненціального росту, $|b(t)| \le \le M_2 e^{\omega_2 t}$, $b(0) = 0$, і така, що $\hat{b}(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - (\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1}$, $\lambda \ge \omega_2$ (ω_2 — це така стала, що $\hat{a}(\lambda)(\omega+1) < 1$ для $\lambda \ge \omega_2$, ω — стала з умови (7)). Нехай $(\lambda\hat{a}(\lambda))^{-1} =: \hat{c}(\lambda)$, $\hat{b}(\lambda)(\hat{c}(\lambda))^m \lambda^{-k} =: \hat{d}(\lambda)$, $k = n - m - 1$. Супердодатність ядра a забезпечує оцінку $|c(t)| \le M_3 e^{\omega_3 t}$, тому $|d(t)| \le M_3 e^{(\omega_2 + m\omega_3 + n - m)t}$. Позначимо $L_\lambda^p := (-1)^p \dfrac{d^p}{d\lambda^p}$. Оскільки $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$, $\lambda > \omega_2$, то з рівності (7) маємо

$$H_n(\lambda) = \lambda^{-n}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} = (\lambda\hat{a}(\lambda))^{-m-1}\lambda^{-k}\int_0^\infty Q_t e^{-t/\hat{a}(\lambda)}\, dt, \quad \lambda > \omega_2.$$

В роботі [1] було відзначено, що функція

$$h(\lambda, t) := (\lambda\hat{a}(\lambda))^{-1}\exp\{-t/\hat{a}(\lambda)\}$$

є цілком монотонною, якщо ядро a є цілком додатним. Тому функція

$$h_1(\lambda, t) := (\lambda\hat{a}(\lambda))^{-m-1}\exp\{-t/\hat{a}(\lambda)\}\lambda^{-k} \tag{9}$$

є цілком монотонною і

$$\left\| L_\lambda^p H_n(\lambda) \right\| = \left\| \int_0^\infty Q_t L_\lambda^p h_1(\lambda, t)\, dt \right\| \le M \int_0^\infty e^{(\omega+1)t} L_\lambda^p h_1(\lambda, t)\, dt =$$

$$= M L_\lambda^p\Big((1/\hat{a}(\lambda) - \omega - 1)^{-1} (\lambda\hat{a}(\lambda))^{-m-1}\lambda^{-k} \Big) =$$

$$= M L_\lambda^p\Big((1 - (\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1}\lambda^{-k-1}(\lambda\hat{a}(\lambda))^{-m} \Big) = M L_\lambda^p\Big(\hat{d}(\lambda)\Big). \tag{10}$$

Із нерівності (10), враховуючи експоненціальну оцінку для d_t, одержуємо

$$\left\| (H_n(\lambda))^{(p)} \right\| \le M p! (\lambda - \omega_4)^{-(p+1)}, \quad \lambda > \omega_4, \tag{11}$$

і доведення випливає з теореми 1.

Зауваження 2. Якщо $m = 0$, то умову (6) можна відкинути, що видно з (9), і одержуємо узагальнення теореми 5 [1].

У випадку $m > n - 1$ аналогічно можна встановити існування розв'язків рівнянь (2) і (3) на деяких підмножинах X. Розглянемо лише випадок $n = 1$. Позначимо

$$\|x\|_m := \sum_{k=0}^m \left\| A^k x \right\|, \quad x \in D(A^m), \quad m \ge 0, \quad A^0 = I.$$

Означення 2. *Ядро a називається напівдодатним, якщо функція $a'(\lambda)/(\hat{a}(\lambda))^2$ є цілком монотонною.*

Теорема 3. *Нехай ядро* $a \geq 0$ *задовольняє одну з наступних умов*:

B_1) a *є цілком додатним*;

B_2) a *є напівдодатним і має експоненціальний ріст*, $a(t) \leq ce^{\alpha t}$, $c > 0$, $\alpha \geq 0$, *оператор* A *генерує* m*-інтегровну напівгрупу.*

Тоді рівняння (2) *має розв'язок на* $D(A^m)$ *або* $D(A^{m+1})$ *з оцінкою* $\|S_t x\| \leq ce^{\alpha t}\|x\|_m$ *або* $\leq ce^{\alpha t}\|x\|_{m+1}$ *відповідно.*

Доведення. 1. Нехай виконується умова B_1). Подамо рівняння (2) у вигляді

$$S_t x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k} * 1)_t A^k x + S_t^1 x, \quad x \in D(A^m),$$

