УДК 517.917

И. А. Павлюк

Об одном методе интегрирования неавтономных систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка

1. Рассмотрим систему

$$dx/dt = P(t)\,x,\ \ t_0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$, $P(t) = [p_{ij}(t)]$, $i, j = 1, 2$, $P(t) \in C[t_0, \infty)$.

Покажем, что общее решение системы (1) может быть записано с помощью двух вспомогательных функций. Для определения этих функций получены соответствующие уравнения. Даются некоторые приложения полученных результатов.

После замены

$$x = \begin{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)\,d\tau\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)\,d\tau\right) \end{bmatrix} y = M(t)\,y \tag{2}$$

будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & 0 \end{bmatrix} y, \tag{3}$$

где

$$a_{12}(t) = p_{12}(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} m_0(\tau)\,d\tau\right),\ \ a_{21}(t) = p_{21}(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} m_0(\tau)\,d\tau\right),$$
$$m_0(t) = p_{11}(t) - p_{22}(t). \tag{4}$$

В (3) произведем замену

$$y = B(t)\,u, \tag{5}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} (a_{21}(\tau) - a_{12}(\tau))\,d\tau. \tag{7}$$

После элементарных преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a(t)}{2}\begin{bmatrix} \sin 2\theta(t) & \cos 2\theta(t) \\ \cos 2\theta(t) & -\sin 2\theta(t) \end{bmatrix} u, \tag{8}$$

$$a(t) = a_{12}(t) + a_{21}(t). \tag{9}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что система (8) имеет решение такой структуры:

$$U(t, t_0) = \begin{bmatrix} r_1(t)\cos\delta_1(t) & -r_2(t)\sin\delta_2(t) \\ r_1(t)\sin\delta_1(t) & r_2(t)\cos\delta_2(t) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где

$$r_1(t) = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)}{2}\sin\alpha(\tau)\,d\tau\right],\ \ r_2(t) = \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)}{2}\sin\beta(\tau)\,d\tau\right], \tag{11}$$

$$\alpha(t) = 2(\theta(t) + \delta_1(t)),\ \ \beta(t) = 2(\theta(t) + \delta_2(t)), \tag{12}$$

а δ_1 и δ_2 суть решения дифференциальных уравнений

$$2\dot{\delta}_1 = a(t)\cos\alpha(t), \tag{13}$$

$$2\dot{\delta}_2 = -a(t)\cos\beta(t), \tag{14}$$

с начальными значениями $\delta_1(t_0)$ и $\delta_2(t_0)$, удовлетворяющими условию

$$\cos(\delta_1(t_0) - \delta_2(t_0)) \neq 0. \tag{15}$$

При этом предполагается, что так определенные функции δ_1 и δ_2 подставлены в формулы (10), (11).

Из (10) видно, что $\det U(t_0, t_0) \neq 0$, поэтому в силу формулы Якоби заключаем, что и $\det U(t, t_0) \neq 0$. Следовательно, матрица (10) является фундаментальной матрицей системы (8). Учитывая (2), (5) и (10), получаем

$$X(t, t_0) = M(t) R(t, t_0), \tag{16}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} r_1(t)\cos\alpha(t)/2 & -r_2(t)\sin\beta(t)/2 \\ r_1(t)\sin\alpha(t)/2 & r_2(t)\cos\beta(t)/2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

а матрица M определяется из равенства (2). Этим показано, что матрица (16) — фундаментальная матрица системы (1).

Нормальная интегральная матрица системы (1) имеет вид

$$\overline{X}(t, t_0) = X(t, t_0) X^{-1}(t_0, t_0), \ \overline{X}(t_0, t_0) = E, \tag{18}$$

E — единичная матрица. Выведем двухсторонние оценки для нормы матрицы (18). При этом используется евклидова норма матриц. Из (17) получаем

$$|R(t, t_0)| = (r_1^2(t) + r_2^2(t))^{1/2}. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\sqrt{2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right) \leqslant (r_1^2(t) + r_2^2(t))^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right). \tag{20}$$

Из (16) вытекает оценка

$$\begin{gathered} |X(t, t_0)| \leqslant \sqrt{2}\exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right)(h_1^2(t) + h_2^2(t))^{1/2}, \ t \geqslant t_0, \\ h_1 = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)\,d\tau\right), \ h_2 = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)\,d\tau\right). \end{gathered} \tag{21}$$

