УДК 517.925.34

С. К. Норкин

Локальная и асимптотическая воронки для интегрального O-многообразия

1. Рассмотрим систему

$$\alpha(x)\, dy/dx = F(x, y), \tag{1}$$

определенную в области

$$S = \{(x, y) : x \in I =]0; a[, \| y \| \in [0; b[\}, \tag{2}$$

где $y = \operatorname{colon}(u, v) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$; $(\alpha_1, \alpha_2) : I \to \mathbf{R}^2_+$, $\alpha(x) = \operatorname{diag}(\alpha_1(x), \alpha_2(x))$; $F(x, y) = \operatorname{colon}(F_1(x, u, v),\ F_2(x, u, v)) : \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$; $k, n \in \mathbf{N}$, $n > k$; $a, b \in \mathbf{R}_+$ — фиксированные достаточно малые числа; $\| \cdot \|$ — евклидова норма.

Система (1) предполагается из класса $(\mathbf{C}(S), U_n)$. Это означает, что, во-первых, $\alpha \in \mathbf{C}(I)$, $F \in \mathbf{C}(S)$, а во-вторых, для любой точки $(x_0, y_0) \in S$ существует единственное решение $y(x; x_0, y_0)$, рассматриваемое на максимальном интервале существования.

Исследуем свойства локального интегрального O-множества, определяемого следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \{(x, y(x)) \in S : x \in I_0 =]0; x_0], \quad \alpha(x)\, dy(x)/dx \equiv F(x, y(x)),$$
$$\lim_{x \to +0} \| y(x) \| = 0\}, \quad x_0 < a. \tag{3}$$

Множество $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ будем называть интегральным O-подмножеством, если $\forall (x, y^*) \in \mathfrak{M}^*$ решение $y(x; x^*, y^*)$ системы (1) дает $(x, y(x; x^*, y^*)) \in \mathfrak{M}^*$ $\forall x \in I_0$.

Пусть Ω — некоторая область. Обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$ максимальное интегральное O-подмножество в области Ω.

Определение 1. *Область Ω назовем локальной воронкой для локального интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega)$ не пусто и $\mathfrak{M}(\Omega) \subset \mathfrak{M}$.*

Определение 2. *Локальную воронку Ω назовем асимптотической для локального интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}$.*

В предлагаемой работе выясняется, в каком случае специально выбранное подмножество

$$\Omega = \{(x, u, v) \in S : x \in I_0,\ \| u \| < h(x) \| v \|,\ 0 < \| v \| \leqslant H(x)\}, \tag{4}$$

где h, $H \in \mathbf{C}(I_0)$, $h(x)$, $H(x) = o(1)$ при $x \to +0$ *является локальной воронкой, а в каком случае — асимптотической воронкой для локального интегрального O-многообразия $\mathfrak{M}$ размерности $n - k + 1$.*

2. Поставленную задачу решаем для следующего класса вектор-функций $F(x, y)$. Пусть в области S

$$(u_2 - u_1, F_1(x, u_2, v_2) - F_1(x, u_1, v_1)) \leqslant L_1(x) \| u_2 - u_1 \|^2 + \lambda_1(x) \| v_2 - v_1 \|^2; \tag{5}$$

$$(v_2 - v_1, F_2(x, u_2, v_2) - F_2(x, u_1, v_1)) \geqslant L_2(x) \| v_2 - v_1 \|^2 - \lambda_2(x) \| u_2 - u_1 \|^2, \tag{6}$$

где

$$L_i, \lambda_i \in \mathbf{C}(I),\ i = 1, 2; \qquad L_i(x), \lambda_i(x) > 0, \quad x \in I; \qquad \| F_i(x, 0, 0) \| \equiv 0,$$
$$i = 1, 2. \tag{7}$$

Структура множества $\mathfrak{M}$ для неравенств другого вида изучена в работах [1, 2].