де $a^{*0} * \phi = \phi$, a^{*k} є k-ю згорткою ядра a, S_t^1 задовольняє рівняння

$$S_t^1 x = (a^{*m} * 1)_t A^{m+1} x + a * S_t^1 x, \quad x \in D(A^m). \tag{12}$$

Рівняння (12) має вигляд (5) із заміною Bx на $A^{m+1}x$. Тобто

$$\overline{H}_m(\lambda)x = \hat{a}(\lambda)^m \lambda^{-1}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} A^m x =$$
$$= (\lambda \hat{a}(\lambda))^{-1} \int_0^\infty Q_t \exp\{-t / \hat{a}(\lambda)\} A^m x \, dt.$$

Далі всі перетворення повторюють (9) – (11) і доведення випливає із зауваження 1.

2. Якщо виконується умова B_2), то рівняння (2) подамо у вигляді

$$S_t x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k} * 1)_t A^k x + S_t^1 x, \quad x \in D(A^{m+1}),$$

де S_t^1 задовольняє рівняння

$$S_t^1 x = (a^{*(m+1)} * 1)_t A^{m+1} x + a * S_t^1 x, \quad x \in D(A^{m+1}),$$

тобто маємо рівняння (5) при $B = A^{m+1}$. Тепер

$$\overline{H}_m(\lambda)x = \hat{a}(\lambda)^{m+1} \lambda^{-1}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} A^{m+1} x = \lambda^{-1} \int_0^\infty Q_t \exp\{-t / \hat{a}(\lambda)\} A^{m+1} x \, dt.$$

Якщо a є напівдодатним, то функція $\lambda^{-1} \exp\{-t / \hat{a}(\lambda)\}$ є цілком монотонною, і можна повторити оцінки, аналогічні (10):

$$\left\| L_\lambda^p \overline{H}_m(\lambda)x \right\| \leq M \int_0^\infty e^{(\omega+1)t} L_\lambda^p\left(\lambda^{-1} \exp\{-t / \hat{a}(\lambda)\}\right) dt \left\| A^{m+1}x \right\| =$$
$$= M L_\lambda^p\left((1/\hat{a}(\lambda) - \omega - 1)^{-1} \lambda^{-1}\right) \left\| A^{m+1}x \right\| =$$
$$= M L_\lambda^p\left((1 - (\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1} \lambda^{-1} \hat{a}(\lambda)\right) \left\| A^{m+1}x \right\|. \tag{13}$$

Якщо a має експоненціальний ріст, то права частина (13) означена для $\lambda > \omega_5$ і є перетворенням Лапласа функції експоненціального росту, звідки

$$\left\| \overline{H}_m^{(p)}(\lambda)x \right\| \leq Mp!(\lambda - \omega_5)^{-p-1} \left\| A^{m+1}x \right\|, \quad \lambda > \omega_5,$$

і доведення випливає із зауваження 1.

3. Диференційовність розв'язку рівняння (3) на підмножинах X. Покажемо тепер, що при виконанні умов теореми 3 резольвенту можна одержати як результат диференціювання розв'язку рівняння (3), якщо останній існує.

Теорема 4. *Нехай рівняння* (3) *має розв'язок з експоненціальною оцінкою і виконані умови теореми* 3. *Тоді має місце формула Тейлора*

$$Z_t x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k} * \psi_n)_t A^k x + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-2}}{(2n-2)!} B_s^1 A^m x \, ds, \tag{14}$$

де $a^{*0} * \phi$, a^{*k} *є* k*-ю згорткою ядра* a, $\psi_n(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $x \in D(A^m)$, B^1 — *сім'я сильно неперервних обмежених операторів*, $\left\| B_t^1 \right\| \leq Ce^{\alpha t}$, *якщо виконується умова* B_1), *і*

$$Z_t x = \sum_{k=0}^{m} (a^{*k} * \psi_n)_t A^k x + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} B_s^2 A^{m+1} x \, ds, \tag{15}$$

де $x \in D(A^{m+1})$, B^2 — *сім'я сильно неперервних обмежених операторів*, $\left\| B_t^2 \right\| \leq Ce^{\alpha t}$, *якщо виконується умова* B_2).

