УДК 517.956

С. А. Алдашев (Казах. академия транспорта и коммуникаций, Алматы)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We prove the correctness of Cauchy, Goursat, and Darboux problems for a many-dimensional integro-differential hyperbolic equation encountered in the biology.

Доведено коректність задач Коші, Гурса та Дарбу для багатовимірного інтегро-диференціального гіперболічного рівняння, яке зустрічається в біології.

Многие явления в биологических системах существенно зависят от предыстории этой системы, т. е. являются эридитарными (по терминологии Вольтерра). Эти явления, как правило, описываются многомерными интегро-дифференциальными гиперболическими уравнениями [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + \int_0^t b(t,\xi)\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi}d\xi, \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_m)$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\geq 2$, $u(x,t)$ — неизвестная функция, которая интерпретируется как плотность микробов, летящих (совершающих движение) из точки $x\in E_m$ в момент времени t, $b(t,\xi)$ — заданная функция из класса $C(\overline{\Delta})\cap C^2(\Delta)$, $\Delta=(2^{-1}\varepsilon, 2^{-1})\times\times(2^{-1}\varepsilon, 2^{-1})$, $0\leq\varepsilon<1$.

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_m точек (x,t), ограниченная поверхностями $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$ — длина вектора x, $0\leq t\leq(1-\varepsilon)/2$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача Коши. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_S = \tau(x), \qquad u|_S = \nu(x). \tag{2}$$

Задача Гурса. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x), \qquad u|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3}$$

Задача Дарбу. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \qquad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{4}$$

или

$$u_t|_S = \nu(x), \qquad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x). \tag{5}$$

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m$, t к сферическим r, $\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, t.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n=(n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\ldots$ $\ldots,\theta_{m-1})$, $W_2^l(s)$, $l=0,1,\ldots,$ — пространства Соболева, а

$$\tilde{s} = \{(r, \theta) \in S, \varepsilon < r < (1-\varepsilon)/2\}.$$

Лемма 1 [3, с. 147]. *Пусть* $f(r, \theta) \in W_2^l(s)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2 [3, с. 150]. *Для того чтобы* $f(r, \theta) \in W_2^l(s)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (6) *удовлетворяли неравенствам*

$$\left| f_0^1(r) \right| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} \left| f_n^k(r) \right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\overline{\tau}_n^k(r)$, $\overline{\nu}_n^k(r)$ и $\overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r)$, $\overline{\sigma}_{1n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (6) соответственно функций $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$ и $\sigma_\varepsilon(r, \theta)$, $\sigma_1(r, \theta)$.

Введем множество функций

$$B_0^l(s) = \Bigg\{ f(r, \theta) \colon f \in W_2^l(s), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \Big(\left\| f_n^k(r) \right\|^2_{C^2((\varepsilon,1))} +$$

$$+ \left\| f_n^k(r) \right\|^2_{C([\varepsilon,1])} \Big) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, \ l > m-1 \Bigg\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta) \in B_0^l(s)$, $\sigma_\varepsilon(r, \theta) \in B_0^l(\tilde{s})$, $\sigma_1(r, \theta) \in B_0^l(s \setminus \tilde{s})$, *то задачи Коши, Гурса имеют единственные решения соответственно в классах* $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup S) \cap C^2(D)$ *и* $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

Если $\varepsilon > 0$, то для задачи Дарбу справедлива такая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in B_0^l(s)$, $\sigma_\varepsilon(r, \theta) \in B_0^l(\tilde{s})$. *Тогда задача Дарбу однозначно разрешима в классе* $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup S) \cap C^2(D)$.

***Доказательство теоремы* 1.** Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах r, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t уравнение (1) имеет вид

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + \int_0^t b(t, \xi) \frac{\partial u(r, \theta, \xi)}{\partial \xi} d\xi, \tag{7}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \ldots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Поскольку искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup S) \cap C^2(D)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r, t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{v}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\overline{v}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению. Подставляя (8) в (7), легко убедиться в том, что

$$\overline{v}_{ntt}^k = \overline{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{v}_n^k + b(t,t)\overline{v}_n^k + b(t,0)\overline{v}_n^k(r,0) -$$

$$- \int_0^t \overline{v}_n^k(r,\xi)\frac{\partial b}{\partial \xi}d\xi, \qquad \lambda_n = n(n+m-2). \tag{9}$$