Введем обозначения

$$h(x) = \left[\int_x^a \frac{2\lambda_2(s)}{\alpha_2(s)} \exp \int_x^s \frac{2L_1(\tau)}{\alpha_1(\tau)}\, d\tau ds \right]^{-1/2}, \tag{8}$$

$$H(x) = c \exp \int\limits_{x}^{x_0} \frac{\lambda_2(s) h^2(s) - L_2(s)}{\alpha_2(s)} ds, \tag{9}$$

где $c \in \left]0; \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$ — фиксированное число.

Расходимость хотя бы одного из интегралов $\int\limits_{+0} \frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} dx$, $\int\limits_{+0} \frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} dx$ дает свойство

$$h(x) = o(1) \text{ при } x \to +0. \tag{10}$$

3. Докажем предварительно, что O-подмножество $\mathfrak{M}(\Omega)$ не пусто.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (5) — (7) *и свойство* (10). *Если*

$$\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x) h^2(x)} < \frac{L_2(x)}{\alpha_2(x)}, \text{ когда } x \in I_0, \quad L_2(x) - \lambda_2(x) h^2(x) > 0, \tag{11}$$

и расходится интеграл

$$\int\limits_{+0} \frac{L_2(x) - \lambda_2(x) h^2(x)}{\alpha_2(v)} dx = +\infty, \tag{12}$$

то $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$, *причем* $\forall v_0 \in]0; c[$ $\exists u_0$ *такое, что решение* $y(x; x_0, y_0)$, $y_0 = \operatorname{colon}(u_0, v_0)$, *системы* (1) *дает включение*

$$(x, y(x; x_0, y_0)) \in \mathfrak{M}(\Omega) \quad \forall x \in I_0. \tag{13}$$

Доказательство. Полагаем

$$\xi(x) = \| u \|^2 - h^2(x) \| v \|^2,$$

$$\partial\Omega = \{(x, u, v) \in S : \xi(x) = 0; \qquad x \in I_0, \quad \| v \| \in]0; c[\}.$$

В силу системы (1), учитывая неравенства (5), (6) и тождество (7), находим на множестве $\partial\Omega$, что

$$\frac{1}{2} \xi'(x) |_{\partial\Omega} \leqslant - h'(x) h(x) \| v \|^2 + \frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} h^2(x) \| v \|^2 + \frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} h^4(x) \| v \|^2 + \\ + \frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)} \| v \|^2 - \frac{L_2(x)}{\alpha_2(x)} h^2(x) \| v \|^2.$$

Легко проверить, что функция (8) является решением уравнения

$$h' - \frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} h - \frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} h^3 = 0. \tag{14}$$

Поэтому, учитывая неравенства (11), получаем $\xi'(x)|_{\partial\Omega} < 0$. Таким образом, учитывая второе неравенство в (11), получаем, что $\partial\Omega$ является множеством точек строгого выхода из области Ω при убывании значений x.

Из топологического принципа Важевского [3] следует, что для $x_0 \in I \forall \| v_0 \| \in]0; c[$ существует хотя бы одно u_0, $(x_0, u_0, v_0) \in \Omega$, такое, что система (1) имеет решение $y(x; x_0, y_0)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y_0 = \operatorname{colon}(u_0, v_0)$, которое остается в Ω на левом максимальном интервале существования $]\omega_-; x_0]$.

Возьмем x_0 настолько малым, чтобы $h(x) \leqslant 1$, когда $x \in I_0$. Из неравенства (6) для решения $y(x; x_0, y_0)$ из $\mathfrak{M}(\Omega)$ легко получить оценку $\| v(x) \| \leqslant H(x)$, где функция $H(x)$ определяется формулой (9). Из свойства (12), равенства (9) на основании теоремы о продолжении решения следует, что $\omega_- = 0$. Поэтому $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$ $\forall x \in I_0$, а соответствующее решение $y(x; x_0, y_0)$, $y_0 = \operatorname{colon}(u_0, v_0)$, дает включение (13). Лемма доказана.

Замечание. По существу лемма 1 доказывается при выполнении условий (5) и (6), когда $(u_2, v_2) = (u, v)$, $(u_1, v_1) = (0, 0)$.