С другой стороны, $|R(t, t_0)| \leqslant |M^{-1}(t)| |X(t, t_0)|$; поэтому в силу (19) и (20) получаем

$$|X(t, t_0)| \geqslant \sqrt{2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right)(h_1^{-2}(t) + h_2^{-2}(t))^{-1/2}, \ t \geqslant t_0. \tag{22}$$

Имеем $|X(t_0, t_0)| = \sqrt{2}$, $|X^{-1}(t_0, t_0)| = \sqrt{2}/\cos\alpha_0$, $\alpha_0 = \delta_1(t_0) - \delta_2(t_0)$. Поэтому, учитывая (18), (21) и (22), будем иметь

$$|\overline{X}(t, t_0)| \leqslant \frac{2}{\cos\alpha_0}\exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right)(h_1^2(t) + h_2^2(t))^{1/2}, \ t \geqslant t_0, \tag{23}$$

$$|\overline{X}(t, t_0)| \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{|a(\tau)|}{2}\,d\tau\right)(h_1^{-2}(t) + h_2^{-2}(t))^{-1/2}, \ t \geqslant t_0. \tag{24}$$

Из изложенного выше вытекает теорема.

Теорема 1. *Пусть матрица* $P(t) \in C[t_0, \infty)$, *тогда:* 1) *для нормальной интегральной матрицы* $\overline{X}(t, t_0)$ *системы* (1) (*при выполнении условия* (15)) *имеют место оценки* (23) *и* (24); 2) *ограниченность или стремление к нулю при* $t \to \infty$ *правой части неравенства* (23) *влекут за собой соответственно устойчивость или асимптотическую устойчивость решений системы* (1); 3) *неограниченность при* $t \to \infty$ *правой части неравенства* (24) *порождает неустойчивость решений системы* (1).

2. Исследуем решение системы (1) на колеблемость.

Определение. *Функция* $f(t) \not\equiv 0$, *определенная на интервале* $J = [t_0, \infty)$, *называется колеблющейся на* J, *если она имеет на* J *бесконечное множество нулей.*

Если же функция $f(t)$ *имеет не более конечного числа нулей на* J, *то она называется неколеблющейся на* J.

Запишем уравнения (13) и (14) (с учетом (12)) в виде

$$\dot{\alpha} = b(t) + a(t)\cos\alpha = b - a + a(1 + \cos\alpha), \tag{25}$$

$$\dot{\beta} = b(t) - a(t)\cos\beta = b - a + a(1 - \cos\beta), \tag{26}$$

$$b(t) = a_{21}(t) - a_{12}(t). \tag{27}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$a(t) \geqslant 0, \ \ b(t) - a(t) \geqslant \rho_3^2(t) > 0, \ \ t \geqslant t_0, \tag{28}$$

где функция $\rho_3(t)$ такая, что

$$\rho_3(t) \in C[t_0, \infty), \ \int_{t_0}^{\infty} \rho_3^2(t)\,dt = \infty. \tag{29}$$

Тогда $\dot{\alpha}(t) \geqslant \rho_3^2(t)$, $\dot{\beta}(t) \geqslant \rho_3^2(t)$, $t \geqslant t_0$, и, следовательно, функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ монотонно и неограниченно (в силу (29)) возрастают при $t \geqslant t_0$. При этом из (17) видно, что все элементы матрицы (16) будут колеблющимися функциями на интервале J.

2. С другой стороны, пусть

$$a(t) \leqslant 0, \quad b(t) - a(t) \leqslant -\rho_3^2(t), \quad t \geqslant t_0; \tag{30}$$

тогда из уравнений (25) и (26) видно, что имеют место неравенства $\dot{\alpha}(t) \leqslant -\rho_3^2(t)$ и $\dot{\beta}(t) \leqslant -\rho_3^2(t)$, $t \geqslant t_0$, из которых вытекает, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ монотонно и неограниченно убывают при $t \geqslant t_0$.

Отсюда, как и ранее, следует, что элементы матрицы (16) будут колеблющимися на J.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (28), (29) *или* (29), (30), *где функции* $a(t)$ *и* $b(t)$ *определяются равенствами* (9) *и* (27). *Тогда все решения системы* (1) *будут колеблющимися на интервале* J.

3. В системе (3) функции a_{12} и a_{21} усложнены по сравнению с коэффициентами исходной системы (1). Этого можно избежать, если на элементы матрицы $P(t)$ наложить дополнительные ограничения.

