УДК 517.938

Ю. А. Митропольский, В. Л. Кулик

О применении квадратичных форм в теории инвариантных многообразий

В настоящей статье предлагается обзор некоторых новых результатов, полученных в последнее время по теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем [1—9], часть которых была представлена в докладе на школе но малому параметру [10].

Поскольку свойства структурной устойчивости инвариантных многообразий в автономных системах дифференциальных уравнений во многом зависят от линейных систем уравнений, то первым шагом исследований были подвержены системы вида

$$dx/dt = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на всей оси $R =]-\infty, \infty[$ матрицей коэффициентов $A(t)$. Несмотря на простоту системы (1) и очень большое количество работ по исследованию решений таких систем (см. [11—33]), все же некоторые вопросы до сих пор остаются открытыми. В частности, это вопросы о слабой регулярности системы (1) (см. [12, 13]). Например: 1. При каких условиях, накладываемых на матрицу коэффициентов $A(t)$, неоднородная система уравнений

$$dx/dt = A(t)\,x + f(t) \tag{2}$$

при каждой непрерывной и ограниченной на R вектор-функции $f(t)$ имеет хотя бы одно ограниченное на R решение $x = x(t)$? Будет ли при этом обладать свойством слабой регулярности возмущенная система уравнений $dx/dt = (A(t) + B(t))\,x$? Действенным методом исследования подобных вопросов оказался метод применения знакопеременных форм, имеющих знакоопределенную производную вдоль решений соответствующей системы. Хотя в работе [15, с. 369] указывается на то, что этот метод не позволяет охарактеризовать двойные экспоненциальные дихотомии на всей оси R, тем не менее из работ [23, 27] прояснились возможности получения результатов и в этом направлении.

Используем следующие обозначения: $C^0(R)$ — пространство непрерывных функций $F(t)$ (векторных или матричных), ограниченных на всей оси R; $C^1(R)$ — подпространство из $C^0(R)$ функций $F(t)$, имеющих непрерывную производную; $\Omega_\tau^t(A)$ — матрицант системы (1), $\Omega_\tau^\tau(A) = I_n$ — n-мерная единичная матрица; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в R^n, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, A^* — транспонированная матрица.

Пусть существует квадратичная форма $V(t, x) = \langle S(t)\,x, x\rangle$, $S^*(t) \equiv S(t) \in C^1(R)$ такая, что производная от нее, взятая вдоль решений системы (1), отрицательно определена:

$$\dot{V}(t, x) = \langle (dS(t)/dt + S(t)\,A(t) + A^*(t)\,S(t))\,x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{3}$$

Если дополнительно предположить невырожденность матрицы $S(t)$ при $\forall t \in R$, то отсюда последует э-дихотомичность системы (1) на всей оси R. Не исключена возможность, что $\det S(t)$ в некоторые моменты времени превращается в нуль. При этом доказано, что таких моментов не более чем n, где n — размерность системы (1). Это говорит, в частности, о том, что почти периодическая матрица $S(t)$, удовлетворяющая условию (3), всегда будет невырожденной. Оказалось, что условие невырожденности матрицы $S(t)$ можно заменить эквивалентным условием существования другой симметричной матрицы $S_1(t) \in C^1(R)$, удовлетворяющей условию

$$\langle (dS_1(t)/dt - S_1(t)A^*(t) - A(t)S_1(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{4}$$

Таким образом, из условий (3), (4) следует невырожденность обеих матриц $S(t)$, $S_1(t)$, а значит, э-дихотомичность системы (1) на всей оси R.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система уравнений* (2) *при каждой вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ имела хотя бы одно ограниченное на всей оси R решение, необходимо и достаточно, чтобы существовала n-мерная симметричная матрица $S_1(t) \in C^1(R)$, удовлетворяющая условию* (4).

Заметим, что определитель матрицы $S_1(t)$ в некоторых моментах времени может превращаться в нуль, и тогда система (2) будет иметь не одно, а множество ограниченных на R решений.

Теорема 2. *Пусть существует матрица $S_1(t) \equiv S_1^*(t) \in C^1(R)$, удовлетворяющая условию* (4), *и ее определитель в некоторых моментах времени $t_1, \ldots, t_k$ превращается в нуль. Тогда система* (1) *э-дихотомична на полуосях R_+, R_- и размерность подпространства $\hat{E}$ ограниченных на всей оси R решений представляется формулой*

$$\dim \hat{E} = n^-(T_2) - n^-(T_1), \tag{5}$$

где T_1, T_2 — фиксированные моменты времени такие, что $T_1 < t_i < T_2$, $i = \overline{1, k}$, $n^-(T)$ — количество отрицательных собственных чисел матрицы $S_1(T)$.

В случае слабой регулярности системы (1) изучен вопрос об интегральном представлении ограниченных на R решений системы (2). При этом оказалось, что каждое ограниченное на R решение системы (2) при условии $f(t) \not\equiv 0$ можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где $G(t, \tau)$ — функция Грина задачи об ограниченных на R решениях

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A)C(\tau), & \tau \leqslant t, \\ \Omega_\tau^t(A)(C(\tau) - I_n), & \tau > t, \end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющая оценке

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant K \exp\{-\beta|t-\tau|\}, \quad K, \beta - \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Известно [11, 16], что в случае э-дихотомичности системы (1) на всей оси R матрица $C(\tau)$ в (7) единственна и представима в виде $C(\tau) = L(\tau)\operatorname{diag}\{I_r, 0\}L^{-1}(\tau)$, где $L(\tau)$ — матрица Ляпунова. Здесь же матрица $C(\tau)$ может и не быть проектирующей: $C^2(\tau) \not\equiv C(\tau)$. Структура этой матрицы выясняется следующим утверждением.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2, тогда:*

1. *Существует бесконечное множество матриц $C(\tau) \in C^0(R)$ таких, что для функции* (7) *выполняется оценка* (8):
2. *Существует фиксированная матрица Ляпунова $L(\tau)$ такова, что для каждой матрицы $C(\tau)$ из* (7), (8) *имеет место равенство*

$$L^{-1}(\tau)C(\tau)L(\tau) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1(\tau) & C_2(\tau) & C_3(\tau) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $C_i(\tau)$ — непрерывные блочные матрицы, поведение которых на $+\infty$ и на $-\infty$ определяется системой (1).

