УДК 519.21

В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев

Об осцилляции реализаций ограниченных почти наверное гауссовских последовательностей

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность центрированных совместно гауссовских случайных величин (г. п.) таких, что $\sigma_n^2 = M\xi_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Считаем, что г. п. определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Указанные г. п. обладают примечательным свойством [1], заключающимся в существовании такой неслучайной константы $c \in [0, \infty]$, что

$$\mathbf{P}\{\varlimsup_{n\to\infty} |\xi_n| = c\} = 1 \tag{1}$$

Это утверждение является для г. п. аналогом осцилляционной теоремы Ито и Нисио [2]. Значение константы C зависит от ковариационной матрицы последовательности $\{\xi_n\}$, и ее вычисление или нахождение подходящих оценок связано со значительными трудностями. Однако сам факт существования такой константы оказывается полезным при изучении свойств г. п. [1, 3, 4].

Заметим, что $c \in [0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\{\sup_{n\geqslant 1} |\xi_n| < \infty\} = 1$. В этом случае почти все реализации последовательности $\{\xi_n\}$ имеют три предельные точки $(-c, 0, c)$. Покажем, что на самом деле предельные точки почти всех реализаций последовательности $\{\xi_n\}$ заполняют интервал $[-c, c]$, т. е. имеет место плотная осцилляция.

Через $L\{x_n\}$ обозначим множество предельных точек вещественной последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 1. *Пусть г. п. $\{\xi_n\}$ такова, что $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\mathbf{P}\{\sup_{n\geqslant 1} |\xi_n| < \infty\} = 1$. Тогда найдется такая неслучайная константа $c \in [0, \infty)$, что*

$$\mathbf{P}\{L\{\xi_n\} = [-c, c]\} = 1. \tag{2}$$

Отметим, что метод доказательства опирается на идеи работы [5], где, в частности, рассматривались законы повторного логарифма для сумм независимых случайных векторов.

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_n^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, d$, $d \geqslant 2$,—независимые копии г. п. $\{\xi_n\}$, определенной в условии теоремы 1. Тогда найдется такая неслучайная константа $c \in [0, +\infty)$, что $\mathbf{P}\{L\{\bar{\zeta}_n\} = B_c\} = 1$, где $L\{y_n\}$ — множество предельных точек последовательности векторов в R^d; $\bar{\zeta}_n^{(d)} = \zeta_n = \{\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(d)}\}$; $B_c^{(d)} = B_c = \{x \in R^d, \|x\| \leqslant c\}$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^d.*

Доказательство. Как уже отмечалось, найдется такая неслучайная константа $c \in [0, +\infty)$, что $\mathbf{P}\{\varlimsup_{n\to\infty} |\xi_n| = c\} = 1$. Если $c = 0$, то утверждения леммы 1 и теоремы 1 тривиальны, так как множество предельных точек вырождается в точку 0. Пусть $c \in (0, +\infty)$. Без потери общности считаем $c = 1$. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — естественное скалярное произведение в R^d, $S_c^{(d)} = S_c = \{x \in R^d : \|x\| = c\}$. Для $h \in S_c$ рассмотрим последовательность гауссовских случайных величин $\{(h, \bar{\zeta}_n), n \geqslant 1\}$. Так как $\mathbf{M}(h, \bar{\zeta}_n)(h, \bar{\zeta}_m) = \sum_{i,j} h_i h_j \times M\xi_n^{(i)}\xi_m^{(j)}$ и при $i \neq j$ случайные величины $\xi_n^{(i)}$, $\xi_m^{(j)}$ независимы для любых $m, n \geqslant 1$, то $\mathbf{M}(h, \bar{\zeta}_n)(h, \bar{\zeta}_m) = \sum_{i=1}^{d} h_i^2 \mathbf{M}\xi_n\xi_m = \mathbf{M}\xi_n\xi_m$. Таким образом, г. п. $\{\xi_n\}$ и $\{(h, \bar{\zeta}_n)\}$ равнораспределены. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\varlimsup_{n\to\infty} |(h, \zeta_n)| = 1\} = 1. \tag{3}$$

