УДК 519.41—47

Л. А. Курдаченко, А. В. Тушев

Двуступенно разрешимые группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп

Убывающую цепь подгрупп $G_1 > G_2 > \ldots$ назовем, следуя работе [1], убывающей ∞-цепью, если индексы $|G_n : G_{n+1}|$ бесконечны для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое семейство подгрупп G. Будем говорить, что G удовлетворяет слабому условию минимальности или, короче, условию Min — ∞ для $\mathfrak{S}$-подгрупп, если всякая ее убывающая ∞-цепь, составленная из подгрупп семейства $\mathfrak{S}$, обрывается. Слабое условие минимальности введено в рассмотрение в работах [2, 3]. В работах [1—6] изучались при достаточно общих ограничениях группы с условием Min — ∞ для различных систем подгрупп $\mathfrak{S}$. Оказалось, что все изученные группы минимаксны, т. е. обладают конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет условию Min или Max.

В работе [7] было начато изучение групп с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп. При этом оказалось, что уже локально нильпотентные группы такого рода не всегда минимаксны. Вместе с тем условие Min — ∞ для нормальных подгрупп влечет минимаксность локально нильпотентной группы в тех случаях, когда она периодическая, без кручения или финитно аппроксимируемая ([7], теоремы 1, 2, 3 соответственно). Некоторые структурные свойства локально нильпотентных групп с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп приведены в [8]. В [9] начато изучение разрешимых групп с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп. Из теоремы 1 этой работы вытекает, что если G — группа с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп, $H = [G, G]$ — абелева, то H обладает конечным рядом нормальных в G подгрупп, каждый фактор которого, рассматриваемый как $\mathbb{Z}[G]$-модуль, артинов или нетеров. Теорема 1 настоящей работы указывает условия, при которых H — артинов $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Теорема 2 указывает на роль цоколя. Именно: централизатор цоколя будет гиперцентральной группой. Приведенные в данной работе результаты нужны для описания некоторых классов групп с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп.

Как и в других вопросах теории разрешимых групп, здесь удобно пользоваться языком теории модулей. Будем говорить, что модуль удовлетворяет условию Min — ∞ для подмодулей, если всякая его ∞-цепь подмодулей обрывается. Модуль назовем почти неприводимым, если всякий его ненулевой подмодуль имеет конечный индекс.

Л е м м а 1. *Пусть G — абелева группа без кручения конечного ранга, F — конечное поле, $\mathfrak{a}$ — главный идеал группового кольца $F[G]$ (причем $F[G]/\mathfrak{a}$ — кольцо целостности, если ранг G больше* 1). *Если G не включает в себя сервантных циклических подгрупп (в частности, если G имеет ранг* 1, *то она нециклическая), то фактор-кольцо $F[G]/\mathfrak{a}$ бесконечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму будем доказывать индукцией по рангу группы G. Пусть G — локально циклическая группа, $\mathfrak{a} = (x)$. Ясно, что $x \in F[(g)]$ для некоторого $g \in G$. Пусть $(g) = (g_1) \leqslant (g_2) \leqslant \ldots \leqslant (g_n) \leqslant \ldots$ — последовательность циклических подгрупп, объединение которых совпадает с G. Тогда $F[G] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F[(g_n)]$. Можно считать, что $x = \alpha_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_t g_1^t$, $\alpha_i \in F$. Имеем $|F[(g_1)]/xF[(g_1)]| = |F|^t$. Далее, $g_1 = g_2^{l_2}$ для некоторого $l_2 \in \mathbb{N}$. Поэтому $x = \alpha_0 + \alpha_1 g_2^{l_2} + \ldots + \alpha_t g_2^{l_2 t}$, так что $|F[(g_2)]/x\ F[(g_2)]| = |F|^{l_2 t}$. Рассуждая аналогично, покажем, что порядки $|F[(g_n)]/x\ F[(g_n)]|$ возрастают с ростом n. Это и означает, что фактор-кольцо $F[G]/\mathfrak{a}$ бесконечно.