Отметим, что произвол в выборе матричных функций $C_i(\tau)$ из равенства (9) на конечном промежутке изменения τ позволяет записать равенством (6) каждое ограниченное на R решение системы (2), если только $f(t) \not\equiv \not\equiv 0$.

Систему уравнений (1) заменой переменных Ляпунова всегда можно преобразовать к треугольному виду (теорема Перрона), но диагональные функции не всегда могут указать на дихотомичность системы (1) на всей оси R. Это видно из следующего примера:

$$dx_1/dt = -(\operatorname{th} t)\, x_1, \quad dx_2/dt = -x_1 + (\operatorname{th} t)\, x_2. \tag{10}$$

В связи с этим возник вопрос о том, можно ли в случае слабой регулярности на R системы (1) заменой переменных Ляпунова преобразовать ее к блочно-треугольному виду так, чтобы диагональными блоками определялась слабая регулярность на всей оси R. Положительный ответ содержится в следующем утверждении.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2, *тогда*:

1. *Существует замена переменных Ляпунова $x = L(t)y$, преобразующая систему* (1) *к следующему виду*:

$$dy_1/dt = A^+(t)\, y_1, \quad dy_2/dt = A^-(t)\, y_2, \quad dy_3/dt = A_1(t)\, y_1 + A_2(t)\, y_2 + \hat{A}(t)\, y_3. \tag{11}$$

2. *Существует замена переменных Ляпунова $x = T(t)\, v$, которая преобразует систему* (1) *к виду*

$$dv_1/dt = D^+(t)\, v_1 + D_1(t)\, v_3, \qquad dv_2/dt = D^-(t)\, v_2 + D_2(t)\, v_3,$$

$$dv_3/dt = \hat{D}(t)\, v_3. \tag{12}$$

При этом размеры квадратных матриц A^+, A^- совпадают соответственно с размерами D^+, D^- и имеют место оценки

$$\|\Omega_\tau^t(A^+)\| \leqslant K \exp\{-\beta(t-\tau)\}, \quad \tau \leqslant t;$$

$$\|\Omega_\tau^t(D^+)\| \leqslant K \exp\{-\beta(t-\tau)\}, \quad \tau \leqslant t;$$

$$\|\Omega_\tau^t(A^-)\| \leqslant K \exp\{\beta(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau;$$

$$\|\Omega_\tau^t(D^-)\| \leqslant K \exp\{\beta(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau;$$

$$\|\Omega_\tau^t(\hat{A})\| \leqslant K \begin{cases} \exp\{-\beta(t-\tau)\}, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ \exp\{\beta(t-\tau)\}, & t \leqslant \tau \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\|\Omega_\tau(D)\| \leqslant K \begin{cases} \exp\{-\beta(t-\tau)\}, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ \exp\{\beta(t-\tau)\}, & t \leqslant \tau \leqslant 0, \end{cases}$$

где K, β — const > 0.

Кроме рассмотренных вопросов изучались также следующие: 1) существование матрицы $A(t) \in C^0(R)$, удовлетворяющей условию (4) при заданной матрице $S_1(t) \in C^1(R)$; 2) расщепляемость на всей оси R э-дихотомичной только на полуосях R_+, R_- системы уравнений (1) и другие, на которых останавливаться здесь не будем.

Сформулированные в теоремах 1—4 результаты применимы при исследовании линейного расширения динамической системы на торе

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \qquad dx/dt = A(\varphi)\, x. \tag{13}$$

Такие системы дифференциальных уравнений возникают при исследовании нелинейных многочастотных колебаний [7]. Здесь $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ — соответственно вектор-функция и матричная функция непрерывные 2π-периодические по каждой переменной φ_j. Причем $a(\varphi)$ такова, что задача Коши $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, $d\varphi/dt = a(\varphi)$ имеет единственное решение $\varphi_t(\varphi_0)$ и оно непрерывно зависит от φ_0. Один из основных вопросов, здесь возникающих, это вопрос о слабой регулярности линейной системы с параметрами

$$dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))\,x. \tag{14}$$

Расщепление, предложенное в теореме 4, позволяет изучать систему (14) при фиксированном значении параметров φ_0. Изменение же этих параметров приводит к изменению размеров матриц $A^+, \ldots, D^+, \ldots$ в системах (11), (12), а это вызывает значительные трудности. Поэтому был предложен новый метод исследования слабо регулярных линейных систем, позволяющий изучить множества таких систем. Идея этого метода заключается в следующем: пусть система уравнений (2) при каждом фиксированном φ_0 является слабо регулярной, т. е. неоднородная система уравнений $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))\,x + f(t)$ при каждой вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C^1(R)$, тогда расширенная система уравнений

$$dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))\,x, \qquad dy/dt = x - A^*(\varphi_t(\varphi_0))\,y, \qquad y \in R^n, \tag{15}$$

будет э-дихотомичной на всей оси R. Заметим, что система (14) при некоторых значениях φ_0 может и не быть э-дихотомичной на всей оси R (см. [12]).