Доведення. Нехай виконується умова B_1). У цьому випадку подамо $Z_t x$ у вигляді

$$Z_t x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k} * \psi_n)_t A^k x + \psi_{m-1,n}(t), \tag{16}$$

$$\psi_{m-1,n}(t) = (a^{*m} * \psi_n * z)_t A^m x,$$

причому

$$\hat{\psi}_{m-1,n}(\lambda) = \lambda^{-2n+1} (\lambda \hat{a}(\lambda))^{-1} \int_0^\infty Q_s \exp\{-s / \hat{a}(\lambda)\} ds A^m x, \quad x \in D(A^m),$$

та

$$\left\| L_\lambda^p \left(\int_0^\infty Q_s h(\lambda, s) \, ds \right) A^m x \right\| \leq M L_\lambda^p \left(\lambda^{-1} (1 - (\omega + 1) \hat{a}(\lambda))^{-1} \right) \left\| A^m x \right\| \leq$$

$$\leq M p! (\lambda - \bar{\omega})^{-(p+1)} \left\| A^m x \right\|$$

для деяких $\bar{\omega} > 0$, $\lambda > \bar{\omega}$ (остання нерівність виконується, оскільки $|b(t)| \leq \leq Ce^{\alpha t}$ для деяких $C > 0$, $\alpha > 0$, якщо $\hat{b}(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - (\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1}$). Тому справедливе співвідношення (14), причому

$$\hat{B}^1(\lambda) = (\lambda \hat{a}(\lambda))^{-1} \int_0^\infty Q_s \exp\{-s / \hat{a}(\lambda)\} ds, \quad \lambda \geq \bar{\omega}, \quad \left\| B_t^1 \right\| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Нехай виконується умова B_2). Для $x \in D(A^{m+1})$, $m \geq 0$, подамо Z_t у вигляді

$$Z_t x = \sum_{k=0}^{m} (a^{*k} * \psi_n)_t A^k x + \left(a^{*(m+1)} * \psi_n * Z \right)_t A^{m+1} x.$$

З тотожності $\hat{Z}(\lambda) = \lambda^{-n}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$, $\lambda \geq \omega$, одержимо, що перетворення Лапласа функції

$$\psi_{m,n}(t) := (a^{*(m+1)} * \psi_n * Z)_t A^{m+1} x, \quad x \in D(A^{m+1}),$$

дорівнює

$$\hat{\psi}_{m,n}(\lambda) = \hat{a}(\lambda)^m \left(I(\hat{a}(\lambda))^{-1} - A \right)^{-1} A^{m+1} x \lambda^{-2n} = \lambda^{-2n} \int_0^\infty Q_s \exp\{-s / \hat{a}(\lambda)\} ds A^{m+1} x.$$

Аналогічно до (10) виведемо, що

$$\left\| L_\lambda^p \left(\int_0^\infty Q_s \exp\{-s/\hat{a}(\lambda)\} ds \right) A^{m+1} x \right\| \le M L_\lambda^p \left(\hat{a}(\lambda)(1-(\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1} \right) \left\| A^{m+1} x \right\|,$$

ω береться з (5). Очевидно, $\hat{a}(\lambda)(1-(\omega+1)\hat{a}(\lambda))^{-1} = \hat{b}(\lambda)$ для функції $b(t)$, що задовольняє співвідношення $b(t)-(\omega+1)(b*a)_t = a(t)$. Якщо a має експоненціальний ріст, те саме вірне для $b(t)$, $|b(t)| \le C_1 e^{\alpha_1 t}$, звідки

$$\psi_{m,n}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} B_s^2 A^{m+1} x \, ds,$$

$$\hat{B}^2(\lambda) = \int_0^\infty Q_s \exp\{-s/\hat{a}(\lambda)\} ds,$$

$\left\{ B_s^2,\ s \ge 0 \right\}$ — сім'я сильно неперервних обмежених операторів, $\left\| B_t^2 \right\| \le C e^{\alpha t}$.

***Зауваження* 3.** Нехай виконуються умови теореми 4 і $\lambda_0 > 0$ таке, що $\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} a(t)\, dt < 1$. Тоді

$$(a^{*k} * \psi_n)_t \le \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_0 t} \left(\tilde{a}^{*k} \right)_t \le e^{(\lambda_0+1)t},$$

де $\tilde{a}(t) = a(t) e^{-\lambda_0 t}$.