Пусть теперь G — группа ранга n и пусть для групп меньших рангов теорема уже доказана. Обозначим через H сервантную подгруппу G ранга 1. В частности, H не является циклической. Если фактор-кольцо $F_1 = F[H] + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ бесконечно, то все доказано. Предположим, что F_1 конечно. Из условий теоремы следует тогда, что F_1—целостное кольцо. Но тогда F_1—поле. Положим $K = G/H$. Имеем изоморфизм $F[G]/\mathfrak{a} \cong F_1[K]/\mathfrak{a}$ (его можно получить, например, из леммы 1.1.3 работы [10]). Очевидно, группа K не может включать в себя сервантных циклических подгрупп. Поэтому можно воспользоваться индуктивным предположением. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Пусть G — точный $\mathbb{Z}[G]$-модуль с условием* Min — ∞ *для подмодулей, G — абелева группа без кручения конечного ранга. Если G не включает в себя сервантных циклических подгрупп, а аддитивная группа модуля A периодическая, то модуль A артинов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того факта, что A удовлетворяет условию Min — ∞ для подмодулей, следует конечность множества $\Pi(A)$. Поэтому можно считать, что аддитивная группа модуля A является p-группой, p — простое число. Лемма 3.3 работы [11] показывает, что можно ограничиться случаем, когда A — элементарная абелева p-группа. Предположим, что $\mathbb{Z}[G]$-модуль A не артинов. Тогда он включает в себя почти неприводимый $\mathbb{Z}[G]$-модуль A_1. Можно считать, что A_1 порождается одним элементом a. Положим $F = GF(p)$. Тогда $A_1 \cong F[G]/Ann_{F[G]}(a)$. Пусть $K = F[G]/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = Ann_{F[G]}(a)$. Поскольку G абелева, то $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал кольца $F[G]$. Доказательство проведем индукцией по рангу группы G.

Пусть G — локально циклическая группа. Тогда G является объединением бесконечной последовательности подгрупп $(g_1) < (g_2) < \ldots < (g_n) < \ldots$, $g_n = g_{n+1}^{l_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому и $F[G] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F[g_n)]$. Отсюда следует, что если

$\mathfrak{a} \neq (0)$, то и $F[(g_n)] \cap \mathfrak{a} \neq (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Итак,

$$a(\alpha_0 + \alpha_1 g_n + \ldots + \alpha_k g_n^k) = 0,\ \alpha_i \in F,\ 0 \leqslant i \leqslant k.$$

Но тогда $\text{гр}(ag_n^t \mid t \in \mathbb{N}) = \text{гр}(a, ag_n, \ldots, ag_n^{k-1})$, в частности эта подгруппа конечна. Это означает, что $C_G(a) \neq (1)$. Поскольку a порождает подмодуль A_1, а группа G абелева, то и $C_G(A_1) \neq (1)$. Пусть $E = G/C_G(A_1)$.

Тогда на A_1 можно смотреть как на $F[E]$-модуль. Так как A_1 удовлетворяет условию $\text{Min} - \infty$ для подмодулей, а E — периодическая группа, то A_1 — артинов $F[E]$-модуль (см. [9, теорема 2]). Но это противоречит выбору подмодуля A_1. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{a} = (0)$, т. е. $A_1 \cong F[G]$. Лемма 1 показывает, однако, что это невозможно. Итак, для группы ранга 1 утверждение теоремы доказано.

Пусть G — группа ранга n и пусть для групп меньших рангов теорема доказана. Положим $G_1 = G/C(A_1)$, и обозначим через T периодическую часть G_1. Множества $C_{A_1}(g)$ и $A_1(g-1)$ являются $F[G_1]$-подмодулями для любого $g \in G_1$. Если предположить, что $C_{A_1}(g) \neq (0)$, то из изоморфизма $A_1/C_{A_1}(g) \cong A_1(g-1)$ следует конечность $A_1(g-1)$, а это противоречит выбору подмодуля A_1. Итак, $C_{A_1}(g) = (0)$ для любого $1 \neq g \in G_1$. Пусть B — собственный $F[G_1]$ — подмодуль A_1, $C_1 = C_T(A_1/B)$. Из конечности A_1/B следует конечность индекса $|T : C_1|$. Пусть $1 \neq g \in C_1$, причем $|g|$ — простое число. Если $|g| \neq p$, то из теоремы Машке (см., напр., [12, теорема 20.2.2]) вытекает разложение $A_1 = B \oplus D$, где $D - (g)$-допустимая подгруппа. Для любого $d \in D$ имеем $d(g-1) \in D$ и $D(g-1) \in B$, т. е. $d(g-1) = 0$ и $dg = d$. Итак, $D \leqslant C_{A_1}(g)$, что по доказанному выше невозможно. Если $|g| = p$, то поскольку $A_1 - p$-подгруппа, то $C_{A_1}(g) \neq (0)$.