Используем следующие обозначения: $C^0(\Gamma_m)$ — пространство непрерывных функций $F(\varphi)$ (векторных или матричных), 2π-периодических по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$, т. е. заданных на m-мерном торе Γ_m; $C'(\Gamma_m)$ — подпространство из $C^0(\Gamma_m)$ таких функций $F(\varphi)$, что функция $F(\varphi_t(\varphi_0))$ непрерывно дифференцируема по t, $dF(\varphi_t(\varphi))/dt\,|_{t=0} = \dot F(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$; $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$ — матрицант системы (14).

Напомним определение инвариантного тора [4]. Равенством $x = u(\varphi)$ определяется инвариантный тор для системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)\,x + f(\varphi), \quad f(\varphi) \in C^0(\Gamma_m), \tag{16}$$

если $u(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ и выполняется тождество

$$\dot u(\varphi) \equiv A(\varphi)\,u(\varphi) + f(\varphi). \tag{17}$$

Несмотря на то, что функции $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi)$ — 2π-периодические по каждой переменной φ_j, не исключена возможность существования непериодической функции $u(\varphi)$, дифференцируемой вдоль решений $\varphi_t(\varphi)$ и удовлетворяющей тождеству (17). В этом случае будем говорить, что равенством $x = u(\varphi)$ определяется инвариантное многообразие для системы (16).

Один из основных результатов заключается в следующем.

Т е о р е м а 5. *Пусть существует n-мерная симметричная матрица $S_1(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющая условию*

$$\langle (\dot S_1(\varphi) - S_1(\varphi)\,A^*(\varphi) - A(\varphi)\,S_1(\varphi))\,x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{18}$$

Тогда при каждой вектор-функции $f(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$ система уравнений (16) *имеет по крайней мере один инвариантный тор: $x = u(\varphi)$. Причем, если* $\det S(\varphi)$ *в некоторой точке φ_0 превращается в нуль, то система* (13) *имеет нетривиальные инвариантные торы.*

Рассмотрим пример:

$$d\varphi_1/dt = 1 + h_1 \sin\varphi_1 + h_2 \sin 3\varphi_2, \qquad d\varphi_2/dt = \sqrt{2} + h_3\cos\varphi_1 + h_4 \sin\varphi_2,$$
$$dx/dt = (h_5\cos\varphi_1 + h_6 \sin 2\varphi_2)\,x + f(\varphi_1, \varphi_2).$$

Задача состоит в нахождении таких параметров h_i, $i = \overline{1, 6}$, при которых эта система имеет инвариантный тор $x = u(\varphi_1, \varphi_2) \in C'(\Gamma_2)$ при каждой функции $f(\varphi_1, \varphi_2) \in C^0(\Gamma_2)$. Выбирая в качестве $S_1(\varphi)$ скалярную функцию $\cos\varphi_1$, получаем следующее достаточное условие: $h_1h_5 > 0$, $\min\{|h_1|, 2|h_5|\} \geqslant 1 + |h_2| + 2|h_6|$.

Отметим, что множество параметров h_i зависит от выбора функции $S_1(\varphi)$, и вопрос о выборе в некотором смысле оптимальной матрицы s_1 пока не рассматривался.

Изучались возможности интегрального представления инвариантного тора для системы (16). Оказалось, что в условиях теоремы 5 всегда существует $n \times n$-мерная матрица $C(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, обеспечивающая для функции

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n), & \tau > 0 \end{cases} \tag{19}$$

выполнение оценки

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |\tau|\}, \qquad K, \gamma - \mathrm{const} > 0, \quad \tau \in R. \tag{20}$$

Этого вполне достаточно, чтобы равенством

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau \tag{21}$$

определялся инвариантный тор для системы (16) при каждой вектор-функции $f(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$. Функцию (19) с оценкой (20) обычно называют функцией Грина задачи об инвариантных торах для системы (13) (см. [4, 5]). Иногда вместо оценки (20) от функции (19) требуют более слабое условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \|\, d\tau \leqslant K = \mathrm{const} < \infty. \tag{22}$$

Остается пока открытым вопрос: следует ли оценка (20) из (22)? При этом заметим, что предположение о существовании матрицы $C(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$ в (19), обеспечивающей равномерную сходимость и ограниченность интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \|^2 d\tau$, влечет за собой существование матрицы $S_1(\varphi) = 2\left(\int_0^{\infty} G_0(\tau, \varphi) G_0^*(\tau, \varphi)\, d\tau - \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi) G_0^*(\tau, \varphi)\, d\tau \right)$, которая удовлетворяет условию (18) в теореме 5. Следовательно, существует матрица $C(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, вообще говоря, отличная от предыдущей, такова, что уже будет выполняться оценка (20). Отметим, что постоянные K, γ в оценке (20) можно выразить через матрицы $S_1(\varphi)$, $A(\varphi)$.