4. Изучим теперь структуру O-множества $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и сходится интеграл*

$$\int\limits_{+0} \frac{L_1(x)\, h^2(x) + \lambda_1(x)}{\alpha_1(x)\, h^2(x)}\, dx < +\infty. \tag{15}$$

Тогда область Ω *является асимптотической воронкой для локального интегрального* O*-множества* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Допустим, что Ω не является асимптотической воронкой, т. е. $\mathfrak{M} \setminus \Omega \neq \varnothing$. Значит существует решение $y(x; x_0, y_0)$, которое дает O-кривую $(x, y(x; x_0, y_0))$ либо находящуюся вне области Ω, либо выходящую из Ω через $\partial\Omega$ при убывании значений x. В любом случае для некоторого $x_1 \in I_0$ выполняется неравенство $\| u(x) \| > h(x) \| v(x) \|$ $\forall x \in]0; x_1]$, так как $\partial\Omega$ является множеством точек строгого выхода из области Ω при убывании x. Из записанного неравенства и (5) следует, что

$$\frac{d\| u(x) \|}{dx} \leqslant \frac{L_1(x)\, h^2(x) + \lambda_1(x)}{\alpha_1(x)\, h^2(x)} \| u(x) \|,$$

или после интегрирования

$$\| u(x) \| \leqslant \| u(t) \| + \int\limits_t^x \frac{L_1(s)\, h^2(s) + \lambda_1(s)}{\alpha_1(s)\, h^2(s)} \| u(s) \|\, ds, \quad x \in [t; x_1].$$

Фиксируя значение t и применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\| u(x) \| \leqslant \| u(t) \| \exp \int\limits_t^x \frac{L_1(s)\, h^2(s) + \lambda_1(s)}{\alpha_1(s)\, h^2(s)}\, ds.$$

Учитывая сходимость интеграла (15), фиксируя теперь x и устремляя t к $+0$, получаем, что $\| u(+0) \| > 0$, а это противоречит предположению $\mathfrak{M} \setminus \Omega \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subset \Omega$, и теорема доказана.

По сути теорема 1 дает лишь асимптотику O-решений из $\mathfrak{M}$ при помощи функций (8) и (9), но не выясняет структуру самого O-множества $\mathfrak{M}$. Следующий результат показывает дополнительно, что $\mathfrak{M}$ является в области Ω многообразием определенной размерности.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и существует функция* $D \in \mathbf{C}(I)$, $D(x) \geqslant 0$, $x \in I$ *такая, что*

$$\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)\, h^2(x)} - \frac{\lambda_2(x)\, h^2(x)}{\alpha_2(x)} \leqslant D(x), \quad x \in I_0, \tag{16}$$

и сходится интеграл

$$\int\limits_{+0} D(x)\, dx < +\infty. \tag{17}$$

Тогда 1) $\dim \mathfrak{M}(\Omega) = n - k + 1$; 2) Ω *является локальной воронкой для интегрального* O*-множества* $\mathfrak{M}$ *при расходимости интеграла* (15); 3) Ω *является асимптотической воронкой для интегрального* O*-многообразия* $\mathfrak{M}$ *при сходимости интеграла* (15); 4) *локальное интегральное* O*-многообразие* $\mathfrak{M}(\Omega)$ *размерности* $n - k + 1$ *имеет представление*

$$u = h(x)\, g(x, v), \tag{18}$$

где отображение $g(x, v)$ *непрерывно на множестве*

$$\mathfrak{N} = \{(x, v) : x \in I_0, \quad \| v \| \in]0; c[\}. \tag{19}$$

Доказательство. В системе (1) делаем замену

$$u = h(x)\, w, \tag{20}$$

получим систему

$$\alpha_1(x) \frac{dw}{dx} = \frac{F_1(x, h(x)\, w, v)}{h(x)} - \frac{\alpha_1(x)\, h'(x)}{h(x)} w \equiv G_1(x, w, v),$$

$$\alpha_2(x) \frac{dv}{dx} = F_2(x, h(x)\, w, v) \equiv G_2(x, w, v), \tag{21}$$

которую будем изучать в области $S_1 = \{(x, w, v) : x \in I,\ \|w\| < \|v\|,\ \|v\| \in\ \in]0; b/\sqrt{2}[\}$.