Итак, предположим, что $P(t) \in C^1[t_0, \infty)$ и

$$\rho(t) = [(p_{11} - p_{22})^2 + (p_{12} + p_{21})^2]^{1/2} > 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{31}$$

Введем функцию $\varepsilon(t)$ с помощью равенств

$$\sin\varepsilon(t) = (p_{11}(t) - p_{22}(t))/\rho(t), \quad \cos\varepsilon(t) = (p_{12}(t) + p_{21}(t))/\rho(t). \tag{32}$$

Произведем в системе (1) замену

$$x(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau) + p_{22}(\tau)\,d\tau\right]B(t)\,v; \tag{33}$$

тогда после элементарных преобразований получим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho(t)}{2}\begin{bmatrix} \sin\gamma(t) & \cos\gamma(t) \\ \cos\gamma(t) & -\sin\gamma(t)\end{bmatrix} v, \tag{34}$$

$$\gamma(t) = 2\,\theta_1(t) + \varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} (p_{21}(\tau) - p_{12}(\tau))\, d\tau + \varepsilon(t). \tag{35}$$

Система (34) аналогична системе (8). Поэтому ее решение имеет следующую структуру:

$$v(t, t_0) = \begin{bmatrix} d_1(t)\cos\delta_3(t) & -d_2(t)\sin\delta_4(t) \\ d_1(t)\sin\delta_3(t) & d_2(t)\cos\delta_4(t)\end{bmatrix}, \tag{36}$$

где

$$d_1 = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\rho(\tau)}{2}\sin\alpha_1(\tau)\, d\tau\right), \quad d_2 = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\rho(\tau)}{2}\sin\alpha_2(t)\, d\tau\right), \tag{37}$$

$$\alpha_1 = \gamma + 2\delta_3, \ \ \alpha_2 = \gamma + 2\delta_4, \tag{38}$$

а функции $\delta_3(t)$ и $\delta_4(t)$ суть решения уравнений

$$2\dot{\delta}_3 = \rho(t)\cos\alpha_1, \tag{39}$$

$$2\dot{\delta}_4 = -\rho(t)\cos\alpha_2 \tag{40}$$

с произвольными начальными значениями $\delta_3(t_0)$ и $\delta_4(t_0)$, удовлетворяющими условию

$$\cos(\delta_3(t_0) - \delta_4(t_0)) \neq 0. \tag{41}$$

После подстановки (36) в (33) получаем

$$X(t,\ t_0) = k(t)\begin{bmatrix} d_1(t)\cos(\alpha_1(t)/2) & -d_2(t)\sin(\alpha_1(t)/2) \\ d_1(t)\sin(\alpha_1(t)/2) & d_2(t)\cos(\alpha_2(t)/2)\end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$k(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} (p_{11}(\tau) + p_{22}(\tau))\, d\tau\right]. \tag{43}$$

Матрица (42) является фундаментальной матрицей системы (1). Норма

$$|X(t,\ t_0)| = k(t)\,(d_1^2(t) + d_2^2(t))^{1/2}. \tag{44}$$

Займемся уравнениями (39) и (40). Учитывая (38), эти уравнения можно записать так:

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\gamma}(t) + \rho(t)\cos\alpha_1 = \dot{\gamma} - \rho + \rho(1 + \cos\alpha_1), \tag{45}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \dot{\gamma}(t) - \rho(t)\cos\alpha_2 = \dot{\gamma} - \rho + \rho(1 - \cos\alpha_2), \tag{46}$$

$$\dot{\gamma} = p_{21} - p_{12} + (\rho(p_{11}' - p_{22}) - \rho'(p_{11} - p_{22}))/\rho(p_{12} + p_{21}), \quad \rho > 0. \tag{47}$$

Предположим, что

$$p_{12}(t) + p_{21}(t) \neq 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{48}$$

Из анализа уравнений (45) и (46) с очевидностью вытекает утверждение, аналогичное теореме 2.

Теорема 3. *Пусть* $P(t) \in C^1[t_0, \infty]$ *и выполняются условия* (29), (31) *и* (48). *Тогда если* $\dot{\gamma}(t) - \rho(t) \geqslant \rho_3^2(t) > 0$ *или* $\dot{\gamma}(t) + \rho(t) \leqslant -\rho_3^2(t) < 0$ *при* $t \geqslant t_0$, *то все решения системы* (1) *будут колеблющимися на* $t_0 \leqslant t < \infty$.

4. Рассмотрим задачу о стремлении функций $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ к конечному пределу при $t \to \infty$.

