УДК 517.97

А. А. Ковалевский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСРЕДНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОБЛАСТЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ КАРКАСНОГО ТИПА С ТОНКИМИ КАНАЛАМИ

We establish Γ-convergence of a sequence of integral functionals related to domains of framework-type periodic structure with thin channels. We obtain a representation for integrand of Γ-limit functional.

Встановлено Γ-збіжність послідовності інтегральних функціоналів, пов'язаних з областями періодичної структури каркасного типу з тонкими каналами. Одержано зображення для інтегранта Γ-граничного функціонала.

В работе устанавливается Γ-сходимость последовательности интегральных функционалов, связанных с областями периодической структуры каркасного типа с тонкими каналами.

Γ-сходимость — это особый вид сходимости функционалов, сопровождающийся во многих важных случаях сходимостью решений вариационных задач для этих функционалов. Для общих функционалов с единой областью определения понятие Γ-сходимости введено в [1], где также впервые были описаны общие свойства этого вида сходимости функционалов и даны его приложения к вариационным задачам. Вопросам Γ-сходимости интегральных функционалов с единой областью определения посвящены работы многих итальянских математиков (см., например, [2–5]), а также работы В. В. Жикова [6–9]. Отметим, что одним из основных достижений этих работ являются теоремы о Γ-компактности для последовательностей функционалов вариационного исчисления и интегральном представлении их Γ-пределов.

Для функционалов с переменной областью определения и соответствующих переменных вариационных задач (возникающих, например, при рассмотрении краевых задач для вариационных уравнений в перфорированных областях) понятие Γ-сходимости рассматривалось в [10–16]. В частности, в работах [12–14, 16] получены необходимые и достаточные условия Γ-сходимости последовательностей интегральных функционалов, определенных на пространствах функций $W^{k,m}(\Omega_s)$, $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$, к интегральным функционалам, заданным соответственно на $W^{k,m}(\Omega_s)$ и $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$, $\Omega_s \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \ldots$. В [15] установлен результат о выборе из последовательности интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$, подпоследовательности, Γ-сходящейся к интегральному функционалу, определенному на $(W^{k,m}(\Omega))^2$.

Отметим, что ранее вопросы сходимости решений вариационных задач в переменных областях исследовались, например, в работах [17–21]. В [17–19] получены необходимые и достаточные условия сходимости решений линейных вариационных задач Дирихле и Неймана в переменных областях сложной структуры, в [20] найдены достаточные условия сходимости решений квазилинейных вариационных задач Дирихле в переменных областях, а в [21] установлены достаточные условия сходимости решений вариационных задач Неймана для интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах $W^{1,m}(\Omega_s)$. Однако результатов о Γ-сходимости и, в частности, Γ-компактности функционалов в этих работах нет.

Перейдем к описанию областей Ω_s.

Введем обозначения: $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < 1/2,\ i = 1, 2, 3\}$, если $y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = y + t^{-1}Q$; если $j \in \{1, 2, 3\}$, то $K^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \forall\, i \neq j, |x_i| \leq \leq 1/2\}$; $K = K^1 \cup K^2 \cup K^3$.

Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$Z_s = \{z \in \Omega : sz_i - 1/2 \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $Z_s \neq \varnothing$ и справедливы предложения

$$\forall\, s \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{z \in Z_s} \overline{Q_s(z)} = \overline{\Omega},$$

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z, y \in Z_s, \quad z \neq y, \quad Q_s(z) \cap Q_s(y) = \varnothing.$$

Пусть еще $0 < \alpha < \beta < 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \operatorname{int} \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\alpha K \cap \overline{Q})),$$

$$\Omega_s^{(2)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\beta K \cap \overline{Q})).$$