Воспользовавшись компактностью единичной сферы S_1 в R^d, заключаем, что для любого $\delta > 0$ найдется конечное число векторов $\{h_i,\ i=1, \ldots, m(\delta)\} \subset S_1$ таких, что для произвольного $h \in S_1$ $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m(\delta)} |(h_i, h)| \geqslant 1 - \delta$. Следовательно, с вероятностью единица для всех $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m(\delta)} |(\bar{\zeta}_n, h_i)| \geqslant (1-\delta) \|\bar{\zeta}_n\|$. С учетом (3) получим, что с вероятностью единица

$$(1-\delta) \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\bar{\zeta}_n\| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{1 \leqslant i \leqslant m(\delta)} |(\bar{\zeta}_n, h_i)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m(\delta)} \overline{\lim_{n\to\infty}} |(\bar{\zeta}_n, h_i)| = 1.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ видим, что

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\bar{\zeta}_n\| \leqslant 1\} = 1. \qquad (4)$$

Покажем, что

$$\mathbf{P}\{L\{\bar{\zeta}_n\} \supset S_1\} = 1. \qquad (5)$$

Из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $h \in S_1$ $\mathbf{P}\{(\bar{\zeta}_n, h) > 1 - \varepsilon$ бесконечно часто$\} = 1$. Кроме того, из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$ $\|\bar{\zeta}_n(\omega)\|^2 \leqslant 1 + \varepsilon$, как только $n \geqslant N(\omega)$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$ $\|\bar{\zeta}_n(\omega) - h\|^2 = \|h\|^2 + \|\bar{\zeta}_n(\omega)\|^2 - 2(\bar{\zeta}_n(\omega), h) \leqslant 3\varepsilon$ бесконечно часто по n. Это и доказывает (5).

Пусть $\pi: R^d \to R^{d-1}$ — проекция, определяемая соотношением $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, где $(x_1, \ldots, x_d) \in R^d$, $d > 1$. Так как $\pi(S_1^{(d)}) = B_1^{(d-1)}$, то согласно (5) $\mathbf{P}\{L\{\bar{\zeta}_n^{(d-1)}\} \supset B_1^{(d-1)}\} = 1$. С другой стороны, согласно соотношению (4), которое справедливо для любого $d \geqslant 1$, $\mathbf{P}\{L\{\bar{\zeta}_n^{(d-1)}\} \subset B_1^{(d-1)}\} = 1$. Таким образом, для любого $d > 1$

$$\mathbf{P}\{L\{\bar{\zeta}_n^{(d-1)}\} = B_1^{(d-1)}\} = 1. \qquad (6)$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1 следует из леммы 1 (соотношение (6)) при $d = 2$.

Заметим, что доказать плотную осцилляцию почти всех реализаций г. п. при $c = \infty$, используя изложенный выше метод, не удается. Однако в ряде частных случаев утверждение о плотной осцилляции доказано и без предположения об ограниченности реализаций г. п. в [6].

1. *Булдыгин В. В., Донченко В. С.* Об одном классе вероятностных мер в пространстве последовательностей.— Киев, 1976.— 36 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 76.1).
2. *Ito K., Nisio M.* On the oscillation functions of Gaussian processes.— Math. Scand., 1968, 22, N 1, p. 209—223.
3. *Булдыгин В. В., Донченко В. С.* О сходимости к нулю гауссовских последовательностей.— Мат. заметки, 1977, 21, № 4, с. 531—538.
4. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Осцилляционные свойства гауссовских последовательностей.— В кн.: Вероятностный бесконечномерный анализ. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 15—29.
5. *Finkelstein H.* The law of the iterated logarithm for empirical distributions.— Ann. Math. Stat., 1971, 42, N 2, p. 607—615.
6. *Солнцев С. А.* О плотной осцилляции гауссовской марковской последовательности.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1983, вып. 28, с. 131—132.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 18.11.83