Сделаем замену

$$\beta_1 = \alpha_1 + \pi/2, \tag{49}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \pi/2. \tag{50}$$

Тогда уравнения (39) и (40) приобретают вид

$$\dot{\beta}_1 = c(t) + \rho(t)\sin\beta_1, \tag{51}$$

$$\dot{\beta}_2 = c(t) - \rho(t)\sin\beta_2, \quad c(t) = \dot{\gamma}(t). \tag{52}$$

Имеет место теорема.

Теорема 4. *Пусть* $P(t) \in C^1[t_0, \infty)$ *и, кроме того, выполняются неравенство* (48) *и условия*

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = 0, \tag{53}$$

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho_0 > 0. \tag{54}$$

Тогда уравнения (51) *и* (52) *имеют частные решения* $\beta_1(t)$ *и* $\beta_2(t)$ $(\beta_1(t_0) = \beta_2(t_0))$, *стремящиеся к нулю при* $t\to\infty$.

В доказательстве используется методика, применявшаяся к линейному уравнению [1]. Имеем

$$\dot{\beta}_1 = c(t) + \rho(t)\beta_1 + \rho(t)[\sin\beta_1 - \beta_1], \tag{55}$$

$$\dot{\beta}_2 = c(t) - \rho(t)\beta_2 - \rho(t)[\sin\beta_2 - \beta_2]. \tag{56}$$

Уравнение (56) с начальным значением $\beta_2(t_0) = c_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\beta_2(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau}\left[c_0 + \int_{t_0}^{t} c(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}d\tau - \int_{t_0}^{t}\rho(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}[\sin\beta_2(\tau) - \beta_2(\tau)]\,d\tau\right]. \tag{57}$$

При достаточно малых $|\beta_2|$ справедлива оценка

$$|\sin\beta_2 - \beta_2| \leqslant \delta_0|\beta_2|, \quad 0 < \delta_0 < 1. \tag{58}$$

В силу этого из (57) получаем

$$|\beta_2| \leqslant e^{-\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau}\left[|c_0| + \int_{t_0}^{t}|c(\tau)|e^{\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}d\tau + \delta_0\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}|\beta_2(\tau)|\,d\tau\right].$$

Отсюда, на основании леммы Гронуолла — Беллмана, вытекает оценка

$$|\beta_2| \leqslant e^{-\int_{t_0}^{t}(1-\delta_0)\rho(\tau)d\tau}\left[|c_0| + \int_{t_0}^{t}|c(\tau)|e^{\int_{t_0}^{\tau}(1-\delta_0)\rho(s)ds}d\tau\right] = \beta_3(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Учитывая (53) и (54), применим к этому неравенству теорему о среднем (к интегралу в скобках) и правило Лопиталя. Тогда легко видеть, что функция $\beta_3(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Теперь рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\beta_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau}\left[\int_{\infty}^{t} c(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}d\tau + \int_{\infty}^{t}\rho(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}[\sin\beta_1(\tau) - \beta_1(\tau)]\,d\tau\right]. \tag{59}$$

Решение этого уравнения представляет собой частное решение уравнения (51). Используя оценку вида (58), получаем

$$|\beta_1| \leqslant e^{\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}\left[\int_{\infty}^{t}|c(\tau)|e^{-\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}d\tau + \delta_0\int_{\infty}^{t}\rho(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds}|\beta_1(\tau)|\,d\tau\right].$$

Отсюда, в силу упомянутой леммы, вытекает оценка

$$|\beta_1| \leqslant e^{\int_{t_0}^{t} \rho(\tau)d\tau} e^{\delta_0 \int_{\infty}^{t} \rho(s)ds} \int_{\infty}^{t} |c(\tau)| e^{-\int_{t_0}^{\tau} \rho(s)ds} e^{-\delta_0 \int_{\infty}^{\tau} \rho(s)ds} d\tau = \beta_4(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Выражая правую часть этого неравенства в виде отношения двух величин, стремящихся к нулю, и применяя правило Лопиталя, находим, что функция $\beta_4(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Поскольку в (57) c_0 — произвольная постоянная, то ее можно выбрать такой, чтобы $\beta_1(t_0) = c_0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 4 имеют место равенства*

$$\alpha_1(t) = -\pi/2 + o(1), \quad t \to \infty; \qquad \alpha_2(t) = -\pi/2 + o(1), \quad t \to \infty. \tag{60}$$

Подставляя правые части этих раенств в (37) *и* (42), *получаем асимптотическое представление при* $t \to \infty$ *для интегральной матрицы системы* (1). *Ясно, что все элементы этой матрицы будут неколеблющимися функциями на* $t_0 \leqslant t < \infty$.