Множества $\Omega_s^{(1)}$, $\Omega_s^{(2)}$ являются областями в $\mathbb{R}^3$, имеющими периодическую структуру каркасного типа. Определим множества, с помощью которых соединим эти области. Пусть

$$\delta > \frac{3}{2}, \quad 0 < \rho < \min\left(\alpha, \frac{1-\beta}{2}\right), \quad \frac{1}{2}(\beta + \rho) < \gamma < \frac{1}{2}(1 - \rho).$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_s^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha}{2} \leq x_1 \leq \frac{\beta}{2},\ |x_2| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2},\ |x_3 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2},\ \frac{\alpha}{2} \leq x_2 \leq \frac{\beta}{2},\ |x_3| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s^3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2},\ |x_2 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2},\ \frac{\alpha}{2} \leq x_3 \leq \frac{\beta}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s).$$

Множества H_s представляют собой объединения каналов (параллелепипедов) $z + s^{-1}\Lambda_s^i$, $z \in Z_s$, $i = 1, 2, 3$, соединяющих области $\Omega_s^{(1)}$ и $\Omega_s^{(2)}$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Множества Ω_s являются областями в $\mathbb{R}^3$, содержащимися в Ω. Отметим, что эти области являются частным случаем областей, рассматривавшихся в [18, 19, 21], а затем в [15].

Положим $m = 2(\delta - 1)$, $\nu = 2(\beta - \alpha)^{-1}$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $d_s = = \operatorname{dist}(\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)})$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ $d_s = (\nu s)^{-1}$; для любого открытого множества $E \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} \partial E = 0$

$$\limsup_{s\to\infty} d_s^{-m}\,\mathrm{mes}\,(E\cap H_s) \le \nu^{m-1}\,\mathrm{mes}\,E \tag{1}$$

и, следовательно, рассматриваемые области удовлетворяют условиям п. 1 из [15]. Поэтому в данной ситуации можно реализовать все определения и результаты работы [15] для пространств $W^{1,m}(\Omega_s)$, $(W^{1,m}(\Omega))^2$ и заданных на них функционалов.

Обозначим для любого $u\in (W^{1,m}(\Omega))^2$ через $\mathscr{E}(u)$ множество всех последовательностей $\{u_s\}$ таких, что для любого $s\in\mathbb{N}$, $u_s\in W^{1,m}(\Omega_s)$,

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty,$$

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_s^{(1)}} |u_s-u^{(1)}|^m\,dx + \int\limits_{\Omega_s^{(2)}} |u_s-u^{(2)}|^m\,dx\right\} = 0,$$

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_{H_s} |u_s|^m\,dx = 0.$$

Следующее определение является реализацией общего определения Γ-сходимости из [15].

Определение 1. *Пусть для любого* $s\in\mathbb{N}$ J_s *— функционал на* $W^{1,m}(\Omega_s)$, J *— функционал на* $(W^{1,m}(\Omega))^2$. *Будем говорить, что последовательность* $\{J_s\}$ Γ*-сходится к функционалу* J, *если:*

1) *для любого* $u\in (W^{1,m}(\Omega))^2$ *существует последовательность* $\{w_s\}\in\mathscr{E}(u)$ *такая, что*

$$\lim_{s\to\infty} J_s(w_s) = J(u);$$

2) *для любого* $u\in (W^{1,m}(\Omega))^2$ *и любой последовательности* $\{u_s\}\in\mathscr{E}(u)$

$$\liminf_{s\to\infty} J_s(u_s) \ge J(u).$$

Перейдем к описанию интегральных функционалов, связанных с областями Ω_s.

Пусть $c\ge 1$, μ — неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0,\infty)$, $\mu(0)=0$, h — функция на $\Omega\times\mathbb{R}^3$ такая, что для любых $x,x'\in\Omega$, $\eta,\eta'\in\mathbb{R}^3$, $r\in[0,1]$,

$$c^{-1}|\eta|^m - c \le h(x,\eta) \le c(1+|\eta|^m), \tag{2}$$

$$|h(x,\eta)-h(x',\eta)| \le \mu(|x-x'|)(1+|\eta|^m), \tag{3}$$

$$h(x,(1-r)\eta+r\eta') \le (1-r)h(x,\eta) + r h(x,\eta'). \tag{4}$$

Зафиксируем еще функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, которые имеют такие же свойства, как и функция h.