Полученное противоречие показывает, что $C_1 = (1)$, т. е. подгруппа T конечна. Но тогда $G_1 = T \times G_2$. $F[G_2]$-Модуль A_1 удовлетворяет условию $\text{Min} - \infty$ для подмодулей (это вытекает из теоремы 1 работы [9] и теоремы А работы [13]). Далее, ранг G_2 строго меньше n и G_2 не включает в себя, очевидно, сервантных циклических подгрупп. Индуктивное предположение показывает, что A_1 — артинов $F[G_2]$-модуль. Но тогда A_1 — артинов $F[G_1]$-модуль, что противоречит выбору A_1. Полученное противоречие показывает, что $C_G(A_1) = (1)$. Отсюда, с помощью рассуждений, проводимых для группы ранга 1, можно получить равенство $\mathfrak{a} \cap F[H] = (0)$ для любой сервантной подгруппы H ранга 1.

Пусть $0 \neq u_1$, $u_2 \in K$ и $u_1 u_2 = 0$, $1 \neq g \in G$. Из выбора A_1 следует, что идеал (u_1) имеет в K конечный индекс. Пусть $h = g + \mathfrak{a}$. Тогда $1 - h^n \in (u_1)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $1 - h^n = u_1 u_3$, $u_3 \in K$. Отсюда следует, что $(1 - h^n) u_2 = 0$, и теперь нетрудно получить соотношение $Ann_{A_1}(1 - g^n) \neq (0)$. В частности, $C_{A_1}(g^n) \neq (0)$. Если $C_{A_1}(g^n) = A_1$, то $C_G(A_1) \neq (1)$. Если же $C_{A_1}(g^n)$ — собственный подмодуль, то $A_1(g^n - 1)$ — конечный ненулевой подмодуль A_1. В обоих случаях получаем противоречие. Итак, K — целостное кольцо.

Пусть $y_{1k}, \ldots, y_{nk}$ — такой набор элементов G, что $y_{1k} \in H$, $\text{гр}(y_{1k}, \ldots, y_{nk}) = (y_{1k}) \times \ldots \times (y_{nk})$, $(y_{1k}) \times \ldots \times (y_{nk}) \leqslant (y_{1k+1}) \times \ldots \times (y_{nk+1})$, $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{гр}(y_{1k}, \ldots, y_{nk})$. Положим $L_k = F[(y_{1k}) \times \ldots \times (y_{nk})]$. Тогда $L_k \leqslant L_{k+1}$, $F[G] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$. L_k можно рассматривать как групповое кольцо группы (y_{nk}) над $F_{n-1k} = F[(y_{1k}) \times \ldots \times (y_{n-1k})]$. Тогда идеал $L_k \cap \mathfrak{a}$ порождается многочленом g_k от y_{nk} с коэффициентами из F_{n-1k}, а так как $L_k/L_k \cap \mathfrak{a}$ — кольцо целостности, то g_k неприводим над F_{n-1k}. Обозначим через β_{nk} его старший коэффициент. Поскольку $L_1 \cap \mathfrak{a} \leqslant L_k \cap \mathfrak{a}$, то $g_1 = g_k z_k$ для некоторого $z_k \in L_k$. В частности, β_{kn} — делитель β_{1n}. Аналогично, F_{n-1k} можно рассматривать как $F_{n-2k}[(y_{n-1k})]$, где $F_{n-2k} = F[(y_{1k}) \times \ldots \times (y_{n-2k})]$. Снова $F_{n-1k} \cap \mathfrak{a}$ порождается неприводимым многочленом над F_{n-2k} со старшим коэффициентом β_{kn-1} и β_{kn-1} — делитель β_{1n-1} и т. д. Выберем в кольце $F[H]$ элемент $0 \neq v$, взаимно простой с $\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots$