Очевидно, что каждой интегральной O-кривой системы (21) в области S_1 соответствует единственное O-решение из $\mathfrak{M}(\Omega)$, и наоборот.

Пусть $x_0 \in I$, $\|v_0\| \in]0; c[$ — произвольные значения. На основании леммы 1 существует u_0, $(x_0, u_0, v_0) \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Обозначим через $w_0 = u_0/h(x_0) = g(x_0, v_0)$. Покажем, что отображение $g(x, v)$ однозначно на множестве (19). Допустим, что существует еще $\overline{w}_0$ такое, что $(x_0, h(x_0)\overline{w}_0, v_0) \in \mathfrak{M}(\Omega)$. В этом случае имеем два O-решения $(w(x), v(x))$ и $(w_1(x), v_1(x))$, удовлетворяющие начальным условиям $w(x_0) = w_0$, $v(x_0) = v_0$; $w_1(x_0) = \overline{w}_0$, $v_1(x_0) = v_0$. Полагаем

$$\omega(x) = \|w(x) - w_1(x)\|^3 - \|v(x) - v_1(x)\|^3. \tag{22}$$

Из условия единственности следует, что $\|w(x) - w_1(x)\| + \|v(x) - v_1(x)\| > 0$, $x \in I_0$. Так как $\omega(x_0) = \|w_0 - \overline{w}_0\|^3 > 0$, то положим $x^* = \inf\{x \in I_0 : \omega(s) > 0,\ s \in [x; x_0]\}$. Покажем, что $x^* = 0$. Допустим, что $x^* > 0$. Тогда в интервале $]x^*; x_0]$ выполняется неравенство $\|v(x) - v_1(x)\| < \|w(x) - w_1(x)\|$. Из этого неравенства, неравенств (5) и (6) в силу системы (21) следует, что

$$\frac{d\omega(x)}{dx} \leqslant 3\left(\frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} + \frac{\lambda_2(x) h^2(x)}{\alpha_2(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}\right)\|w(x) - w_1(x)\|^3 + $$

$$+ 3\left(\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x) h^2(x)}\|w(x) - w_1(x)\|^3 - \frac{L_2(x)}{\alpha_2(x)}\|v(x) - v_1(x)\|^3\right).$$

Учитывая, что функция $h(x)$ является решением уравнения (14), применяя неравенство (11) и равенство (22), получаем

$$\frac{d\omega(x)}{dx} \leqslant 3\,\frac{L_2(x)}{\alpha_2(x)}\,\omega(x).$$

Интегрируя от x^* до x, учитывая равенство $\omega(x^*) = 0$ и сходимость интеграла $\int\limits_{x^*}^{x} \frac{L_2(s)}{\alpha_2(s)}\,ds$, при $x^* > 0$, получаем по лемме Гронуолла, что $\omega(x) \equiv 0$. Это противоречит условию $\omega(x_0) > 0$.

Итак, в интервале I_0 $\|v(x) - v_1(x)\| < \|w(x) - w_1(x)\|$. Из этого неравенства и (5) вытекает, что

$$\frac{d}{dx}\|w(x) - w_1(x)\| \leqslant \left(\frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x) h^2(x)}\right)\|w(x) - w_1(x)\|.$$

Применяя (14) и (16), получаем $\frac{d}{dx}\|w(x) - w_1(x)\| \leqslant D(x)\|w(x) - w_1(x)\|$.

Интегрирование этого неравенства, применение затем леммы Гронуолла и сходимость интеграла (17) показывает, что $\|w(x) - w_1(x)\| \not\to 0$, когда $x \to +0$. Тем самым однозначность отображения $g(x, v)$ доказана.

Непрерывность отображения $g(x, v)$ следует из интегральной непрерывности. К тому же существует обратное отображение — проекция $(x, g(x, v), v) \to (x, v)$, которое очевидно однозначно и непрерывно, если $(x, h(x) \times g(x, v), v) \in \mathfrak{M}(\Omega)$.