Определение 2. *Если* $s\in\mathbb{N}$, *то* f_s *— функция на* $\Omega\times\mathbb{R}^3$ *такая, что для любой пары* $(x,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}^3$

$$f_s(x,\eta) = \begin{cases} f^{(1)}(x,\eta), & \text{если} \quad x \in \Omega_s^{(1)}, \\ f^{(2)}(x,\eta), & \text{если} \quad x \in \Omega_s^{(2)}, \\ h(x,\eta), & \text{если} \quad x \,\overline{\in}\, \Omega_s^{(1)} \cup \Omega_s^{(2)}. \end{cases}$$

Таким образом, для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{R}^3$ функция $f_s(\cdot,\eta)$ измерима на Ω; для любых $s \in \mathbb{N}$ и $x \in \Omega$ функция $f_s(x,\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^3$; для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$c^{-1}|\eta|^m - c \le f_s(x,\eta) \le c\,(1+|\eta|^m). \tag{5}$$

Определение 3. *Если* $s \in \mathbb{N}$, *то* I_s — *функционал на* $W^{1,m}(\Omega_s)$ *такой, что для любой функции* $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$I_s(u) = \int\limits_{\Omega_s} f_s(x,\nabla u)\,dx.$$

Задача усреднения функционалов I_s состоит в доказательстве их Γ-сходимости и эффективном вычислении интегранта соответствующего Γ-предела. Отметим, что в [22] была установлена G-сходимость нелинейных эллиптических операторов $A_s: W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$. Однако условия на интегранты функционалов I_s таковы, что Γ-сходимость последовательности $\{I_s\}$, вообще говоря, не может быть получена, исходя из основного результата работы [22]. Устанавливаем Γ-сходимость последовательности $\{I_s\}$, исходя из теоремы о Γ-компактности, доказанной в [15].

Пусть

$$\Pi^1 = \operatorname{int}(\alpha K \cap Q), \qquad \Pi^2 = Q \setminus \beta K,$$

для $l \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,3\}$

$$\Pi^{l,i} = \{x \in \partial\Pi^l : x_i = -1/2\},$$

для $l \in \{1,2\}$ $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^l)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Pi^l)$ множества всех функций $u \in C^1(\overline{\Pi^l})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1,2,3\}$ и $x \in \Pi^{l,i}$ $u(x) = u(x+e^i)$.

Определение 4. *Если* $l \in \{1,2\}$, то $\hat f^{(l)}$ — *функция на* $\Omega \times \mathbb{R}^3$ *такая, что для любой пары* $(y,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$\hat f^{(l)}(y,\eta) = \inf_{u \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^l)} \int\limits_{\Pi^l} f^{(l)}(y,\eta+\nabla u)\,dx.$$

Из определения функций $\hat f^{(l)}$ и свойств функций $f^{(l)}$ вытекает, что для любых $l \in \{1,2\}$, $y, y' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$-c \le \hat f^{(l)}(y,\eta) \le c\,(1+|\eta|^m), \tag{6}$$

$$|\hat f^{(l)}(y,\eta) - \hat f^{(l)}(y',\eta)| \le 6c^2\mu(|y-y'|)(1+|\eta|^m), \tag{7}$$

$$|\hat f^{(l)}(y,\eta) - \hat f^{(l)}(y,\eta')| \le 2^{m+1}c\,(1+|\eta|+|\eta'|)^{m-1}|\eta-\eta'|. \tag{8}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

$\mathcal{H}_1$) существует функция $\hat{h}: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-m} \sum_{i=1}^{3} h(y, \lambda \xi e^i) = \hat{h}(y, \xi);$$

$\mathcal{H}_2$) существуют функции $b_i: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, такие, что для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$h(y, \xi e^i + \eta) - h(y, \xi e^i) \geq b_i(y, \xi) \eta_i.$$