Далее, выполняя замену переменной согласно формуле $\overline{v}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)$ и полагая затем $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$, из (9) имеем

$$v_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}v_n^k + \overline{b}(\xi,\eta)v_n^k + a(\xi,\eta)\tau_n^k(\xi) =$$

$$= \int_0^{\xi-\eta} \mu(\xi,\eta,\xi_1)v_n^k(\xi+\eta,\xi_1)d\xi_1, \tag{10}$$

где

$$\overline{b}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}b(\xi+\eta,\xi-\eta), \qquad a(\xi,\eta) = \frac{1}{4}b(\xi-\eta,0),$$

$$\mu(\xi,\eta,\xi_1) = \frac{1}{4}\frac{\partial b(\xi-\eta,\xi_1)}{\partial \xi_1}.$$

Тогда краевое условие (2) для функций $v_n^k(\xi,\eta)$ с учетом леммы 1 записываем в виде

$$v_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi), \qquad \left(\frac{\partial v_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi),$$

где

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(2\xi), \qquad \nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\nu}_n^k(2\xi).$$

Используя общее решение уравнения (10) (см. [4]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид

$$v_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\xi \left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Bigg|_{\xi_1=\eta_1} \right]d\xi_1 +$$

$$+ \int_{1/2}^{\xi}\int_{\varepsilon/2}^{\eta} a(\xi_1,\eta_1)\tau_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1\,d\eta_1 +$$

$$+ \int_{1/2}^{\xi}\int_{\varepsilon/2}^{\eta}\int_0^{\xi_1-\eta_1} \mu(\xi,\eta,\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)v_n^k(\xi_1+\eta_1;\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\eta_1, \tag{11}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ — функция Римана уравнения (10), существование которого доказано в [4],

$$\frac{\partial}{\partial N}\Bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \le \xi$. Уравнение (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое удобно записать в виде

$$v_n^k = F\left(v_n^k\right). \tag{12}$$

Интегральный оператор F осуществляет отображение полного метрического пространства $C(\overline{\Delta})$ с нормой $\|v_n^k\| = \max\limits_{\overline{\Delta}} |v_n^k(\xi, \eta)|$.

Пусть v_{1n}^k, v_{2n}^k — произвольные элементы пространства $C(\overline{\Delta})$. Легко видеть, что для $v_n^k = v_{1n}^k - v_{2n}^k$ справедлива оценка

$$\left|F\left(v_n^k\right)\right| \le \left|\int\limits_{1/2}^{\xi}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta}\int\limits_{0}^{\xi_1-\eta_1} \mu(\xi, \eta, \xi_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) v_n^k(\xi_1 + \eta_1; \xi_2)\, d\xi_2\, d\xi_1\, d\eta_1\right| \le$$

$$\le M \|v_n^k\| \left|\eta - \frac{\varepsilon}{2}\right| \left|\frac{1}{2} - \xi\right|,$$

где

$$M = \max_{\overline{\Delta}\times\overline{\Delta}} \left(|\mu(\xi, \eta, \xi_1)|\, |R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|\right).$$

Далее ясно, что

$$\left|F^2\left(v_n^k\right)\right| \le M^2 \frac{|\eta - \varepsilon/2|^2\; |1/2 - \xi|^2}{2!} \|v_n^k\|.$$

Продолжая процесс, получаем

$$\left|F^p\left(v_n^k\right)\right| \le M^p \frac{|\eta - \varepsilon/2|^p\; |1/2 - \xi|^p}{p!} \|v_n^k\|,$$

где F^p — p-я степень оператора F. Отсюда видно, что можно выбрать такое p, что

$$\left\|F^p\left(v_n^k\right)\right\| \le \alpha \|v_n^k\|, \qquad \alpha = \text{const} < 1. \tag{13}$$

Это неравенство означает, что оператор F^p является сжимающим. Следовательно, оператор F в соответствии с принципом сжатых отображений [2] всегда имеет и притом единственную неподвижную точку, которую можно найти итерационным методом. Эта неподвижная точка и есть решение уравнения (12), т. е. (11).

Следовательно, решив уравнение (11), найдем

$$v_n^k(\xi, \eta) = \int\limits_{1/2}^{\xi}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta}\int\limits_{0}^{\xi_1-\eta_1} G_n^k(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1;\xi_2)\, f_n^k(\xi_1,\eta_1)\, d\xi_2\, d\xi_1\, d\eta_1 + f_n^k(\xi,\eta), \tag{14}$$

где $G_n^k(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1;\xi_2)$ — резольвента ядра $\mu(\xi, \eta, \xi_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$,

$$f_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) - \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\right] d\xi_1 +$$

$$+ \int\limits_{1/2}^{\xi}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta} a(\xi_1, \eta_1) \tau_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

Таким образом, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} v_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{15}$$