5. В заключение рассмотрим вопрос о вычислении характеристических показателей системы (1).

Строгий характеристический показатель $h^+(f)$ функции $f(t)$ определяется формулой

$$h^+(f) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}. \tag{61}$$

Имеют место равенства

$$h^+(f_1 \cdot f_2) = h^+(f_1) + h^+(f_2), \quad h^+(f_1 + f_2) = \max(h^+(f_1),\ h^+(f_2)). \tag{62}$$

Характеристический показатель матрицы совпадает с характеристическим показателем ее нормы [2].

Введем интегралы

$$p_1(t) = \int_{t_0}^{t} (d(\tau) + \rho(\tau)\sin\alpha_1(\tau))\, d\tau, \quad p_2(t) = \int_{t_0}^{t} (d(\tau) - \rho(\tau)\sin\alpha_2(\tau))\, d\tau,$$
$$d = p_{11}(t) + p_{22}(t), \tag{63}$$

и установим достаточные условия их расходимости при $t \to \infty$.

Имеем

$$d + \rho\sin\alpha_1 = d - \rho + \rho(1 + \sin\alpha_1), \qquad d - \rho\sin\alpha_2 = d - \rho + \rho(1 - \sin\alpha_2), \tag{64}$$

$$d + \rho\sin\alpha_1 = d + \rho - \rho(1 - \sin\alpha_1), \qquad d - \rho\sin\alpha_2 = d + \rho - \rho(1 + \sin\alpha_2). \tag{65}$$

Рассмотрим два случая:

$$d(t) - \rho(t) > 0 \text{ при } t \geqslant t_0 \text{ и } \int_{t_0}^{\infty} (d(t) - \rho(t))\, dt = \infty; \tag{66}$$

$$d(t) + \rho(t) < 0 \text{ при } t \geqslant t_0 \text{ и } \int_{t_0}^{\infty} (d(t) + \rho(t))\, dt = -\infty. \tag{67}$$

Если выполняются условия (66) или (67), то очевидно, что интегралы (63) будут расходящимися при $t \to \infty$.

Представим норму матрицы (42) в виде $|X(t, t_0)| = (e^{p_1(t)} + e^{p_2(t)})^{1/2}$. Отсюда имеем

$$h^+(|X(t, t_0)|) = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} (\ln(e^{p_1(t)} + e^{p_2(t)}))/t. \tag{68}$$

Справедлива теорема.

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы 4. Тогда при выполнении условий* (66) *или* (67) *строгий характеристический показатель системы* (1) *вычисляется по формуле*

$$\lambda = h^+(|X(t, t_0)|) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[p_{11}(t) + p_{22}(t)] + \rho_0/2, \qquad (69)$$

где ρ_0 *определяется равенством* (54).

Действительно, подставляя (60) в (63), получаем

$$p_1(t) = \int_{t_0}^{t}(d(\tau) - \rho(\tau)\cos\varphi_1(\tau))\,d\tau, \quad p_2(t) = \int_{t_0}^{t}(d(\tau) + \rho(\tau)\cos\varphi_2(\tau))\,d\tau, \qquad (70)$$

где функции

$$\varphi_1 \text{ и } \varphi_2 \to 0 \text{ при } t \to \infty. \qquad (71)$$

Учитывая расходимость интегралов (70) и применяя правило Лопиталя, находим (в силу (54) и (71))

$$\lambda_1 = h^+(e^{p_1(t)}) = \lim_{t\to\infty}(p_{11}(t) + p_{22}(t)) - \rho_0, \quad \lambda_2 = h^+(e^{p_2(t)}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}(p_{11}(t) + p_{22}(t)) + \rho_0, \quad \rho_0 > 0.$$

Получено неравенство $\lambda_2 > \lambda_1$, в силу которого из (62) и (68) вытекает формула (69).

Следствие 2. *Если в формуле* (69) *постоянная* $\lambda > 0$, *то решения системы* (*1*) *неустойчивы, а если* $\lambda < 0$, *то асимптотически устойчивы.*

Замечание. Предположим, что $\int_{t_0}^{\infty}\rho(\tau)\,d\tau < \infty$; тогда из формулы (68) видно, что

$$h^+(|X(t, t_0|) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau) + p_{22}(\tau))\,d\tau/t\right),$$

при этом выполнение условий теоремы 4 не предполагается.

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. В 2-х т. Т. 2.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 414 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 04.01.84