Из условия $\mathcal{H}_1$) и соотношений (2)–(4) вытекает, что для любых $y, y' \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$

$$3c^{-1}|\xi|^m \leq \hat{h}(y, \xi) \leq 3c|\xi|^m, \tag{9}$$

$$|\hat{h}(y, \xi) - \hat{h}(y', \xi)| \leq 3\mu(|y - y'|)|\xi|^m, \tag{10}$$

$$|\hat{h}(y, \xi) - \hat{h}(y, \xi')| \leq 3^{m+1}c(|\xi| + |\xi'|)^{m-1}|\xi - \xi'|. \tag{11}$$

Из условия $\mathcal{H}_2$) и (2), (4) следует, что для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$|b_i(y, \xi)| \leq 2^{m+1}c(1 + |\xi|)^{m-1}. \tag{12}$$

Пусть теперь $\hat{f}$ — функция, заданная на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ и такая, что для любого элемента $(y, \xi, \eta, \eta') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') = \hat{f}^{(1)}(y, \eta) + \hat{f}^{(2)}(y, \eta') + \rho^2 \nu^{m-1} \hat{h}(y, \xi).$$

Пусть, наконец, $\hat{I}$ — функционал на $(W^{1,m}(\Omega))^2$ такой, что для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$.

$$\hat{I}(u) = \int_{\Omega} \hat{f}(x, u^{(2)} - u^{(1)}, \nabla u^{(1)}, \nabla u^{(2)})\, dx.$$

Теорема. *Последовательность* $\{I_s\}$ Γ*-сходится к функционалу* $\hat{I}$.

Доказательство. Введем обозначения: если $t \in \mathbb{N}$, то

$$Y_t^0 = \{y \in \mathbb{R}^3 : t y_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3;\ Q_t(y) \cap \Omega \neq \varnothing\};$$

если $t, s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t^0$, то

$$V_{t,s}(y) = \left\{ u \in W^{1,m}(\Omega_s) : \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |u|^m dx \leq t^{-3-3m^2/(m-1)} \right\};$$

если $s \in \mathbb{N}$, то ψ_s — функция, заданная на Ω_s и такая, что

$$\psi_s = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_s^{(1)}, \qquad \psi_s = 1 \quad \text{на} \quad \Omega_s^{(2)},$$

$$\psi_s(x) = \nu s\left(x_i - z_i - \frac{\alpha}{2s}\right) \quad \text{для} \quad x \in z + s^{-1}\Lambda_s^i, \quad z \in Z_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $0 \le \psi_s \le 1$, $|\nabla\psi_s| \le \nu s$ на Ω_s. Отсюда и из (1) вытекает, что последовательность $\{\psi_s\}$ удовлетворяет условиям (20) – (22) из [15] (последним двум с $k = 1$; при этом $\sigma = \nu^{m-1}$).

Введем еще такие обозначения: если $s \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, то $a_s(\xi, \eta, \eta')$ — отображение Ω_s в $\mathbb{R}^3$ такое, что для любого $x \in \Omega_s$

$$a_s(\xi, \eta, \eta')(x) = (1 - \psi_s(x))\eta + \psi_s(x)\eta' + \xi\nabla\psi_s(x);$$

если $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, то

$$F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') = t^3 \inf_{u \in V_{t,s}(y)} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla u)\, dx.$$

Для любого $t \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{Y}_t = \{y \in Y_t^0 : Q_t(y) \subset \Omega\}.$$

Из доказательства теоремы 1 из [15], учитывая неравенства (6) – (11), выводим, что для доказательства Γ-сходимости последовательности $\{I_s\}$ к функционалу $\hat{I}$ достаточно установить справедливость предложения:

$\mathcal{K}$) существует последовательность положительных чисел $\sigma_t \to 0$ такая, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in \tilde{Y}_t$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$

$$\limsup_{s \to \infty} |F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') - \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta')| \le \sigma_t (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m. \quad (13)$$

Покажем, что это предложение действительно имеет место.