$\ldots, \beta_{1n}$. Пусть $x \in F[G]$ и $vx \in F[H] + \mathfrak{a}$. Можно считать, что $vx \in L_k$. Для любого $f \in L_k$ имеем $\beta_{kn}^e f = g_k r + f_1$, где $\deg f_1 < \deg g_k$. В частности,

$$\beta_{kn}^m x + \mathfrak{a} = \gamma_0 + \gamma_1 y_{nk} + \ldots + \gamma_s y_{nk}^s + \mathfrak{a},$$

$\gamma_i \in F_{n-1k}$, $0 \leqslant i \leqslant s$, $s < \deg g_k$. Так как $vx + \mathfrak{a} \in F_{n-1k} + \mathfrak{a}$, то $v\gamma_1 = \ldots = v\gamma_s = 0$, т. е. $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_s = 0$. Тогда $\beta_{kn}^m x + \mathfrak{a} \in F_{n-1k} + \mathfrak{a}$ и $vx + \mathfrak{a} \in F_{n-1k} + \mathfrak{a}$. Из взаимной простоты элементов v и β_{kn} следует включение $x \in F_{n-1k} + \mathfrak{a}$. Повторяя несколько раз приведенные только что рассуждения, придем к включению $x \in F[H] + \mathfrak{a}$. Но тогда $(v + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \cap (F[H] + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} = (v + \mathfrak{a})(F[H] + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} = (vF[H] + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$. Поскольку $\mathfrak{a} \cap F[H] = (0)$ и H — нециклическая группа ранга 1, то из леммы 1 вытекает бесконечность индекса $|F[H] : vF[H]|$. Но тогда бесконечен и индекс $K : (v + \mathfrak{a})|$. Однако из изоморфизма $K \cong A_1$ следует, что K—почти неприводимый K-модуль. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие 1. *Пусть A — точный G-модуль с условием $\mathrm{Min} - \infty$ для подмодулей, G — абелева группа, T — периодическая часть G и $G_1 = G/T$ — группа конечного ранга. Если G_1 не включает в себя сервантных циклических подгрупп, а аддитивная группа модуля A периодическая, то модуль A артинов.*

Следствие 2. *Пусть G — двуступенно разрешимая группа с условием $\mathrm{Min} - \infty$ для нормальных подгрупп, A — ее максимальная абелева нормальная подгруппа, $C = G/C_G(A)$. Если подгруппа A периодическая и $C/t(C)$ не включает в себя сервантных циклических подгрупп, то A удовлетворяет условию $\mathrm{Min} - G$.*

Модуль A над кольцом K с единицей назовем гиперцентральным или, точнее, K-гиперцентральным, если A обладает таким рядом $(0) = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots A_\gamma = A$ подмодулей, что $A_{\alpha+1}(x-1) \leqslant A_\alpha$ при любом $x \in K$, $\alpha < \gamma$.

Лемма 2. *Пусть G — абелева группа конечного свободного ранга, A — артинов монолитичный $\mathbb{Z}[G]$-модуль, A_0 — $\mathbb{Z}[G]$ — монолит A, $H = C_G(A_0)$. Тогда A — $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральный модуль.*

Доказательство. Из условий леммы и теоремы 2.3 работы [14] вытекает, что аддитивная группа модуля A является p-группой, p — простое число. Поскольку отображение $a \mapsto pa$ является модульным гомоморфизмом, то, не ограничивая общности, можно считать, что аддитивная группа модуля A является элементарной абелевой.