Итак, множества $\mathfrak{M}\ \Omega)$ и (19) гомеоморфны, а потому $\dim \mathfrak{M}(\Omega) = n - k + 1$.

Заключение 1) теоремы доказано. Заключение 2) следует из однозначности отображения $g(x, v)$; заключение 3) — из теоремы 1; заключение 4) — из непрерывности отображения $g(x, v)$ и замены (20). Теорема доказана.

5. В качестве приложения полученных результатов изучим существование TO-траекторий квазиоднородной автономной системы в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, примыкающих к точке покоя O, и природу множества, образованного дугами таких TO-траекторий, расположенного в некоторой малой «конической» окрестности исключительного направления. Известно [4—6], что эта задача сводится к изучению структуры O-множества $\mathfrak{M}$ системы (1) в области (2), а сама система в наших обозначениях может быть записана после линеаризации в виде

$$xdu/dx = Pu + U(u, v) + f_1(x, u, v) \equiv F_1(x, u, v), \qquad xdv/dx = Qv + V(u, v) + f_3(x, u, v) \equiv F_2(x, u, v). \tag{23}$$

Будем предполагать, что k-мерная матрица P имеет собственные значения с неположительными действительными частями, а $n-k$-мерная матрица Q имеет собственные значения с положительными действительными частями. Кроме того, считаем, что

$$(u_2 - u_1, P(u_2 - u_1)) \leqslant 0, \tag{24}$$

$$(v_2 - v_1, Q(v_2 - v_1)) \geqslant c\,\|v_2 - v_1\|, \quad c \in \mathbf{R}_+, \tag{25}$$

$$(u_2 - u_1, U(u_2, v_2) - U(u_1, v_1)) \leqslant l_1 \|u_2 - u_1\|^2, \quad l_1 \in \mathbf{R}_0, \tag{26}$$

$$V(u, v) \in \mathrm{Lip}_{u,v}(l_2), \quad l_2 \in \mathbf{R}_+, \tag{27}$$

$$f_i(x, u, v) \in \mathrm{Lip}_{u,v}(d_i(x)), \quad i = 1, 2, \tag{28}$$

где $d_i \in \mathbf{C}(I)$, $d_i(x) \geqslant 0$, $x \in I$,

$$\|f_i(x, 0, 0)\| \equiv 0, \quad i = 1, 2. \tag{29}$$

Легко проверить что справедливы условия (5) — (7) с функциями

$$L_1(x) = l_1 + \frac{3}{2} d_1(x), \qquad \lambda_1(x) = \frac{1}{2} d_1(x), \qquad L_2(x) = c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2} d_2(x),$$

$$\lambda_2(x) = \frac{1}{2}(l_2 + d_2(x)). \tag{30}$$

Теорема 3. *Пусть для системы* (23) *в области* (2) *выполнены условия* (24) — (29). *Если* 1) $l_1 > 0$; 2) $d_2(x) \leqslant \varepsilon$, $x \in I_0$; 3) $c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2}\varepsilon > 0$; 4) $d_1(x) < \dfrac{4l_1\left(c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)}{e^M (l_2 + \varepsilon) a^{2l_1}} x^{2l_1}$, $x \in I_0$, где $M = 3\int\limits_0^a \frac{d_1(x)}{x} dx$; 5) *сходится интеграл* $\int\limits_{+0} \frac{d_1(x)}{x^{2l_1+1}} dx < +\infty$, *то область* Ω *является локальной воронкой для интегрального* O-*множества* $\mathfrak{M}$ *размерности* $\dim \mathfrak{M}(\Omega) = n - k + 1$, *а* O-*многообразие* $\mathfrak{M}(\Omega)$ *имеет представление* (18).

Доказательство. Очевидно, что условие (15) не выполняется, а потому нет гарантии, что Ω является асимптотической воронкой для $\mathfrak{M}$.