Тому $\| Z_t x \| \le C e^{\beta t} \| x \|_m$, $x \in D(A^m)$, якщо виконується умова B_1), і $\| Z_t x \| \le C e^{\beta t} \| x \|_{m+1}$, $x \in D(A^{m+1})$, якщо виконується умова B_2).

Теорема 5. *Якщо виконуються умови теореми* 4, *то розв'язок рівняння* (2) *можна одержати як результат диференціювання* $S_t x = Z_t^{(n-1)} x$, $t \ge 0$, $x \in D(A^m)$ $(x \in D(A^{m+1}))$ *і* $\| S_t x \| \le M e^{\omega t} \| x \|_m$ $\left(\le M e^{\omega t} \| x \|_{m+1} \right)$, *якщо виконується умова* B_1) (*умова* B_2)).

Доведення. Розглянемо умову B_1). Продиференціюємо $n-1$ раз рівняння (3). З „формули Тейлора" (14) випливає

$$Z_t^{(n-1)} x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k})_t A^k x + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} B_s^1 A^m x \, ds, \qquad x \in D(A^m).$$

Якщо виконується умова B_2), то з (15) випливає

$$Z_t^{(n-1)} x = \sum_{k=0}^{m} (a^{*k})_t A^k x + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} B_s^2 A^{m+1} x \, ds, \qquad x \in D(A^{m+1}).$$

Оцінка $\left\| Z_t^{(n-1)} x \right\| \le M e^{\omega t} \| x \|_m$ $\left(\le M e^{\omega t} \| x \|_{m+1} \right)$ очевидна.

***Зауваження* 4.** Нехай $a \in BV_{\mathrm{loc}}(R_+)$, A — деякий замкнений лінійний оператор, рівняння (3) має розв'язок Z_t, що комутує з A і допускає експоненціальну оцінку. Тоді Z_t подається у вигляді

$$Z_t x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x + \int_0^t \left[\int_0^s da(u) Z_{s-u} A x \right] ds, \qquad x \in D(A),$$

тобто Z_t можна диференціювати на $D(A)$. Дійсно,

$$Z_t'(x) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} x + \int_0^t Z_{t-u} A x \, da(u), & n > 1; \\ \int_0^t Z_{t-u} A x \, da(u), & n = 1. \end{cases}$$

За індукцією, ми одержуємо $(n-1)$-диференційовність Z_t на $D(A^{n-1})$ (подібний результат для інтегро-диференціальних рівнянь міститься в [3]). Таким чином, рівняння (2) має розв'язок на $D(A^{n-1})$.

Якщо не припускати, що A генерує інтегровну напівгрупу, то розв'язок рівняння (3) можна диференціювати за деяких обмежень на ріст резольвенти А.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови:*

C_1) $R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$ *задовольняє оцінку* $\|R_\lambda(A)\| \le M_1(1+|\lambda|^k)$, $\lambda \in \rho(A)$;

C_2) *існує* $\sigma > 0$ *таке, що* $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$;

C_3) $|\hat{a}(\lambda)| \le M_2(1+|\lambda|)^{-\alpha}$, $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$ *для деякого* $\alpha > 0$.

Якщо рівняння (3) *має розв'язок, що допускає експоненціальну оцінку,* $n + \alpha m > \alpha k + \alpha + 1$, *то рівняння* (2) *має розв'язок на* $D(A^n)$ *з оцінкою*

$$\|S_t x\| \le M_1 e^{\omega t}\|x\|_m, \qquad x \in D(A^m).$$

Доведення. Як і в теоремі 4, подамо Z_t у вигляді (16). Для доведення потрібно перевірити диференційовність $\psi_{m-1,n}(t)$. Але

$$\hat{\psi}_{m-1,n}(\lambda) = \hat{a}(\lambda)^m \lambda^{-n} \hat{Z}(\lambda) A^m x = \hat{a}(\lambda)^m \lambda^{-2n} (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} A^m x =$$
$$= \hat{a}(\lambda)^{m-1} \lambda^{-2n} (1/\hat{a}(\lambda) I - A)^{-1} A^m x.$$

Запишемо формально рівності

$$\begin{aligned} \psi_{m-1,n}(t) &= 2\pi i \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{a}(\lambda)^{m-1} \lambda^{-2n} (1/\hat{a}(\lambda) I - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda A^m x, \\ \psi^{(n-1)}_{m-1,n}(t) &= 2\pi i \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{a}(\lambda)^{m-1} \lambda^{-n} (1/\hat{a}(\lambda) I - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda A^m x. \end{aligned} \tag{17}$$