Пусть M — верхний $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентр A. Ясно, что M — $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль A. Предположим, что $M \neq A$. Так как A/M — артинов $\mathbb{Z}[G]$-модуль, то он включает в себя ненулевой неприводимый $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль B/M. Предположим, что B включает в себя собственный $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль $C \not\leqslant M$. Тогда $B/M = C + M/M \cong C/C \cap M$. Пользуясь условием минимальности для $\mathbb{Z}[G]$-подмодулей, можно выделить такой $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль $D \leqslant B$, что $D/D \cap M$ — неприводимый $\mathbb{Z}[G]$-модуль, $H \not\leqslant C_G(D/D \cap M)$, а всякий собственный $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль D уже входит в $D \cap M$. Допустим, что $C_G(D/D \cap M) \neq C_G(D)$. Пусть $x \in C_H(D/D \cap M) \setminus C_G(D)$. Тогда $C_D(x)$ — это собственный подмодуль D, в частности $C_D(x) \leqslant D \cap M$. Пусть $a \in D \setminus D \cap M$ и $S/D \cap M = a\mathbb{Z}[H] + D \cap M/D \cap M$. Из соотношения $x \in C_G(D/D \cap M)$ следует включение $S(x-1) \leqslant D \cap M$. Фактор $S(x-1)/(D \cap M)(x-1)$ является гиперцентральным циклическим $\mathbb{Z}[H]$-модулем, поэтому $S(x-1) = (D \cap M)(x-1) + (b_1)$, где $b_1 = b(x-1)$, $b \in S$, причем $b_1(h-1) \in (D \cap M)(x-1)$ для любого $h \in H$. Если $d \in S$, то $d(x-1) = d_1(x-1) + kb_1$ для некоторого $d_1 \in D \cap M$. В частности, $d - d_1 - kb \in C_D(x) \leqslant D \cap M$, т. е. $d \in M \cap D + (b)$. Далее, имеем $b(h-1)(x-1) = b_1(h-1) = d_2(x-1)$, где $d_2 \in D \cap M$. Отсюда $b(h-1) - d_2 \in C_D(x) \leqslant D \cap M$, так что $b(h-1) \in D \cap M$. Это означает, что $C_H(S/D \cap M) = H$. Но поскольку $a\mathbb{Z}[G] + D \cap M/D \cap M = D/D \cap M$, то отсюда вытекает равенство $H = C_H(D/D \cap M)$. Получаем противоречие с выбором подмодуля D. Полученное противоречие доказывает включение $C_H(D/D \cap M) \leqslant C_G(D)$. Из следствия теоремы 2.4 работы [14] вытекает, что G/H и $G/C_G(D/D \cap M)$ — периодические p'-группы. Таким образом, $G/C_H(D/D \cap$

$\cap M)$ — периодическая p'-группа. Пусть $H_1 = C_H(D/D \cap M)$, $G_1 = G/H_1$. Так как $H_1 \leqslant C_G(D)$, то на D можно смотреть как на $\mathbb{Z}[G_1]$-модуль. Подмодуль $D \cap M$ включает в себя $\mathbb{Z}[G_1]$-монолит D, поэтому из теоремы 3.2 работы [15] вытекает разложение $M \cap D \oplus D_1 = D$, где D_1 — $\mathbb{Z}[G_1]$-подмодуль. Получаем противоречие с выбором D. Полученное противоречие и доказывает равенство $M = A$, т. е. A — $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральный модуль. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — абелева группа конечного свободного ранга, A — артинов $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Тогда G включает в себя такую подгруппу H, определяющую периодическую фактор-группу конечного ранга, что A — $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральный модуль.*

Доказательство. Обозначим через S цоколь модуля A, $S = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, A_i — неприводимый $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль. Пусть B_i — максимальный $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль A, включающий в себя $\bigoplus\limits_{k \neq i} A_k$ и имеющий с A_i нулевое пересечение. Ясно, что A/B_i — монолитичный $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Положим $H_i = C_G(A_i + B_i/B_i)$. Из следствия теоремы 2.4 работы [14] вытекает, что G/H_i — периодическая p'-группа ранга 1. Из леммы 2 следует, что A/B_i — $\mathbb{Z}[H_i]$ — гиперцентральный модуль, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $H = \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} H_i$. Тогда G/H — периодическая группа конечного ранга и A/B_i — $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральный модуль. В частности, модуль $C = A/B_1 \oplus \ldots \oplus A/B_n$ является $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральным. Отображение $\varphi: a \mapsto (a + B_1, \ldots, a + B_n)$ будет, очевидно, модульным гомоморфизмом, и из включения $A\varphi \leqslant C$ вытекает, что $A\varphi$ — $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентральный модуль. Далее, $\operatorname{Ker} \varphi \cap S = \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i \cap S = (0)$, поэтому $A \cong A\varphi$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — двуступенно разрешимая группа с условием $\mathrm{Min} - \infty$ для нормальных подгрупп, A — ее максимальная нормальная абелева подгруппа. Если A удовлетворяет условию $\mathrm{Min} - G$, то G включает в себя такую гиперцентральную нормальную подгруппу $H \geqslant A$, что G/H — черниковская группа.*

