УДК 519.21

И. А. Рудомино-Дусятская

Устойчивость с вероятностью 1 систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

1. Общие вопросы устойчивости с вероятностью 1 систем линейных стохастических дифференциальных уравнений исследовались в книге [1]. Случай, когда система имеет стационарные направления, рассматривался в работах [2] и [3].

В настоящей работе изучаются условия устойчивости с вероятностью 1 решений матричных уравнений вида

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dw(t), \tag{1}$$

где X_t — матричная случайная функция, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, a_{ij}, $b_{ij} \in R^1$, $i, j = \overline{1, n}$, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, в предположении, что эта система неприводима, т. е. A и B не имеют общих нетривиальных собственных подпространств. Понятие неприводимой системы введено в работе автора [4], в которой изучалась устойчивость в среднем квадратическом таких систем.

2. Из результатов работы [5] можно вывести существование плотности вероятности перехода для марковского процесса, являющегося решением неприводимого уравнения (1). Обозначим $\xi_t = X_t x/|X_t x|$. Тогда ξ_t также обладает плотностью вероятности перехода. Этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\xi_t = a(\xi_t)\,dt + b(\xi_t)\,dw(t), \tag{2}$$

где $a(x) = [A - (Bx, x)B - (Ax, x) - (Bx, Bx)/2 + (Bx, x)^2/2]\,x$, $b(x) = Bx - (Bx, x)\,x$. Следовательно, ξ_t — диффузионный процесс, принимающий значения на единичной сфере S_n, так как $|\xi_t| = 1$, и имеющий плотность вероятности перехода. Если ξ_t из каждой начальной точки с положительной вероятностью попадает в любую окрестность, то ξ_t эргодичен, т. е. для всякой непрерывной функции $\varphi(x)$ на S_n $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\xi_s)\,ds = \int\limits_{S_n} \varphi(x)\,\pi(dx)$, где π — единственная инвариантная мера для ξ_t (это возможно лишь в неприводимом случае).

Запишем дифференциальное уравнение для $|X_t x|$:

$$d|X_t x| = |X_t x|\,[((A\xi_t, \xi_t) + (B\xi_t, B\xi_t)/2 - 2^{-1}(B\xi_t, \xi_t)^2)\,dt + (B\xi_t, \xi_t)\,dw(t)].$$

Отсюда следует

$$|X_t x| = |X_0 x| \exp\left\{\int\limits^t (B\xi_s, \xi_s)\,dw(s) + \int\limits_0 R(\xi_s)\,ds\right\},$$

где $R(x) = (Ax, x) + (Bx, Bx)/2 - (Bx, x)^2$. Таким образом,

$$|X_t x| = |X_0 x| \exp\left\{t\left[t^{-1}\int_0^t R(\xi_s)\,ds + t^{-1}\int_0^t (B\xi_s, \xi_s)\,dw(s)\right]\right\}.$$

Заметим, что с вероятностью 1 $t^{-1}\int_0^t (B\xi_s, \xi_s)\,dw(s) \to 0$ при $t\to\infty$, и так как ξ_t эргодичен, то $t^{-1}\int_0^t R(\xi_s)\,ds \to \int_{S_n} R(x)\,\pi(dx)$ при $t\to\infty$. Таким образом, если $\int_{S_n} R(x)\,\pi(dx) > 0$, то $|X_t x| \to \infty$ при $t\to\infty$, если же $\int_{S_n} R(x)\,\pi(dx) < 0$, то $|X_t x| \to 0$ при $t\to\infty$, и, значит, решение системы (1) устойчиво с вероятностью 1.