Из условия (18) видно, что малые возмущения матрицы $A(\varphi)$ существенного влияния на существование функции Грина не оказывают. Если бы $S_1(\varphi) \in C^1(\Gamma_m)$, то такие же выводы сделали бы по отношению к вектор-функции $a(\varphi)$, поскольку в этом случае $\dot{S}_1(\varphi) = (\partial S_1(\varphi)/\partial\varphi)\, a(\varphi)$. В связи с этим возник вопрос о приближении функций $F(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ функциями $F_n(\varphi) \in C^1(\Gamma_m)$ так, чтобы одновременно приблизить и их производную $\dot{F}(\varphi): \lim_{n\to\infty} (\| F(\varphi) - F_n(\varphi) \| + \| \dot{F}(\varphi) - \dot{F}_n(\varphi) \|) = 0$. Этот вопрос положительно решен в случае, когда $a(\varphi) \in C^1(\Gamma_m)$, в работе [30], и в случае, когда $F(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\Gamma_m)$, в работе [11]. В последнее время удалось доказать возможность такого приближения при условии $\lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}\mu(a; \sigma)\,\mu(F; \sigma) = 0$, где $\mu(a; \sigma)$, $\mu(F; \sigma)$ — модули непрерывности функций $a(\varphi)$, $F(\varphi)$ ($\mu(a;\sigma) = \sup_{\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant \sigma} \| a(\varphi) - a(\bar{\varphi}) \|$).

Если дополнительно к условию (18) теоремы 5 потребовать существование n-мерной матрицы $S(\varphi) = S^*(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющей оценке

$$\langle (\dot{S}(\varphi) + S(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) S(\varphi)) x, x \rangle \leqslant -\| x \|^2, \tag{23}$$

то отсюда последует невырожденность матриц $S_1(\varphi)$ и $S(\varphi)$ и равномерная по φ_0 э-дихотомичность на R системы (14). При этом функция Грина (19) — единственная и матрица $C(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ является матрицей проектирования $C^2(\varphi) = C(\varphi)$, удовлетворяющей тождеству

$$C(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi). \tag{24}$$

В связи с этим возник вопрос об аналоге тождества (24) для функции $C(\varphi)$ в случае неединственности функции Грина (19).

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* (18) *с матрицей* $S_1(\varphi) \equiv S_1^*(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, *вырождающейся в некоторых точках. Тогда существуют* $n \times n$*-мерные матрицы* $C(\varphi)$, $\hat{C}(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, $\hat{C}^*(\varphi) \equiv \hat{C}(\varphi)$, *удовлетворяющие тождествам*

$$C(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi) + \Omega_0^\tau(\varphi) \hat{C}(\varphi) \int_\tau^0 (\Omega_0^\sigma(\varphi))^* \Omega_\tau^\sigma(\varphi) \, d\sigma,$$

$$\hat{C}(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv \Omega_0^\tau(\varphi) \hat{C}(\varphi) (\Omega_0^\tau(\varphi))^*, \quad \tau \in R, \tag{25}$$

и оценкам

$$\| \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma t\}, \quad t > 0; \qquad \| \Omega_0^t(\varphi)(C(\varphi) - I_n) \| \leqslant \leqslant K \exp\{\gamma t\}, \quad t < 0; \tag{26}$$

$$\| \Omega_0^t(\varphi) \hat{C}(\varphi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |t|\}, \quad t \in R, \tag{27}$$

с положительными постоянными K, γ, *независящими от* t *и* φ. *Причем* $\operatorname{rang} \hat{C}(\varphi) = \dim \hat{E}(\varphi)$, *где* $\hat{E}(\varphi)$ — *подпространство ограниченных на* R *решений системы* (14).

Заметим, что э-дихотомичность на R системы (14) при каждом φ_0 влечет за собой тождество $\hat{C}(\varphi) \equiv 0$, следовательно, из (25) последует (24). Учитывая свойство функции Грина $G_0(\tau, \varphi) \equiv G_{-z}(\tau - z, \varphi_z(\varphi))$, заключаем, что из оценок (26) следует (20). Оценка (27) указывает на непрерывное выделение всех нетривиальных решений системы (14), ограниченных на оси R.

Дальнейшие исследования проводились в трех направлениях. 1. Изучение новых возможностей дополнения слабо регулярных систем (1) до э-дихотомичных на всей оси R систем большей размерности. 2. Послабление условий на матрицу $S_1(\varphi)$ и изучение слабо регулярных линейных систем с произвольными параметрами. Изучение непериодических систем (13), предполагая только непрерывность и ограниченность функций $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ во всем пространстве R^m.

Исследования первого направления показали, что слабо регулярную на R систему (1) можно расширять до э-дихотомичной на R следующим образом:

$$dx/dt = A(t)x, \qquad dy/dt = B(t)x - A^*(t)y, \quad y \in R^n, \tag{28}$$

где $B(t) \equiv B^*(t)$ — произвольная знакоопределенная матрица из пространства $C^0(R)$. Кроме этого получены необходимые и достаточные условия э-дихотомичности на R системы (28) в случае, когда матрица $B(t)$ не является знакоопределенной и симметричной. Основной результат содержится в следующем утверждении.

Теорема 7. *Пусть существует симметричная матрица* $S_1(t) \in C^1(R)$, *удовлетворяющая условию* (4). *Тогда для э-дихотомичности системы уравнений* (28) *на всей оси* R *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\operatorname{rang} \int_{-\infty}^{\infty} P^* (\Omega_0^\sigma(A))^* B(\sigma) \Omega_0^\sigma(A) P d\sigma = \hat{r}, \tag{29}$$

где P — *матрица проектирования на подпространство* $\hat{E}(0)$, *образованное начальными точками при* $t = 0$ *ограниченных на* R *решений системы* (1), $\hat{r} = \dim \hat{E}(0)$. *Причем, если равенство* (29) *выполняется при одной матрице проектирования* P, *то оно будет выполняться и при всех таких матрицах* P.