Проверим сначала справедливость леммы 1. Из равенства (8) с учетом (30) и условий теоремы 1) и 2) получаем, что

$$\frac{1}{h^2(x)} \leqslant \frac{e^M (l_2 + \varepsilon) a^{2l_1}}{2l_1 x^{2l_1}}. \tag{31}$$

Поэтому

$$\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x) h^2(x)} \leqslant \frac{e^M (l_2 + \varepsilon) a^{2l_1}}{4l_1} \frac{d_1(x)}{x^{2l_1+1}} \tag{32}$$

$$\frac{L_2(x)}{\alpha_2(x)} \geqslant \frac{c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2}\varepsilon}{x}.$$

Условие 4) и предыдущие два неравенства дают (11).

Из равенства (8) с учетом (30) следует, что

$$\frac{1}{h^2(x)} \geqslant \frac{l_2(a^{2l_1} - x^{2l_1})}{2l_1 x^{2l_1}}.$$

Поэтому

$$L_2(x) - \lambda_2(x) h^2(x) \geqslant c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{l_1(l_2+\varepsilon)}{l_2(a^{2l_1} - x_0^{2l_1})} x^{2l_1},$$

и x_0 можно выбрать настолько малым, чтобы расходился интеграл (12), так как выполняется условие 3).

Таким образом, справедлива лемма 1.

Применение неравенства (31) дает:

$$\frac{\lambda_2(x) h^2(x)}{\alpha_2(x)} \geqslant \frac{l_1 l_2 x^{2l_1 - 1}}{e^M (l_2+\varepsilon) a^{2l_1}}.$$

Учитывая (32), будем иметь

$$\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x) h^2(x)} - \frac{\lambda_2(x) h^2(x)}{\alpha_2(x)} \leqslant \frac{e^M (l_2+\varepsilon) a^{2l_1}}{4l_1} \frac{d_1(x)}{x^{2l_1+1}} - \frac{l_1 l_2 a^{2l_1-1}}{e^M (l_2+\varepsilon) a^{2l_1}} \equiv D(x).$$

Для функции $D(x)$ вычитаемое очевидно интегрируемо в интервале I, а уменьшаемое интегрируемо в I в силу 5). Таким образом, справедлива теорема 2, которая дает заключение теоремы 3.

Т е о р е м а 4. *Пусть для системы* (23) *в области* (2) *выполнены условия* (24)—(29). *Если* 1) $l_1 = 0$; 2) $d_2(x) \leqslant \varepsilon$, $x \in I_0$; 3) $c - \frac{3}{2} l_2 - \frac{3}{2}\varepsilon > 0$;

4) $d_1(x) \leqslant \dfrac{l_2}{e^{2M}(l_2+\varepsilon)^2 \ln^2 \frac{1}{x}}$, $x \in I_0$, где $M = 3\displaystyle\int_0^a \frac{d_1(x)}{x} dx$; 5) сходится интеграл $\displaystyle\int_{+0} \frac{d_1(x) \ln \frac{1}{x}}{x} dx < +\infty$, *то область* Ω *является асимптотической воронкой для интегрального О-многообразия* $\mathfrak{M}$ *размерности* $\dim \mathfrak{M} = n - k + 1$, *а О-многообразие* $\mathfrak{M}$ *имеет представление* (18).

Доказывается теорема точно так же как и теорема 3; при этом проверяется дополнительно выполнение условия теоремы 1.

З а м е ч а н и е. Ограничения (7) и (29) не существенны, так как аналогичные результаты можно получить без аннулирования вектор-функций $F_i(x, 0, 0)$ и $f_i(x, 0, 0)$.

1. *Норкин С. К.* О размерности множества, покрытого интегральными кривыми, примыкающими к особой точке многомерной системы.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 4, с. 563—569.
2. *Норкин С. К.* Об асимптотической оценке *О*-решений многомерной системы.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 11, с. 2079—2081.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
4. *Андреев А. Ф.* Об исключительном направлении системы *n*-го порядка в точке покоя.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 2, с. 187—194.
5. *Норкин С. К.* Единственность *О*-кривой вдоль направления, аналогичного исключительному.— Там же, 1975, **11**, № 4, с. 758—759.
6. *Бодунов Н. А.* О многообразиях *О*-кривых многомерных систем.— Там же, 1975, **11**, № 5, с. 914—917.

Одес. политехн. ин-т

Поступила 05.07.83
после доработки— 07.08.84