Предположим, что $\int_{S_n} R(x)\,\pi(dx) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$(\Phi'(x), a(x)) + (\Phi''(x)\,b(x), b(x))/2 = R(x). \tag{3}$$

Это уравнение имеет решение, если $\int_{S_n} R(x)\,\rho(x)\,dx = 0$, где $\rho(x)$ — произвольное решение сопряженного уравнения $-\sum_k \partial(\rho a_k)/\partial x_k + 2^{-1}\sum_{i,k}\partial^2(\rho \times b_i b_k)/\partial x_i \partial x_k = 0$, представляющего собой уравнение для эргодической плотности [6]. Так как $\int_{S_n} R(x)\,\rho(x)\,dx = \int_{S_n} R(x)\,\pi(dx) = 0$, то существует функция $\Phi(x)$ — решение уравнения (3).

Используя формулу Ито, получаем:

$$\Phi(\xi_t) - \Phi(\xi_0) = \int_0^t (\Phi'(\xi_s), a(\xi_s))\,ds + \int_0^t (\Phi'(\xi_s), b(\xi_s))\,dw(s) +$$

$$+ 2^{-1}\int_0^t (\Phi''(\xi_s)\,b(\xi_s), b(\xi_s))\,ds = \int_0^t R(\xi_s)\,ds + \int_0^t (\Phi'(\xi_s), b(\xi_s))\,dw(s).$$

Отсюда следует

$$\int_0^t R(\xi_s)\,ds = \Phi(\xi_t) - \Phi(\xi_0) - \int_0^t (\Phi'(\xi_s), b(\xi_s))\,dw(s).$$

Таким образом,

$$|X_t x| = |X_0 x| \exp\left\{\Phi(\xi_t) - \Phi(\xi_0) + \int_0^t [(B\xi_s, \xi_s) - (\Phi''(\xi_s)\,b(\xi_s), b(\xi_s))]\,ds.\right.$$

Обозначим $C(\xi_s) = (B\xi_s, \xi_s) - (\Phi''(\xi_s)\,b(\xi_s), b(\xi_s))$. аметим, что $\int_0^t C(\xi_s)\,dw(s)$ — мартингал с характеристикой $\int_0^t C^2(\xi_s)\,ds \sim t\int_{S_n} C^2(x)\,\pi(dx)$ при $t\to\infty$. Отсюда следует, что если $\int_{S_n} C^2(x)\,\pi(dx) \neq 0$, то $t^{-1/2}\int_0^t C(\xi_s)\,dw(s)$ имеет предельное нормальное распределение, и значит, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t C(\xi_s)\,dw(s) = +\infty$, $\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t C(\xi_s)\,dw(s) = -\infty$. Следовательно, $\overline{\lim_{t\to\infty}}|X_t x| = \infty$, а $\underline{\lim_{t\to\infty}}|X_t x| = 0$, и, значит, решение системы (1) не устойчиво. Если же $\int\limits_{S_n} C^2(x)\,\pi(dx) = 0$, то поскольку $C(x)$ — непрерывная функция, а $\pi(dx)$ имеет почти всюду положительную плотность по мере Лебега на S_n, то $C(x) = 0$. Поэтому $|X_t x| = |X_0 x| \exp\{\Phi(\xi_t) - \Phi(\xi_0)\}$. Следовательно, $X_t x$ не стремится к нулю при $t \to \infty$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы решение системы* (1) *было устойчивым с вероятностью 1 в предположении, что ξ_t имеет единственную инвариантную меру $\pi(dx)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{S_n} R(x)\,\pi(dx) < 0. \tag{4}$$

В общем случае можно указать конечное число замкнутых множеств на S_n $F_1, F_2, \ldots, F_r$ с непустыми множествами внутренних точек таких, что каждое из множеств F_k инвариантно для процесса ξ_t и на каждом из этих множеств процесс эргодичен. Если π_k — эргодическое распределение на F_k, то условие $\int\limits_{F_k} R(x)\,\pi_k(dx) < 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $X_t x$ было устойчивым с вероятностью 1, если начальное значение x таково, что $x/|x| \in F_k$. Тогда $X_t x$ устойчиво на конусе $x/|x| \in F_k$ и на минимальном линейном подпространстве, содержащем этот конус. Но поскольку конус имеет внутренние точки, то это подпространство совпадает с R^n. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы неприводимая система* (1) *была устойчива с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая инвариантная мера $\pi(dx)$ для ξ_t — решения* (2), *что выполнено* (4).