Зафиксируем произвольные $t \in \mathbb{N}$, $y \in \tilde{Y}_t$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$. Пусть $v^{(1)} \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^1)$, $v^{(2)} \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^2)$, причем

$$\int_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla v^{(1)})\, dx = \hat{f}^{(1)}(y, \eta), \quad (14)$$

$$\int_{\Pi^2} f^{(2)}(y, \eta' + \nabla v^{(2)})\, dx = \hat{f}^{(2)}(y, \eta'). \quad (15)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Pi_s = \Pi^1 \cup \Lambda_s \cup \Pi^2$. Нетрудно показать, что существует последовательность $v_s \in W^{1,m}(\Pi_s)$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad v_s|_{\Pi^1} = v^{(1)}, \quad v_s|_{\Pi^2} = v^{(2)}, \quad (16)$$

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\Lambda_s} \{|\nabla v_s|^m + |v_s|^m\}\, dx = 0. \quad (17)$$

Пусть теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ w_s — функция, заданная на Ω_s и такая, что

$$w_s(x) = s^{-1} v_s(s(x - z)) \quad \text{при} \quad x \in z + s^{-1}\Pi_s, \quad z \in Z_s.$$

В силу принадлежности $v^{(1)}$ пространству $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^1)$, $v^{(2)}$ — пространству $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^2)$ имеем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$. Используя (16), (17), получаем

$$\lim_{s\to\infty} \|w_s\|_{L^m(\Omega_s)} = 0. \tag{18}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$r_s = t^3 \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi,\eta,\eta') + \nabla w_s)\, dx.$$

Используя (1)–(6), (14)–(17) и условие $\mathcal{H}_1$), устанавливаем, что

$$\limsup_{s\to\infty} |r_s - \hat f(y,\xi,\eta,\eta')| \le 3c^2\nu^m \mu\left(\frac{2}{t}\right)(1+|\xi|+|\eta|+|\eta'|)^m. \tag{19}$$

Тогда, учитывая, что в силу (18) при достаточно больших s $w_s \in V_{t,s}(y)$, получаем

$$\limsup_{s\to\infty} F_{t,s}(y,\xi,\eta,\eta') \le \hat f(y,\xi,\eta,\eta') + M, \tag{20}$$

где M — правая часть неравенства (19).

Получим теперь оценку снизу для нижнего предела последовательности $\{F_{t,s}(y,\xi,\eta,\eta')\}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_{t,s}(y)$ и

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi,\eta,\eta') + \nabla u_s)\, dx \le [F_{t,s}(y,\xi,\eta,\eta') + t^{-1}]\, t^{-3}. \tag{21}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$J_s^{(1)} = t^3 \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} \{f^{(1)}(y,\eta+\nabla u_s) - f^{(1)}(y,\eta+\nabla w_s)\}\, dx,$$

$$J_s^{(2)} = t^3 \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(2)}} \{f^{(2)}(y,\eta'+\nabla u_s) - f^{(2)}(y,\eta'+\nabla w_s)\}\, dx,$$

$$J_s = t^3 \int\limits_{Q_t(y)\cap H_s} \{h(y,\xi\nabla\psi_s + \nabla u_s) - h(y,\xi\nabla\psi_s)\}\, dx.$$

Используя (1)–(6), (14)–(17), (19), (21), находим

$$\liminf_{s\to\infty} F_{t,s}(y,\xi,\eta,\eta') \ge$$

$$\ge \hat f(y,\xi,\eta,\eta') - 3^{m+1}M + \liminf_{s\to\infty} J_s^{(1)} + \liminf_{s\to\infty} J_s^{(2)} + \liminf_{s\to\infty} J_s. \tag{22}$$