является решением задачи Коши (1), (2), где функции $v_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0, 1, \ldots$, находятся по формуле (14).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), которая, как в случае задачи (1), (2), сводится к двумерной задаче для уравнения (10) с данными

$$\begin{gathered} v_n^k\left(\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varphi_n^k(\xi), \quad v_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right) = \psi_n^k(\eta), \quad \frac{\varepsilon}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}, \quad \frac{\varepsilon}{2}\le\eta\le\frac{1}{2}, \\ \varphi_n^k(\xi) = \xi^{(m-1)/2}\,\overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k(\xi), \quad \psi_n^k(\eta) = \left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_{1n}^k\left(\frac{1}{2}+\eta\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Известно, что решение задачи Гурса (10), (16) имеет вид [4]

$$\begin{aligned} v_n^k(\xi,\eta) = \varphi_n^k(\xi) - \int_{\varepsilon/2}^{\eta} R\left(\frac{1}{2},\eta_1;\xi,\eta\right)\frac{d\psi_n^k}{d\eta_1}d\eta_1 - \\ - \int_{1/2}^{\xi}\varphi_n^k(\xi_1)\frac{\partial R(\xi_1,\varepsilon/2;\xi,\eta)}{\partial\xi_1}d\xi_1 + \int_{1/2}^{\xi}\int_{\varepsilon/2}^{\eta} a(\xi_1,\eta_1)v_n^k(\xi_1,\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1\,d\eta_1 + \\ + \int_{1/2}^{\xi}\int_{\varepsilon/2}^{\eta}\int_{0}^{\xi_1-\eta_1}\mu(\xi,\eta,\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)v_n^k(\xi+\eta;\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\eta_1 . \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнение (17), по терминологии [2], является линейным нагруженным интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое записывается в виде

$$v_n^k = F\left(v_n^k\right).$$

Если $v_{1n}^k, v_{2n}^k \in C(\overline{\Delta})$, то для $v_n^k = v_{1n}^k - v_{2n}^k$ справедлива оценка

$$\left|F\left(v_n^k\right)\right| \le M\left|\frac{1}{2}-\xi\right|\left|\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right|\|v_n^k\|,$$

где

$$M = \max\left\{\max_{\overline{\Delta}\times\overline{\Delta}}|a(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|,\ \max_{\overline{\Delta}\times\overline{\Delta}}|\mu(\xi,\eta,\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|\right\}.$$

Продолжая процесс, получаем

$$\left|F^p\left(v_n^k\right)\right| \le M\frac{|1/2-\xi|^p\ |\eta-\varepsilon/2|^p}{p!}\|v_n^k\|.$$

Отсюда видно, что можно выбрать такое p, что имеет место оценка (13).

Таким образом, уравнение (17) имеет и притом единственное решение. Следовательно, ряд (15) является решением задачи (1), (3), где функции $v_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0, 1, \ldots$, определяются из (17).

Учитывая лемму 2, ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)$, можно показать аналогично тому, как это было доказано в [5, с. 63], что полученные решения задач Коши и Гурса принадлежат искомым классам.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если решение задачи (1), (4) искать в виде ряда (6), то она сводится к задаче Дарбу для уравнения (10) и при этом

$$v_n^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi), \quad v_n^k\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varphi_n^k(\xi), \quad \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Тогда из (14), учитывая условие (18) при $\eta = \varepsilon/2$, получаем следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\nu_n^k(\xi) + \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} L_n^k(\xi, \xi_1)\nu_n^k(\xi_1)\,d\xi_1 = g_n^k(\xi), \tag{19}$$

где

$$R\left(\xi, \xi; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) L_n^k(\xi, \xi_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} R\left(\xi_1, \xi_1; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$R\left(\xi, \xi; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) g_n^k(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{2}\,\varphi_n^k(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) R\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k(\xi) R\left(\xi, \xi; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) + \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R\left(\xi_1, \eta_1; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right)\bigg|_{\xi_1 = \eta_1} d\xi_1 \right].$$

Учитывая определение функции Римана и $R(\xi, \xi; \xi, \varepsilon/2) > 0$, из уравнения (19) находим однозначно $\nu_n^k(\xi)$.

Таким образом, задача (10), (18) имеет единственное решение в виде (14), где $\nu_n^k(\xi)$ определяется из (19).

Следовательно, ряд (15) является решением задачи (1), (4), где функции $v_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, определяются из (14).

Задача (1), (5) решается аналогичным образом.

Учитывая лемму 2, ограничения на заданные функции $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$, $\sigma_\varepsilon(r, \theta)$, можно также показать, что полученное решение задачи Дарбу в виде (15) принадлежит искомому классу.

Отметим,что в случае $\varepsilon = 0$ задача Дарбу сводится к сингулярному интегральному уравнению Вольтерра.

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 302 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
4. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
5. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 143 с.

Получено 13.10.98