В качестве примера рассмотрим систему

$$dx = x'dt, \quad dx' = (\alpha x + \beta x')\,dt + (\gamma x + \delta x')\,dw(t). \tag{5}$$

Система (5) является частным случаем (1), когда $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Для того чтобы она была неприводимой, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \alpha\delta^2 - \gamma^2 - \beta\gamma\delta \neq 0$. Для системы (4) $\xi_t = (\cos\varphi_t, \sin\varphi_t)^*$ и $R(\varphi) = \sin\varphi\,[(\alpha + 1)\cos\varphi + \beta\sin\varphi] + (\gamma\cos\varphi + \delta\sin\varphi)^2 (1/2 - \sin^2\varphi)$. Заметим, что φ_t удовлетворяет дифференциальному уравнению $d\varphi_t = P(\varphi_t)\,dt + Q(\varphi_t)\,dw(t)$, где $Q(\varphi) = \cos\varphi\,(\gamma\cos\varphi + \delta\sin\varphi)$, $P(\varphi) = [(\alpha + 1)\cos\varphi + \beta\sin\varphi]\cos\varphi - 1 - (\gamma\cos\varphi + \delta\sin\varphi)^2 \sin\varphi\cos\varphi$. Функция $Q(\varphi) = 0$ при $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(-\gamma/\delta)$, $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg}(-\gamma/\delta)$, $\varphi_3 = 3\pi/2$.

Найдем знак функции $P(\varphi)$ в нулях $Q(\varphi)$. $P(\varphi_1) = P(\varphi_3) = -1$, $P(\varphi_0) = P(\varphi_2) = \Delta/(\gamma^2 + \delta^2)$.

Предположим, что $\Delta > 0$. Тогда точки φ_0 и φ_1 проходимы против часовой стрелки, а точки φ_1 и φ_3 — по часовой стрелке. Интервалы (φ_0, φ_1) и (φ_2, φ_3) инвариантны для ξ (попав в такой интервал, ξ_t останется там навсегда).

На каждом из инвариантных интервалов имеется эргодическое распределение. Его плотность определяется (см. [6]) из уравнения

$$\partial(P(\varphi)\rho)/\partial\varphi - 2^{-1}\partial^2(Q^2(\varphi)\rho)/\partial\varphi^2 = 0. \tag{6}$$

Найдем вид эргодического распределения в интервале (φ_0, φ_1). Проинтегрировав обе части (6), получаем $P(\varphi)\rho - 2^{-1}\partial(Q^2(\varphi)\rho)/\partial\varphi = c_1$, или $Q^2(\varphi)\rho P(\varphi)/Q^2(\varphi) - 2^{-1}\partial(Q^2(\varphi)\rho)/\partial\varphi = c_1$. Обозначив $Z(\varphi) = Q^2(\varphi)\rho$, получаем для $Z(\varphi)$ следующее уравнение: $Z' - 2P(\varphi)Z/Q^2(\varphi) = c_1$. Это линейное уравнение; его решение имеет вид

$$Z(\varphi) = \exp\left(2\int P(\varphi)\,Q^{-2}(\varphi)\,d\varphi\right)\left[c_2 + c_1\int\limits_{\varphi^*}^{\varphi} \exp\left(-2\int P(\theta)/Q^2(\theta)\,d\theta\right)d\theta\right],$$

где $\varphi^* \in (\varphi_0, \varphi_1)$.