Оценим снизу последнее слагаемое в правой части этого неравенства. Пусть φ — функция класса $C^1(\mathbb{R}^3)$ такая, что $0 \le \varphi \le 1$ на $\mathbb{R}^3$, $\varphi = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_t(y)$, $|\nabla\varphi| \le 12t^2$ на $\mathbb{R}^3$. Положим $\varphi_s = \varphi u_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Используя включения $u_s \in V_{t,s}(y)$ и неравенства (1), (2), (4), (5), (21), получаем

$$\limsup_{s\to\infty} \|\varphi_s\|_{L^m(\Omega_s)} \le t^{-3/m - 3m/(m-1)}, \tag{23}$$

$$\limsup_{s\to\infty} \|\varphi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le 21\nu c^2(1+|\xi|+|\eta|+|\eta'|), \tag{24}$$

$$\limsup_{s\to\infty} \int\limits_{Q_t(y)\cap H_s} \{h(y,\xi\nabla\psi_s + \nabla\varphi_s) - h(y,\xi\nabla\psi_s + \nabla u_s)\}\, dx \le$$

$$\le 36^m c^3\nu^m(1+|\xi|+|\eta|+|\eta'|)^m t^{-4}. \tag{25}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Delta_s = s^{m-1} \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^{3} \left| \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i \varphi_s \, dx \right|.$$

Используя неравенства (23), (24), аналогично лемме 7 из [23] устанавливаем, что

$$\limsup_{s \to \infty} \Delta_s \le c_0 (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)\, t^{-3-3(m-1)/m^2}, \tag{26}$$

где c_0 — положительная постоянная, зависящая только от $\alpha, \beta, \rho, m, c$. В силу условия $\mathcal{H}_2$) и (12) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{Q_t(y) \cap H_s} \{h(y, \xi \nabla \psi_s + \nabla \varphi_s) - h(y, \xi \nabla \psi_s)\} \, dx =$$

$$= \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^{3} \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \{h(y, \nu s \xi e^i + \nabla \varphi_s) - h(y, \nu s \xi e^i)\} \, dx \ge$$

$$\ge \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^{3} b_i(y, \nu s \xi) \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i \varphi_s \, dx \ge -2^m \nu^m c \,(1 + |\xi|)^{m-1} \Delta_s.$$

Отсюда и из (25), (26) находим

$$\liminf_{s \to \infty} J_s \ge -c_0 c \nu^{8m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m \, t^{-(m-1)/m^2}. \tag{27}$$

Оценим снизу нижний предел последовательности $\{J_s^{(1)}\}$. Используя свойства функции $f^{(1)}$, (1), (5), (21) и включения $u_s \in V_{t,s}(y)$, устанавливаем: существует последовательность функций $g_s \in C^1(\mathbb{R}^3)$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $g_s = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_t(y)$ и

$$\limsup_{s \to \infty} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} \{f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s) - f^{(1)}(y, \eta + \nabla u_s)\} \, dx \le$$

$$\le c^3 \nu^{7m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m \, t^{-4}. \tag{28}$$

Если $s \in \mathbb{N}$, то обозначим

$$Z_s' = \{z \in Z_s : Q_s(z) \cap Q_t(y) \ne \varnothing\},$$

$$Z_s'' = \{z \in Z_s : Q_s(z) \subset Q_t(y)\},$$

n_s — число элементов множества Z_s', m_s — число элементов множества $Z_s' \setminus Z_s''$. Имеем

$$\lim_{s \to \infty} s^{-3} m_s = 0. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{g}_s$ — функция на Π^1 такая, что для любого $x \in \Pi^1$

$$\tilde{g}_s(x) = \frac{s}{n_s} \sum_{z \in Z_s'} g_s(z + s^{-1} x).$$

Нетрудно убедиться в том, что $\tilde{g}_s \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^1)$. Тогда, учитывая (14) и определение 4, получаем

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla w_s)\, dx \le s^{-3} n_s \hat{f}^{(1)}(y, \eta) + c s^{-3} m_s \le$$

$$\le s^{-3} n_s \int\limits_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla \tilde{g}_s)\, dx + c s^{-3} m_s. \tag{30}$$

В силу выпуклости функции $f^{(1)}(y, \cdot)$ имеем

$$\int\limits_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla \tilde{g}_s)\, dx \le n_s^{-1} \sum_{z\in Z_s'} \int\limits_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s(z + s^{-1}x))\, dx =$$

$$= s^3 n_s^{-1} \sum_{z\in Z_s'} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s)\, dx \le$$

$$\le s^3 n_s^{-1} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s)\, dx + c(1 + |\eta|)^m m_s n_s^{-1}.$$