Лемма 3. *Пусть A — абелева нормальная p-подгруппа гиперцентральной группы G, p — простое число. Если фактор-группа $G/C_G(A)$ p-полна, то $A \leqslant \zeta(G)$.*

Доказательство. Пусть $Z_1 = \zeta(G)$, Z_2 — второй гиперцентр G. Если $A \nleqslant Z_1$, то AZ_1/Z_1 имеет неединичное пересечение с Z_2/Z_1. Поэтому существует такой элемент $a \in A \cap Z_2 \setminus Z_1$, что $a^p \in Z_1$. В частности, $[G, a]$ — элементарная абелева p-подгруппа центра. Поэтому элементарной абелевой будет и фактор-группа $G/C_G(A)$. Из включения $C_G(A) \leqslant C_G(a)$ получаем тогда, что $G/C_G(A)$ имеет подгруппы индекса p, т. е. не является p-полной. Полученное противоречие и доказывает включение $A \leqslant \zeta(G)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — локально нильпотентная группа, N — ее нормальная подгруппа, определяющая периодическую фактор-группу. Если $\Pi(G/N) \cap \Pi(T) = \varnothing$, где T — периодическая часть N, то всякая подгруппа T, нормальная в N, нормальна и в G.*

Доказательство. Пусть $L \leqslant T$, $L \lhd N$, $a \in L$, $g \in G$, $F = \text{гр}(a, g)$. Если $|g|$ конечен, то $g = g_1 g_2$, где $\Pi(|g_1|) \subset \Pi(G/N)$, $\Pi(|g_2|) \subset \Pi(T)$. В частности, $g_2 \in N$. Так как $(|g_1|, |a|) = 1$, то $[g_1, a] = 1$. Тогда $[g, a] = [g_1 g_2, a] = [g_2, a] \in L$.

Пусть теперь $|g|$ бесконечен. Обозначим через V периодическую часть F. Очевидно, $F = V \leftthreetimes (g)$. Положим $n = |gN|$. Ясно, что $\Pi(n) \cap \Pi(T) = \varnothing$. Поскольку F конечно порождена, то V конечна. Тогда $\zeta(F)$ включает в себя такую подгруппу U без кручения, что F/U конечна и $\Pi(F/U) \subset \Pi(V)$. В частности, $g^m \in U$ для некоторого m, удовлетворяющего соотношению $\Pi(m) \subset \Pi(T)$. Так как $g^m \in \zeta(F)$, то $[g^m, a] = 1$. Из соотношения $(m, n) = 1$ следует равенство $sn + tm = 1$ для некоторых $s, t \in \mathbb{Z}$. Тогда $g = g_3^s g_4^t$, где $g_3 = g^n$, $g_4 = g^m$. Имеем $[g, a] = [g_3^s g_4^t, a] = [g_3^s, a] \in L$, ибо $g_3 = g^n \in N$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — гиперцентральная группа, N — ее нормальная подгруппа, определяющая p-полную фактор-группу, p — простое число, $T \lhd G$, $T \leqslant N$, $\Pi(T) = (p)$. Тогда всякая подгруппа T, нормальная в N, нормальна и во всей группе G.*