Дальнейшие исследования показали, что матричную функцию $S_1(\varphi)$, удовлетворяющую условию (18), не обязательно нужно выбирать непрерывной и 2π-периодической по φ_j. Можно предположить существование при каждом фиксированном φ_0 матрицы $S_{1\varphi_0}(t) \in C^1(R)$, равномерно ограниченной: $\| S_{1\varphi_0}(t) \| \leqslant K = \text{const} < \infty$ и таковой, что $\langle (dS_{1\varphi_0}(t)/dt - S_{1\varphi_0}(t) A^* \times \times (\varphi_t(\varphi_0)) - A(\varphi_t(\varphi_0)) S_{1\varphi_0}(t)) x, x \rangle \geqslant \| x \|^2$. Этого вполне достаточно для существования матрицы $S_1(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющей условию (18). Таким образом, если предположить существование $n \times n$-мерной матрицы $C(\tau; \varphi_0)$, обеспечивающей при каждом фиксированном $\varphi_0 \in R^m$ существование матричной функции $S_{\varphi_0}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\varphi_0) C(\tau; \varphi_0) (\Omega_\tau^t(\varphi_0) C(\tau; \varphi_0))^* d\tau - - \int\limits_{t}^{\infty} \Omega_\tau^t(\varphi_0) (C(\tau; \varphi_0) - I_n) (\Omega_\tau^t(\varphi_0) (C(\tau; \varphi_0) - I_n))^* d\tau$ и принадлежность ее пространству $C^1(R)$ с равномерной ограниченностью $\| S_{\varphi_0}(t) \| \leqslant K$, то отсюда последует существование матрицы $C(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ такой, что для функции (19) выполняется оценка (20).

Изучение системы (14), в которую параметры φ_0 входят специальным образом: $\varphi_t(\varphi_z(\varphi_0)) \equiv \varphi_{t+z}(\varphi_0)$, привело к рассмотрению линейных систем с параметрами

$$dx/dt = A(t; p) x. \tag{30}$$

Здесь вектор параметров $p = (p_1, \ldots, p_m)$ изменяется в некоторой области $D \subset R^m$, матрица коэффициентов $A(t, p)$ при каждом фиксированном $p \in \in D$ принадлежит пространству $C^0(R)$. Одна из основных задач заключалась в изучении зависимости от параметров p ограниченного на R решения неоднородной системы уравнений

$$dx/dt = A(t, p) x + f(t, p) \tag{31}$$

в предположении, что система (30) обладает слабой регулярностью на R при каждом фиксированном $p \in D$, вектор-функция $f(t, p)$ при каждом фиксированном p выбирается из пространства $C^0(R)$. Несмотря на непрерывную зависимость от параметра p матрицы $A(t, p)$ и вектор-функции $f(t, p)$, ограниченные на R решения системы (31) могут не быть непрерывно зависящими от p. Это отчетливо видно из следующего примера:

$$dx/dt = (1 - p^2t^2)(1 + p^2t^2)^{-1} x + 1, \quad p \in [-1, 1]. \tag{32}$$

Единственное ограниченное на R решение имеет такой вид:

$$x = x(t, p) = \begin{cases} \exp\{-t + 2p^{-1} \operatorname{arctg} pt\} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\{\tau - 2p^{-1} \operatorname{arctg} p\tau\} d\tau, & p \neq 0, \\ -1, & p = 0. \end{cases}$$

Начальная точка $x(0, p)$ этого решения не является непрерывно зависящей от параметра p, поскольку при $p \neq 0$ имеем $x(0, p) > 0$, а если $p = 0$, то $x(0, 0) = -1 < 0$.

Поскольку для функции Грина $G(t, \tau; p)$ э-дихотомичной на R системы (30) выполняется тождество

$$G(t, \tau; p) - G(t, \tau; \bar{p}) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, t_1; p) [A(t_1, p) - A(t_1, \bar{p})] G(t_1, \tau; \bar{p}) dt_1, \tag{33}$$

то при изучении непрерывной зависимости от параметров p ограниченных на R решений системы (31) основная трудность заключается в установлении оценки (8) для функции Грина $G(t, \tau; p)$ с независящими от p постоянными K, β. Отметим, что для функции Грина слабо регулярной на R системы (30) тождество (33), вообще говоря, выполняться не будет, оно будет выполняться для функции Грина расширенной системы $dx/dt = A(t, p\ x,\ dy/dt = x - - A^*(t, p) y$. Сформулируем следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. *Пусть выполняются условия*: 1. *Матрица* $A(t, p)$ *равномерно ограничена* $\| A(t, p) \| \leqslant M = \text{const} < \infty$, $t \in R$, $p \in D$. 2. *При каждом значении* $p \in D$ *существует* n-*мерная симметричная матрица*

$S(t; p) \in C^1(R)$ такова, что $\langle (dS(t; p)/dt - S(t; p) A^*(t, p) - A(t, p) \times \times S(t; p)) x, x \rangle \leqslant -\|x\|^2$ и матрица $S(t; p)$ равномерно ограничена. Тогда существует функция Грина $G(t, \tau, p)$ задачи об ограниченных на R решениях системы (30), *удовлетворяющая оценке* (8) *с независящими от p постоянными K, β.*

Отметим, что вместо равномерной ограниченности матрицы $S(t; p)$ в теореме 8 можно потребовать равномерную ограниченность производной $\partial A(t, p)/\partial p$ (если она существует). Этого вполне достаточно для существования равномерно ограниченной матрицы $S(t; p)$. Заметим, что в примере (32) производная по параметру $-4pt^2(1 + p^2t^2)^{-1}$ не является равномерно ограниченной при $p \in [-1, 1]$, $t \in R$.