Отсюда и из (30) следует

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla w_s)\, dx \le$$

$$\le \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s)\, dx + 2c(1 + |\eta|)^m s^{-3} m_s.$$

Из этого неравенства и (28), (29) получаем

$$\liminf_{s\to\infty} J_s^{(1)} \ge -c^3 \nu^{7m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-1}. \tag{31}$$

Такая же оценка верна и для нижнего предела последовательности $\{J_s^{(2)}\}$. Учитывая это, из (22), (27) и (31) получаем

$$\liminf_{s\to\infty} F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') \ge$$

$$\ge \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') - c_1 \left[\mu\left(\frac{2}{t}\right) + t^{-(m-1)/m^2}\right](1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m, \tag{32}$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая только от α, β, ρ, m, c.

Из (20) и (32) получаем неравенство (13), в котором $\{\sigma_t\}$ определяется равенством

$$\sigma_t = \text{const}\left[\mu\left(\frac{2}{t}\right) + t^{-(m-1)/m^2}\right].$$

Значит, предложение $\mathcal{K}$) справедливо. Тогда последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функционалу $\hat{I}$. Теорема доказана.

Отметим, что условие $\mathcal{H}_1$) выполняется, например, если для любых $y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$h(y, \lambda\eta) = \lambda^m h(y, \eta).$$

Условие $\mathcal{H}_2$) выполняется, если для любого $y \in \Omega$ $h(y, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \ne j$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\partial_i h(y, \cdot)(\xi e^i) = 0.$$

Простым примером функции h, удовлетворяющей условиям $\mathcal{H}_1$), $\mathcal{H}_2$) и неравенствам (2) – (4), является функция, определяемая равенством

$$h(y, \eta) = |\eta|^m, \quad (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

1. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – 1975. – **58**, № 6. – P. 842–850.
2. *De Giorgi E.* Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area // Rend. mat. – 1975. – **8**, № 1. – P. 277–294.
3. *Carbone L., Sbordone C.* Un teorema di compattezza per la Γ-convergenza di funzionali non coercitivi // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – 1977. – **62**, № 6. – P. 744–748.
4. *De Giorgi E., Dal Maso G.* Γ-convergence and calculus of variations // Lect. Notes Math. – 1983. – **979**. – P. 121–143.
5. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhauser, 1993. – 337 p.
6. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 3. – С. 524–528.
7. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 5. – С. 961–998.
8. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 4. – С. 675–710.
9. *Жиков В. В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 8. – С. 47–84.
10. *Ковалевский А. А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 6–9.
11. *Ковалевский А. А.* О связанности подмножеств соболевских пространств и Γ-сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1989. – Вып. 1. – С. 48–54.
12. *Ковалевский А. А.* Условия Γ-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 5–8.
13. *Ковалевский А. А.* О необходимых и достаточных условиях Γ-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 29–39.
14. *Ковалевский А. А.* О Γ-сходимости интегральных функционалов, связанной с вариационной задачей Дирихле в переменных областях // Докл. НАН Украины. – 1992. – № 12. – С. 5–9.
15. *Ковалевский А. А.* О Γ-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 614–628.
16. *Ковалевский А. А.* Γ-сходимость интегральных функционалов и вариационная задача Дирихле в переменных областях // Там же. – № 9. – С. 1236–1254.
17. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 614–629.
18. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Там же. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604–621.
19. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 129–173.
20. *Панкратов Л. С.* Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей. – Харьков, 1987. – 18 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; № 11.87).
21. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; № 53.88).
22. *Ковалевский А. А.* Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях каркасного типа с тонкими каналами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1503–1513.
23. *Ковалевский А. А.* Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях с накопителями // Там же. – 1995. – **47**, № 2. – С. 194–212.

Получено 21.01.98,
после доработки — 02.07.98