Вычислим

$$\int P(\varphi)\,Q^{-2}(\varphi)\,d\varphi = -\delta^{-2}\operatorname{tg}\varphi - \Delta\delta^{-4}(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{-1} + \ln|\cos\varphi| +$$

$$+ (\beta + 2\gamma/\delta)\,\delta^{-2}\ln|\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta|.$$

Для того чтобы функция $Z(\varphi)$ была ограничена, необходимо, чтобы $c_1=0$. Тогда $Z(\varphi) = c_2\exp\left(2\int P(\varphi)/Q^2(\varphi)\,d\varphi\right)$. Следовательно,

$$\rho(\varphi) = Z(\varphi)/Q^2(\varphi) = c_2(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{2(\beta+2\gamma/\delta)/\delta^2-2}\cos^{-2}\varphi\,\times$$

$$\times\exp\{-2\delta^{-2}[\operatorname{tg}\varphi + \Delta\delta^{-2}(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{-1}]\}. \qquad (7)$$

Так как $\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho(\varphi)\,d\varphi = 1$, то

$$c_2 = \left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{2(\beta+2\gamma/\delta)/\delta^2-2}\cos^{-2}\varphi\exp\{-2\delta^{-2}[\operatorname{tg}\varphi + \right.$$

$$\left. + \Delta\delta^{-2}(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{-1}]\}\,d\varphi\right)^{-1}.$$

Поскольку коэффициенты в уравнении (6) периодичны с периодом π, то в интервале (φ_2, φ_3) эргодическое распределение также определяется формулой (7).

Из каждой точки φ процесс ξ с вероятностью 1 за конечное время попадает в один из интервалов $I_0 = (\varphi_0, \varphi_1)$ или $I_1 = (\varphi_2, \varphi_3)$. Обозначим через $P_i(\varphi)$ вероятность попасть в I_i, а через π_i — эргодическое распределение в интервале I_i, $i = 0, 1$. Тогда $P_0(\varphi) + P_1(\varphi) = 1$, и так как $R(\varphi)$ периодична с периодом π, то

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int\limits_0^t R(\xi_t)\,dt = P_0(\xi_0)\int\limits_{I_0} R(\varphi)\,\pi_0(d\varphi) + P_1(\xi_0)\int\limits_{I_1} R(\varphi)\,\pi_1(d\varphi) =$$

$$= \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}[\sin\varphi((\alpha+1)\cos\varphi + \beta\sin\varphi) + (\gamma\cos\varphi + \delta\sin\varphi)^2(1/2 - \sin^2\varphi)]\,\times$$

$$\times\cos^{-2}\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{2(\beta+\gamma/\delta)/\delta^2-2}\exp\{-2\delta^{-2}[\Delta\delta^{-2}(\operatorname{tg}\varphi + \gamma/\delta)^{-1} + \operatorname{tg}\varphi]\}\,d\varphi.$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что $\int\limits_{I_0} R(\varphi)\,\rho(\varphi)\,d\varphi < 0$, то $|X_t x| \to 0$ при $t\to\infty$, т. е. решение системы (5) устойчиво с вероятностью 1; в противном случае устойчивости нет.

Предположим, что $\Delta < 0$. Тогда движение во всех особых точках проходит в одном направлении и все точки сообщаются между собой.

Пусть τ — это время, за которое процесс ξ_t пройдет весь цикл от φ_1 к φ_1. Тогда при $t\to\infty$ $t^{-1}\int\limits_0^t R(\varphi_s)\,ds \sim 1/M\tau M_\varphi.\int\limits_0^\tau R(\varphi_s)\,ds$. Пусть ζ_k — момент достижения процессом ξ_t точки φ_k, $k = \overline{0,3}$. Обозначим $g(\varphi) = M_\varphi\int\limits_0^{\zeta_0} R(\varphi_s)\,ds$, $\varphi\in[\varphi_0, \varphi_1]$. Функция $g(\varphi)$ удовлетворяет (см. [6]) дифференциальному уравнению $P(\varphi)\,g'(\varphi) + Q^2(\varphi)\,g''(\varphi)/2 = -R(\varphi)$ с начальным условием $g(\varphi_0) = 0$. Обозначим $W(\varphi) = \exp\left(\int\limits_{\varphi_0^*}^{\varphi} 2P(\theta)/Q^2(\theta)\,d\theta\right)$, где $\varphi_0^*\in(\varphi_0, \varphi_1)$. Заметим, что $W(\varphi)\to\infty$ при $\varphi\to\varphi_0$ и $W(\varphi)\to 0$ при $\varphi\to\varphi_1$. Так как $[W(\varphi)\,g'(\varphi)]' = g''(\varphi)\,W(\varphi) + 2P(\varphi)\,W(\varphi)\,g'(\varphi)/Q^2(\varphi) = W(\varphi)\,\times$