С помощью квадратичных форм изучались вопросы равномерной ограниченности на R решений множеств слабо регулярных линейных систем (см. [13]). На этих вопросах здесь останавливаться не будем.

Рассматривая линейные расширения динамических систем с медленно меняющейся фазой [34], в последнее время удалось преодолеть трудность, связанную с преобразованием периодической матрицы $P_0(\varphi) \in C^l(\Gamma_m)$ к блочному виду. Используя обозначения из работы [34], сформулируем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть правая часть нелинейной системы уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$*

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, x, \varepsilon), \qquad dx/dt = X(\varphi, x, \varepsilon) \tag{34}$$

удовлетворяет следующим условиям. 1. *Функции $a(\varphi, x, \varepsilon)$, $X(\varphi, x, \varepsilon)$ определены при всех $\varphi \in \Gamma_m$, x из области $D \subset R^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, 2π-периодические по φ_j, непрерывны по совокупности переменных φ, x, ε вместе со своими частными производными по φ, x до порядка $l \geqslant 2$ включительно.* 2. *Система уравнений $X(\varphi, x, 0) = 0$ имеет в $C^l(\Gamma_m)$ изолированное решение $x = x_0(\varphi)$, принадлежащее области D вместе с некоторой своей ρ-окрестностью.* 3. *Вещественные части собственных чисел матрицы $P_0(\varphi) = \partial X(\varphi, x_0(\varphi), 0)/\partial x$ отличны от нуля. Тогда можно указать такое $\varepsilon^0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ система уравнений* (34) *имеет инвариантный тор $\Gamma_m : x = u(\varphi, \varepsilon) \in C^{l-2}(\Gamma_m)$, удовлетворяющий равенству $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |u(\varphi, \varepsilon) - x_0(\varphi)|_{l-2} = 0$.*

Обратим внимание на то, что систему уравнений (30) можно рассматривать в таком виде: $dz/dt = 1$, $dp/dt = 0$, $dx/dt = A(z, p)x$. Это напоминает линейное расширение динамической системы на торе (13), но только матрица $A(z, p)$ уже не является 2π-периодической по z и p. В связи с этим рассматривались вопросы, связанные с исследованием систем дифференциальных уравнений вида $d\psi/dt = a(\psi)$, $dx/dt = A(\psi)x$ с непрерывными и ограниченными во всем пространстве R^m функциями $a(\psi)$, $A(\psi)$. Аналогично предполагается единственность решения задачи Коши $\psi|_{t=0} = \psi_0$, $d\psi/dt = a(\psi)$, $\psi \in R^m$.

Основной результат содержится в следующем утверждении.

Теорема 10. *Пусть при каждом фиксированном $\psi_0 \in R^m$ существует n-мерная симметричная матрица $S_{\psi_0}(t) \in C^1(R)$, удовлетворяющая условиям*

1. $\langle (dS_{\psi_0}(t)/dt - S_{\psi_0}(t) A^*(\psi_t(\psi_0)) - A(\psi_t(\psi_0)) S_{\psi_0}(t)) x, x \rangle \leqslant -\|x\|^2$.
2. $\|S_{\psi_0}(t)\| \leqslant K = \text{const} < \infty$ при всех $\psi_0 \in R^m$, $t \in R$.

Тогда для каждой n-мерной симметричной знакоопределенной матрицы $B(\psi) \in C^0(R^m)$ ($C^0(R^m)$ — пространство непрерывных и ограниченных при всех $\psi \in R^m$ функций, $|\langle B(\psi) x, x \rangle| \geqslant \beta \|x\|^2$, $\beta = \text{const} > 0$) существуют единственные n-мерные матрицы $C(\psi)$, $\hat{C}(\psi) \in C'(R^m)$, $\hat{C}^*(\psi) \equiv \hat{C}(\psi)$, удовлетворяющие тождествам и оценкам

$$\Omega_\tau^0(\psi) C(\psi_\tau(\psi)) \Omega_0^\tau(\psi) \equiv C(\psi) + \hat{C}(\psi) \int_\tau^0 (\Omega_0^\sigma(\psi))^* B(\psi_\sigma(\psi)) \Omega_0^\sigma(\psi) d\sigma;$$

$$\hat{C}(\psi_\tau(\psi)) \equiv \Omega_0^\tau(\psi) \hat{C}(\psi) (\Omega_0^\tau(\psi))^*;$$

$$\| \Omega_0^t(\psi) C(\psi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma t\}, \quad t > 0; \qquad \| \Omega_0^t(\psi)(C(\psi) - I_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant K \exp\{\gamma t\}, \quad t < 0;$$
$$\| \Omega_0^t(\psi) \hat{C}(\psi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |t|\}, \quad t \in R, \quad K, \gamma - \mathrm{const} > 0.$$

Причем $\operatorname{rang} \hat{C}(\psi) \equiv \dim \hat{E}(\psi)$, *где* $\hat{E}(\psi)$ — *подпространство ограниченных на всей оси* R *решений системы* $dx/dt = A(\psi_t(\psi_0))\, x$.