Доказательство. Пусть $L \leqslant T$, $L \lhd N$. Если $L = (1)$, то все доказано. Пусть $L \neq (1)$. Тогда $L \cap \zeta(N) \neq (1)$. Но $L \cap \zeta(N) \leqslant T \cap \zeta(N) = T_1$. Далее, $T_1 \lhd G$ и $C_G(T_1) \geqslant N$. Из леммы 3 следует тогда включение $T_1 \leqslant \zeta(G)$. В частности, $L \cap \zeta(N) \lhd G$. Переходя к фактор-группе $G/L \cap \zeta(N)$ и используя трансфинитную индукцию, докажем соотношение $L \lhd G$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — гиперцентральная группа, T — ее периодическая абелева нормальная подгруппа, причем фактор-группа $G/C_G(T)$ минимаксна. Тогда существует такая подгруппа $H \geqslant C_G(T)$, что $H/C_G(T)$ — конечно порожденная группа, и всякая подгруппа T, нормальная в H, нормальна в G.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что T — p-группа, p — простое число. Пусть $U/C_G(T)$ — периодическая часть фактор-группы $G/C_G(T)$. G/U — нильпотентная минимаксная группа без кручения, поэтому в ней существует конечно порожденная подгруппа V/U, связанная с G/U конечным субнормальным рядом, факторы которого будут полными p-группами или периодическими p'-группами. Из лемм 4 и 5 получаем, что всякая подгруппа T, нормальная в V, нормальна в G. Пусть H — конечно порожденная подгруппа, удовлетворяющая равенству $V = HU$. Поскольку G гиперцентральна, то она удовлетворяет нормализаторному условию. Пусть $H = N_0 \leqslant N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_\alpha \leqslant N_{\alpha+1} \leqslant \ldots N_\gamma = V$ — ряд последовательных нормализаторов.

Каждый фактор этого ряда является периодической группой, причем из леммы 3 следует, что среди этих факторов только конечное множество p-групп. Поэтому можно расширить H до такой конечно порожденной подгруппы, что факторы соответствующего ряда нормализаторов являются p'-группами. Остается использовать лемму 4. Теорема доказана.

Изучение двуступенно разрешимых групп с условием $\mathrm{Min} - \infty$ для нормальных подгрупп сводится к изучению модулей с условием $\mathrm{Min} - \infty$ над групповыми кольцами $\mathbb{Z}[G]$, где G — абелева минимаксная группа. Теорема 1 дает условия, при которых соответствующий модуль артинов. Теорема 2 показывает, что в таких модулях централизатор цоколя $\mathbb{Z}[H]$-гиперцентрален для подгруппы H, определяющей периодическую фактор-группу G/H, а теорема 3 сводит изучение к случаю, когда H — конечно порожденная группа. Таким образом, приведенные теоремы дают некоторый подход к изучению строения двуступенно разрешимых групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп.

1. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп.— Укр. мат. журн., 1971, **23**, № 5, с. 652—660.
2. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности.— Там же, 1968, **20**, № 4, с. 472—482.
3. *Baer R.* Polyminimaxgruppen.— Math. Ann., B, 1968, **175**, H. 1, S. 1—43.
4. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности.— Мат. сб., 1969, **78**, № 3, с. 323—331.
5. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности для неабелевых подгрупп.— Укр. мат. журн., 1971, **23**, № 5, с. 661—665.
6. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальных подгрупп.— Мат. заметки, 1981, **29**, № 1, с. 19—30.
7. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 5, с. 1068—1076.
8. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп.— В кн.: XV Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. сообщ Красноярск, 1979, ч. 1, с. 87.
9. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А.* О разрешимых группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности для нормальных подгрупп.— В кн.: VIII Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. докл. Киев, 1982, с. 37.
10. *Passman D. S.* The algebraic structure of group rings.— New York : Wiley and sons, 1977.— 720 p.

11. *Hartley B., Mcdougall D.* Injective modules and soluble groups satisfying the minimal condition for normal subgroups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1971, 4, N 1, p. 113—135.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М.: Наука, 1982.— 288 с.
13. *Wilson I. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index.— Math. Z., B, 1970, 114, H. 1, S. 19—21.
14. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп.— Алгебра и логика, 1980, **19**, № 2, с. 150—172.
15. *Kovacs L. G., Newman M. F.* Direct complementation tn group with operators.— Arch. Math., 1962, 13, p. 427—433.

Днепропетр. ун-т Поступила 24.01.83