$\times [g''(\varphi) + 2P(\varphi)\, g'(\varphi)/Q^2(\varphi)] = -2R(\varphi)\, W(\varphi)/Q^2(\varphi)$, то $W(\varphi)\, g'(\varphi) = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} 2P(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta + c_1$, или

$$g'(\varphi) = c_1 W^{-1}(\varphi) + W^{-1}(\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta.$$

Функция $W^{-1}(\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta$ ограничена. Действительно,

$$\left| W^{-1}(\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta \right| = \left| W^{-1}(\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} (R(\theta)/P(\theta))\, (2P(\theta)/Q^2(\theta)) \times W(\theta)\, d\theta \right| \leqslant \sup_{\varphi \leqslant \theta \leqslant \varphi_1} | R(\theta)/P(\theta) |\, | W^{-1}(\varphi)\, (W(\varphi_1) - W(\varphi)) | = \sup_{\varphi \leqslant \theta \leqslant \varphi_1} | R(\theta)/P(\theta) |.$$

Тогда для того чтобы функция $g'(\varphi)$ была ограничена, необходимо, чтобы $c_1 = 0$. Таким образом, $g'(\varphi) = W^{-1}(\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta$. Отсюда следует, что $g(\varphi) = \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} g'(\theta_1)\, d\theta_1 + c$. Используя начальное условие $g(\varphi_0) = 0$, получаем $c = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_0} g'(\theta_1)\, d\theta_1$. Следовательно,

$$g(\varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} g'(\theta_1)\, d\theta_1 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \left[W^{-1}(\theta_1) \int\limits_{\theta_1}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta \right] d\theta_1.$$

Таким образом,

$$M_{\varphi_1} \int\limits_0^{\zeta_0} R(\varphi_s)\, ds = g(\varphi_1) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[W^{-1}(\theta_1) \int\limits_{\theta_1}^{\varphi_1} 2R(\theta)\, W(\theta)/Q^2(\theta)\, d\theta \right] d\theta_1.$$

Аналогично можно найти $M_{\varphi_0} \int\limits_0^{\zeta_3} R(\varphi_s)\, ds$, $M_{\varphi_3} \int\limits_0^{\zeta_2} R(\varphi_s)\, ds$ и $M_{\varphi_2} \int\limits_0^{\zeta_1} R(\varphi_s)\, ds$

Заметим, что

$$M_{\varphi_1} \int\limits_0^{\tau} R(\varphi_s)\, ds = M_{\varphi_1} \int\limits_0^{\zeta_0} R(\varphi_s)\, ds + M_{\varphi_0} \int\limits_0^{\zeta_3} R(\varphi_s)\, ds + M_{\varphi_3} \int\limits_0^{\zeta_2} R(\varphi_s)\, ds + M_{\varphi_2} \int\limits_0^{\zeta_1} R(\varphi_s)\, ds.$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что $M_{\varphi_1} \int\limits_0^{\tau} R(\varphi_s)\, ds < 0$, то $| X_t x | \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. решение системы (5) устойчиво с вероятностью 1; в противном случае устойчивости нет.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
2. *Турчин В. И.* Об асимптотическом поведении решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1982, вып. 27, с. 139—148.
3. *Беме О.* Об асимптотическом поведении решений системы линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1980, вып. 20, с. 10—21.
4. *Рудомино-Дусятская И. А.* О среднеквадратической устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений.— Киев, 1983,— 31 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 507Ук — Д83.
5. *Maliavin P.* Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.— Proc. of Intern. Symp on Stoch. Eq. Tokyo, 1978, p. 194—263.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 353 с.

Киев. гос. ун-т Поступила 23. 11 .83