Замечание 1. Приведенное утверждение гарантирует существование хотя бы одного ограниченного инвариантного многообразия $M: x = u(\psi) \in \in C'(R^m)$ для системы уравнений $d\psi/dt = a(\psi)$, $dx/dt = A(\psi)x + f(\psi)$ при каждой вектор-функции $f(\psi) \in C^0(R^m)$, и это многообразие представимо равенством

$$x = u(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \psi) f(\psi_\tau(\psi))\, d\tau,$$

где $G_0(\tau, \psi) = \Omega_\tau^0(\psi) C(\psi_\tau(\psi))$ при $\tau \leqslant 0$ и $G_0(\tau, \psi) = \Omega_\tau^0(\psi)(C(\psi_\tau(\psi)) - I_n)$ при $\tau > 0$.

Замечание 2. Единственность матриц $\hat{C}(\psi)$, $C(\psi)$ в приведенной теореме позволяет непосредственно формулировать такой же результат для систем (13), а также для систем, периодически зависящих от параметров.

Другой круг вопросов связан с расщепляемостью системы уравнений (13). Предполагая, что система (14) э-дихотомична на R равномерно по φ_0, мы тем самым обеспечиваем отделимость двух семейств решений этой системы. Хорошо известно [11], что в этом случае при каждом фиксированном φ существует замена переменных Ляпунова $x = T_{\varphi_0}(t)\, y$, преобразующая систему (14) к соответствующему расщепленному виду $dy_1/dt = A^+(t; \varphi_0)\, y_1$ $dy_2/dt = A^-(t; \varphi_0)\, y_2$. Возникает вопрос о возможности выбора матрицы $T_{\varphi_0}(t)$ вида $T(\varphi_t(\varphi_0))$, где $T(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, т. е. существует ли матрица $T(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ такова, что

$$T^{-1}(\varphi) A(\varphi) T(\varphi) - T^{-1}_{(\varphi)}(\varphi) \dot{T}(\varphi) = \operatorname{diag}\{A^+(\varphi), A^-(\varphi)\} \tag{35}$$

блочные матрицы A^+, A^- соответствуют э-дихотомичности на R системы (14)? Отрицательный ответ содержится в работе [33]. Несмотря на это, в работе [32] доказано, что если предположить существование невырожденной симметричной матрицы $S(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющей условиям

$$\langle (\dot{S}(\varphi) + S(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) S(\varphi))\, x, x \rangle \leqslant -\| x \|^2, \tag{36}$$
$$S(\varphi) = Q^*(\varphi) \operatorname{diag}\{S_1(\varphi), -S_2(\varphi)\}\, Q(\varphi), \quad Q(\varphi) \in C'(\Gamma_m), \tag{37}$$
$$\langle S_i(\varphi)\, \eta_i, \eta_i \rangle \geqslant \beta \| \eta_i \|^2,$$

то отсюда последует э-дихотомичность на R системы (14) и существование матрицы $T(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, обеспечивающей расщепление (35). С другой стороны, в работе [6] показано, что невырожденная матрица $T(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, приводящая матрицу проектирования $C(\varphi)$ к жордановой форме $T^{-1}_{(\varphi)} \times \times C(\varphi)\, T(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_r, 0\}$, обеспечивает расщепление (35). В связи с этим возник вопрос о взаимосвязи матрицы проектирования $C(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ и невырожденной симметричной матрицы $S(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$. Исследование этого вопроса привело к следующему заключению. Каждая n-мерная симметричная матрица $S(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющая условию (36), взаимосвязана с матрицей проектирования с точностью до постоянного множителя следующим неравенством:

$$\langle (S(\varphi) C(\varphi) + C^*(\varphi) S(\varphi) - S(\varphi))\, x, x \rangle \geqslant \| x \|^2. \tag{38}$$

При этом оказалось, что дополнительное предположение (37 относительно матрицы $S(\varphi)$ влечет за собой разрешимость систем алгебраических уравнений $C(\varphi)\, x = 0$, $C(\varphi)\, x = x$, т. е. возможность приведения матрицы $C(\varphi)$ к жордановой форме. Отметим, что неравенство (38) можно рассматривать как самостоятельное, не связанное с системой (13). Причем для каждой матрицы проектирования $C^2(\varphi) \equiv C(\varphi) \in C^0(\Gamma_m) \mid C'(\Gamma_m)|$ существует множество $\mathfrak{M}$ матриц $S(\varphi) \equiv S^*(\varphi) \in C^0(\Gamma_m) \mid C'(\Gamma_m)|$, удовлетворяющих неравенству (38), в частности $S(\varphi) = 2(C(\varphi) + C^*(\varphi) - I_n)$. Если предположить возможность приведения матрицы проектирования $C(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$ к жордановой форме $T^{-1}_{(\varphi)} C(\varphi) T(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_r, 0\}$, $T(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$, то для каждой матрицы $S(\varphi) \in \mathfrak{M}$ существует матрица $Q(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$ такая, что $Q^*(\varphi) S(\varphi) Q(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_r, -I_{n-r}\}$.

С помощью квадратичных форм изучался вопрос о возможности гладкого расщепления системы (14) на более чем две подсистемы. В этом направлении доказаны следующие утверждения.