Однак

$$|\hat{a}(\lambda)|^{m-1} |\lambda|^{-n} \left\| (1/\hat{a}(\lambda) I - A)^{-1} \right\| \Big|_{\operatorname{Re}\lambda = \sigma} \le$$
$$\le M_1 M_2 |\lambda|^{-n} (1+|\lambda|)^{-\alpha(m-1)} \left(1 + \frac{1}{|\hat{a}(\lambda)|^k}\right) \Bigg|_{\operatorname{Re}\lambda = \sigma} \le$$
$$\le M |\lambda|^{-n} (1+|\lambda|)^{-\alpha(m-k-1)} \left(1 + M_2(1+|\lambda|)^{-\alpha}\right) \Big|_{\operatorname{Re}\lambda = \sigma}.$$

Якщо $n + \alpha m - \alpha k - \alpha > 1$, то інтеграл (17) збігається абсолютно, звідки випливає доведення.

4. Умови єдиності резольвенти. Позначимо

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \ge 0} D(A^n), \qquad U(A) = \left\{ x \in C^\infty(A) \colon \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \left\| A^n x \right\| < \infty,\ t > 0 \right\}.$$

Теорема 7. *Нехай розв'язок* S_t *рівняння* (2) *існує на* $D(A^n)$ *для деякого* $n \ge 0$, *комутує з* A *на* $U(A)$ *і допускає експоненціальну оцінку* $\|S_t x\| \le M e^{\omega t}\|x\|_n$, $x \in D(A^n)$, $a \in C(R_+)$. *Тоді* $S_t x = \sum_{n=0}^\infty (a^{*n})_t A^n x$, $x \in U(A)$, *тобто в цьому випадку розв'язок єдиний на* $U(A)$. *Якщо множина* $U(A)$ *всюди щільна в* X, *то розв'язок єдиний на* $D(A^n)$.

Доведення. Нехай $x \in U(A)$. Тоді для будь-якого $m \ge 1$

$$.S_t x = \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k})_t A^k x + (a^{*m} * S)_t A^m x.$$

Далі,

$$\left\| (a^{*m} * S)_t A^m x \right\| \le \frac{b_t^m}{m!} \left\| A^m x \right\|_n, \qquad b_t := a_t^* t,$$

і

$$\frac{b_t^m}{m!} \left\| A^m x \right\|_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{b_t^m (m+1)\ldots(m+k)}{T^{m+k}} C(T),$$

де $C(T) \ge \dfrac{\|A^{m+k}x\|}{(m+k)!} T^{m+k}$. Якщо вибрати $T > b(t)$, одержимо

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} \left(\frac{b_t}{T}\right)^m T^{-k}(m+1)\ldots(m+k) \to 0, \ m \to \infty.$$

Тому

$$S_t x = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} (a^{*k})_t A^k x = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{*k})_t A^k x.$$

Якщо $U(A)$ всюди щільна в X, то вона є щільною і в $\left(D(A^n), \|\cdot\|_n\right)$ і можемо продовжити $S_t x$ з $U(A)$ на $D(A^n)$.

5. Існування та властивості „неповної" резольвенти. Якщо рівняння (2) має розв'язок на всьому X, можна вважати, що існує „повна" резольвента. Якщо розв'язок (2) існує на деякій підмножині $X_1 \subset X$, то існує „неповна" резольвента. Розглянемо випадок, коли „неповна" резольвента є близькою, у деякому розумінні, до „повної" резольвенти „збуреного" рівняння.

Нехай оператор A породжує C_0-напівгрупу. Розглянемо апроксимації Іосіда оператора A

$$A_\theta = -\theta^2(\theta I - A)^{-1} - \theta I, \qquad \theta \in \rho(A), \tag{18}$$

причому

$$A_\theta x = \theta(\theta I - A)^{-1} A x, \qquad x \in D(A),$$

і

$$\left\| A_\theta x \right\| \le 2\|Ax\|, \qquad x \in D(A),$$

$$\left\| A_\theta^n x \right\| \le 2^n \left\| A^n x \right\|, \qquad x \in D(A^n), \qquad n > 1. \tag{19}$$

Оператори A_θ є обмеженими, тому розв'язок „збуреного" рівняння (2) з $A = A_\theta$ існує, зображується у вигляді $S_t^\theta x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a^{*n})_t A_\theta x$, $x \in X$, і допускає експоненціальну оцінку.

Означення 3. *Розв'язок S рівняння (2) існує X_1-асимптотично, якщо він існує на $X_1 \subset X$, існує „повна" резольвента S^θ „збуреного" рівняння (2) з $A = A_\theta$ і $\left\| S_t^\theta x - S_t x \right\| \to 0$, $x \in X_1$, $t \ge 0$, $\|A_\theta x - Ax\| \to 0$, $x \in D(A)$, $\theta \to \infty$.*

Теорема 8. *Нехай оператор A породжує C_0-напівгрупу, ядро $a \in C(R_+)$*

допускає перетворення Лапласа для $\lambda \geq \lambda_0$. *Тоді розв'язок рівняння* (2) *існує* $U(A)$*-асимптотично.*

Доведення. Запишемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a^{*n})_t A^n x =: \bar{S}_t x$, $x \in U(A)$. Очевидно, він збігається за нормою, і для A, що породжує C_0-напівгрупу, $A\bar{S}_t x = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{*n})_t A^{n+1} x$, звідки легко вивести, що $\bar{S}_t x = x + a * A\bar{S}_t x$, тобто $\bar{S}_t = S_t$ — розв'язок рівняння (2) на $U(A)$. Далі, для $x \in U(A)$ і $t > 0$

$$\left\| \left(S_t x - S_t^{\theta} x\right) \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| (a^{*n})_t \right| \left\| (A_\theta)^n x - A^n x \right\|,$$

де A_θ визначені згідно з (18). Тому

$$\left\| \left(S_t x - S_t^{\theta} x\right) \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a_t^* t\right)^n}{n!} \left\| (A_\theta)^n x - A^n x \right\|. \tag{20}$$

Далі,

$$\left\| (A_\theta)^n x - A^n x \right\| = \left\| (A_\theta - A) \sum_{k=0}^{n-1} (A_\theta)^k A^{n-1-k} x \right\| \to 0, \quad x \in C^{\infty}(A)$$

(A і A_θ комутують). Якщо виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$e^{\lambda t} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3^{n+1}\left(a_t^* t\right)^n}{n!} \left\| A^n x \right\| < \delta,$$

то з (19) і (20) маємо

$$\varlimsup_{\theta \to \infty} \left\| S_t x - S_t^{\theta} x \right\| \leq \delta,$$

звідки випливає доведення.

6. Умови на гладкість ядра для існування резольвенти на $D(A)$ за умови, що A породжує C_0-напівгрупу. В теоремі 8 [1] і наслідках до неї встановлено, що наступні умови є достатніми для існування розв'язку рівняння (2) у випадку, коли A генерує C_0-напівгрупу:

D_1) $a \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(0, \infty) \cap C(0, \infty)$, $\dot{a} \in BV_{\mathrm{loc}}(0, \infty)$;

D_2) існує неспадна, невід'ємна і логарифмічно-опукла функція b така, що $a(t) - b(t) \to 0$, $\dot{a}(t) - \dot{b}(t) \to 0$, $t \to 0$, $a - b \in W_{\mathrm{loc}}^{2,1}(R^+)$.

Наступна теорема показує, що при розгляді резольвенти на $D(A)$ умову D_2) можна опустити.

Теорема 9. *Нехай оператор A породжує C_0-напівгрупу, ядро a задовольняє умову D_1) і $a(0) = a(0+) \neq 0$. Тоді рівняння* (2) *має розв'язок на* $D(A)$.

Доведення. Нехай $a_\varepsilon(t) = a(\tau_\varepsilon) + (a(t) - a(\tau_\varepsilon))\, I\{t \geq \tau_\varepsilon\}$, де $\tau_\varepsilon \downarrow 0$, $\varepsilon \to 0$. Тоді функція $a_\varepsilon(t)$ допускає зображення $b_{1,\varepsilon}(t) + b_{2,\varepsilon}(t)$, де $b_{1,\varepsilon}(t) = a(\tau_\varepsilon)$, $b_{2,\varepsilon}(t) = \left(c_\varepsilon * b_{1,\varepsilon}\right)_t$, $c_\varepsilon(t) = (a(\tau_\varepsilon))^{-1} \dot{a}_t I\{t \geq \tau_\varepsilon\}$. Згідно з теоремою 8 [1], рівняння (2) з ядром a_ε може бути подано у вигляді

$$R_\varepsilon(t) = I + (a * AR_\varepsilon)_t = I + (a * R_\varepsilon A)_t = S_\varepsilon(t) + \left(d(c_\varepsilon) * (S_\varepsilon - I) * R_\varepsilon\right)_t, \tag{21}$$