Теорема 11. *Пусть существуют две $n \times n$-мерные невырожденные симметричные матрицы $S(\varphi)$, $\bar{S}(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, такие, что для матрицы $S(\varphi)$ выполняются условия* (36), (37) *с $r \times r$-мерной матрицей $S_1(\varphi)$, а для матрицы $\bar{S}(\varphi)$ при некоторой положительной скалярной функции $\lambda(\varphi) \in C^0(\Gamma_m)$ выполняется неравенство*

$$\langle(\dot{\bar{S}}(\varphi) + \bar{S}(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) \bar{S}(\varphi) + 2\lambda(\varphi) \bar{S}(\varphi)) x, x\rangle \geqslant \varepsilon \| x \|^2, \ \varepsilon = \text{const} > 0,$$

и имеет место представление $\bar{S}(\varphi) = \bar{Q}^*(\varphi) \operatorname{diag}\{\bar{S}_1(\varphi), -\bar{S}_2(\varphi)\} \bar{Q}(\varphi)$, $\bar{Q}(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, с положительно определенными блоками $\bar{S}_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, $\bar{S}_1(\varphi)$ — $\bar{r}$-мерная матрица, $\bar{r} < r$. Тогда неравенство

$$r - \bar{r} < n - m, \tag{39}$$

где m — количество переменных φ, обеспечивает существование невырожденной матрицы $L(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$ такой, что

$$L^{-1}(\varphi) A(\varphi) L(\varphi) - L^{-1}(\varphi) \dot{L}(\varphi) = \operatorname{diag}\{B_1(\varphi), B_2(\varphi), B_3(\varphi)\}, \tag{40}$$

где матрицы B_1, B_2, B_3 имеют размеры соответственно $\bar{r} \times \bar{r}$, $(r - \bar{r}) \times (r - \bar{r})$, $(n - r) \times (n - r)$.

Теорема 12. *Пусть выполняются условия теоремы 11 кроме неравенства* (39) *и при этом матрицы $S(\varphi)$, $\bar{S}(\varphi)$ имеют блочно-диагональный вид*

$$S(\varphi) = \operatorname{diag}\{S_1(\varphi), -S_2(\varphi)\}, \qquad \bar{S}(\varphi) = \operatorname{diag}\{\bar{S}_1(\varphi), -\bar{S}_2(\varphi)\},$$

где $S_1(\varphi)$, $\bar{S}_1(\varphi)$ — $r \times r$-мерные, $S_1(\varphi)$, $S_2(\varphi)$, $\bar{S}_2(\varphi)$ — положительно определенные, а матрица $\bar{S}_1(\varphi)$ имеет $\bar{r}$ собственных чисел положительных и $r - \bar{r}$ отрицательных. Тогда для того чтобы существовала невырожденная матрица $L(\varphi)$ $C'(\Gamma_m)$, обеспечивающая расщепление (40), *необходимо и достаточно, чтобы существовала $r \times r$-мерная матрица $Q(\varphi) \in C'(\Gamma_m)$, удовлетворяющая равенству $Q^*(\varphi) \bar{S}_1(\varphi) Q(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_{\bar{r}}, -I_{r-\bar{r}}\}$.*

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1958, **10**, № 3, с. 270—279.
4. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
5. *Самойленко А. М.* Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 791—797.
6. *Самойленко А. М.* Сепаратрисные многообразия и расщепляемость линейного расширения динамической системы на торе.— Там же, 1981, 33, № 1, с. 31—38.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Некоторые проблемы теории многочастотных колебаний.— In : VII Intern. Konf. über nichtlineare Schwingungen. Berlin : Akad.— Verl. 1977, с. 107—116.

8. *Sacker R. I.* A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces.— Comm. Pure Appl. Math., 1965, **18**, N 4, p. 717—732.
9. *Sacker R. I., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems.— J. Diff. Equat., 1974, **15**, p. 429—458.
10. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию инвариантных многообразий.— В кн.: Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и крат. науч. сообщ. Всесоюз. школы-семинара /Ин-т математики АН БССР. Минск, 1982, с. 95—96.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 534 с.
12. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 168—173.
13. *Плисс В. А.* Множества линейных систем дифференциальных уравнений с равномерно ограниченными решениями.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 9, с. 1599—1616.
14. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания.— М.: Наука, 1970.— 351 с.
15. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М.: Мир, 1970.— 456 с.
16. *Coppel W. A.* Dichotomies and Lyapunov functions.— J. Diff. Equat., 1984, **52**, N 1, p. 58—65.
17. *Миллионщиков В. М.* Статистически правильные системы.— Мат. сб., 1968, **75**, № 1, с. 140—151.
18. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка, 1981.— 412 с.
19. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.— Тр. Урал. политехн. ин-та. Математика, 1954, **51**, с. 20—50.
20. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск : Наука и техника, 1972.— 662 с.
21. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений, содержащих параметры.—Мат. сб., 1960, вып. 27, с. 147—156.
22. *Мухамадиев Э.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на прямой функций. — Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 1, с. 47—49.
23. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. IV.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 7, с. 1190—1202.
24. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых задач обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, вып. 3, с. 15—86.
25. *Бронштейн И. У., Черный В. Ф.* Линейные расширения, удовлетворяющие условию экспоненциальной дихотомии.— Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1976, № 3, с. 12—16.
26. *Чебан Д. Н., Черный В. Ф.* К вопросу об экспоненциальной дихотомии на полуоси решений дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 11, с. 2012—2018.
27. *Чересиз В. М.* Устойчивые и условно устойчивые почти периодические решения V-монотонных систем.— Сиб. мат. журн., 1974, **15**, № 1, с. 162—176.
28. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 718 с.
29. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1960.— 75 с.
30. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, **90**, с. 1—210.
31. *Wilson F. W.* Smoothing derivatives of functions and applications.— Trans. AMS, 1969, **139**, p. 413—428.
32. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 3, с. 348—359.
33. *О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем* / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, В. Я. Лин, О. В. Локуциевский.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 54—61.
34. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными.— Там же, 1977, с. 181—191.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила 29.11.84