$d(\cdot)$ означає диференціал, S_ε є C_0-напівгрупою, що задовольняє рівняння $S = I + \left(a(\tau_\varepsilon) * AS\right)_t$, тобто $S_\varepsilon(t) = e^{a(\tau_\varepsilon)At}$. З (21) маємо

$$\|R_\varepsilon(t)\| \leq \|S_\varepsilon(t)\| + ((\|(S_\varepsilon - I)\| * d(\operatorname{var} c_\varepsilon)) * \|R_\varepsilon(\cdot)\|)_t \leq$$

$$\leq Me^{|a(\tau_\varepsilon)|\omega t} + \left(1 + Me^{|a(\tau_\varepsilon)|\omega t}\right) \underset{[0,t]}{\operatorname{var}} \dot{a} |a(\tau_\varepsilon)|^{-1} \int_0^t \|R_\varepsilon(s)\| ds.$$

З нерівності Гронуолла одержуємо

$$\|R_\varepsilon(s)\| \leq Me^{|a(\tau_\varepsilon)|\omega t} \exp\left\{\left(1 + Me^{|a(\tau_\varepsilon)|\omega t}\right)|a(\tau_\varepsilon)|^{-1} \underset{[0,t]}{\operatorname{var}} \dot{a}\right\}.$$

Відзначимо, що $a(\tau_\varepsilon) \to a(0+) \neq 0$, тому

$$\|R_\varepsilon(t)\| \leq Me^{\alpha t} \exp\left\{\left(1 + e^{\alpha t}\right)\beta \underset{[0,t]}{\operatorname{var}} \dot{a}\right\} =: \varphi(t) \tag{22}$$

для деяких $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Далі, для всіх $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $x \in D(A)$

$$R_\varepsilon(t)x - R_\delta(t)x = \int_0^t \big(a_\varepsilon(t-s) - a_\delta(t-s)\big) R_\delta(s)Ax\,ds +$$

$$+ \int_0^t a_\delta(t-s)\big(R_\delta(s) - R_\varepsilon(s)\big)Ax\,ds. \tag{23}$$

Інтегруючи за частинами, з (22) і (23) одержуємо

$$\|R_\varepsilon(t)x - R_\delta(t)x\| = \left\| \int_0^t R_\delta(t-\tau)\Big[\big(a_\varepsilon(0) - a_\delta(0)\big)R_\delta(\tau)Ax + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau \big(\dot{a}_\varepsilon(\tau-s) - \dot{a}_\delta(\tau-s)\big) R_s^\delta(s)Ax\,ds\Big] d\tau \right\| \to 0, \quad x \in D(A), \quad \varepsilon, \delta \to 0.$$

Тому існує границя $R_t x = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon(t)x$, $x \in D(A)$, оскільки

$$AR_t x = \lim_{\varepsilon \to 0} AR_\varepsilon(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon(t)Ax = R_t Ax, \quad x \in D(A),$$

і в (20) можна перейти до границі. Отже, $R_t x = x + (a * RAx)_t$. Більш того, із замкненості A випливає, що

$$R_t Ax = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon(t)Ax = \lim_{\varepsilon \to 0} AR_\varepsilon(t)x = AR(t),$$

звідки одержуємо доведення.

1. *Prüss J.* Positivity and regularity of hyperbolic Volterra equations in Banach spaces // Math. Ann. – 1987. – **279** – P. 317 – 344.
2. *Prüss J.* Evolutionary integral equations in Banach spaces. – Basel: Birkhaüser, 1993. – 366 p.
3. *Ahmed N. U.* Generalized solutions for linear systems governed by operators beyond the Hille – Yosida type // Publ. Math. Debrecen. – 1996. – **48** – P. 45 – 64.
4. *Da Prato G., Janelli M.* Linear integro-differential equations in Banach space // Semin. mat. Univ. Padova. 1980. – **62**. – P. 207 – 219.
5. *Clement P., Nohel J. A.* Abstract linear and nonlinear Volterra equations preserving positivity // SIAM J. Math. Anal. – 1979. – **10**. – P. 365 – 388.

Одержано 19.04.99