УДК 519.21

Г. П. Буцан

Об инфинитезимальных полугруппах для стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности

Данная статья усиливает результаты работы [1], и в ней используются принятые там обозначения, а их обобщения точно определяются.

Определение 1. *Двупараметрическое семейство случайных величин* X_s^t, $0 \leqslant s \leqslant \leqslant T < \infty$, *со значениями в* $G_2(H)$ *называется левой*

M_2-полугруппой, если оно удовлетворяет условиям 1.1 и 1.3 работы [1], а также следующим условиям:

$$|X_s^t - E|_4 < \infty, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty; \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} MX_s^t = x_s^t \text{ обладает неограниченной вариацией в норме } |\cdot|_2, \text{ т. е.} \\ \operatorname*{Var}_{[0,T]}(x - E) = \sup\limits_{\Delta_n} \sum\limits_{k=1}^{m_n} |x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E|_2 < \infty; \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{в каждой точке } \tau \in [0, T] \text{ существует в норме } |\cdot|_4 \text{ и равен ну-} \\ \text{лю } (\operatorname{mod} P) \text{ хотя бы один из пределов: } X_{\tau-0}^{\tau} - E \text{ или } X_{\tau}^{\tau+0} - E \text{ при} \\ x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 < 1; \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } |x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 \geqslant 1, \text{ то существуют пределы} \\ X_{\tau-0}^{\tau-0} - E = \lim\limits_{0<\delta<\varepsilon\downarrow 0} (X_{\tau-\varepsilon}^{\tau-\delta} - E) = 0, \\ X_{\tau+0}^{\tau+0} - E = \lim\limits_{0<\delta<\varepsilon\downarrow 0} (X_{\tau+\delta}^{\tau+\varepsilon} - E) = 0, \\ X_{\tau-0}^{\tau+0} - E = \lim\limits_{\delta,\varepsilon\downarrow 0} (X_{t-\delta}^{t+\varepsilon} - E) \text{ в норме } |\cdot|_4 \text{ и} \\ (X_{\tau-0}^{\tau} - E)(X_{\tau}^{\tau+0} - E) = 0 \quad (\operatorname{mod} P). \end{array}\right| \tag{4}$$

Целью настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *У всякой M_2-полугруппы X_s^t существует инфинитезимальная $\check{A}$-полугруппа $\check{Y}_s^t$, которая задается по формуле*

$$\check{Y}_s^t = \check{D}(X_s^t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}), \tag{5}$$

где предел понимается в норме $|\cdot|_4$ и не зависит от последовательности разбиений $\{\Delta_n\} = \{t_k^n\}$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что теорему достаточно доказать, когда все скачки $x_{t-0}^{t+0} - E$ детерминированной полугруппы x_s^t будут меньше 1 в норме $|\cdot|_2$. В самом деле, в силу условия (2), точек τ_i, в которых $|x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} - E|_2 \geqslant 1$, будет только конечное число N. Предположим, что $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = \overline{1, N}$, и воспользовавшись условием (4), рассмотрим следующие M_2-полугруппы:

$$\overline{X}_s^t = \begin{cases} X_s^{\tau_i-0} X_{\tau_i+0}^{\tau_{i+1}-0} \ldots X_{\tau_{i+l}+0}^t, & 0 \leqslant \tau_{i-1} < s < \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} < t < \\ & < \tau_{i+l+1} \leqslant T, \\ X_{s+0}^{\tau_{i+1}-0} \ldots X_{\tau_{i+l}+0}^t, & 0 \leqslant s = \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} < t < \tau_{i+l+1} \leqslant T, \\ X_s^{\tau_i-0} \ldots X_{\tau_{i+l-1}+0}^{t-0}, & 0 \leqslant \tau_{i-1} < s < \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T, \\ X_{s+0}^{\tau_{i+1}-0} \ldots X_{\tau_{i+l-1}+0}^{t-0}, & 0 \leqslant s = \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T; \end{cases}$$

$$\tilde{X}_s^t = \begin{cases} X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} X_{\tau_{i+1}-0}^{\tau_{i+1}+0} \ldots X_{\tau_{i+l}-0}^{\tau_{i+l}+0}, & 0 \leqslant \tau_{i-1} < s < \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} < t < \\ & < \tau_{i+l+1} \leqslant T, \\ X_s^{\tau_i+0} X_{\tau_{i+1}-0}^{\tau_{i+1}+0} \ldots X_{\tau_{i+l}-0}^{\tau_{i+l}+0}, & 0 \leqslant \tau_i = s < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_{i+l} < \\ & < t < \tau_{i+l+1} \leqslant T, \\ X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} \ldots X_{\tau_{i+l}-0}^t, & 0 \leqslant \tau_{i-1} < s < \tau_i < \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T, \\ X_s^{\tau_i+0} \ldots X_{\tau_{i+l}-0}^t, & 0 \leqslant \tau_i = s < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T. \end{cases}$$

$\overline{X}_s^t$ получается из X_s^t выбрасыванием скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|_2\geqslant \geqslant 1$, и, следовательно, таковых не содержит, а в силу условий теоремы также является M_2-полугруппой. $\tilde{X}_s^t$ представляет собой произведение выброшенных скачков и также является M_2-полугруппой. Здесь мы, не ограничивая общности, предполагаем, что в крайних точках отрезка $[0, T]$ X_s^t непрерывна в норме $|\cdot|_4$.

Легко видеть, что $\overline{X}_s^t$ и $\tilde{X}_s^t$ независимы и

$$X_s^t=\overline{X}_s^t \boxtimes \tilde{X}_s^t=\tilde{X}_s^t \boxtimes \overline{X}_s^t=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m_n}\overline{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\tilde{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}, \tag{6}$$

где произведение Π берется в порядке возрастания индекса k слева направо, а предел понимается в $|\cdot|_4$ и не зависит от последовательности разбиений $\{t_k^n\}$.

С другой стороны, в силу условия (4), если существует в норме $|\cdot|_4$ предел $\breve{\overline{Y}}_s^t=\breve{D}(\overline{X}_s^t)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m_n}(\overline{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-M\overline{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})$, который не зависит от последовательности разбиений $\{t_k^n\}$, то существует также и предел

$$\breve{D}(X_s^t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}(\overline{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-M\overline{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}(\tilde{X}_{t_{k-1}^n}^{t_{k-1}^n}-M\tilde{X}_{t_{k-1}^n}^{t_{k-1}^n})=\breve{D}\overline{X}_s^t+\breve{D}\tilde{X}_s^t=\breve{\overline{Y}}_s^t+\breve{\tilde{Y}}_s^t=\breve{Y}_s^t, \tag{7}$$

который не зависит от последовательности разбиений $\{t_k^n\}$, поскольку всегда существует и не зависит от последовательности разбиений предел $\breve{\tilde{Y}}=\breve{D}\tilde{X}_s^t$. В самом деле, при $\delta_n^{(1)}$, $\delta_n^{(2)}\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(\tau_{i+1}-\tau_i)$, где $\delta_n^{(1)}$ и $\delta_n^{(2)}$ определены как в [1], но для различных последовательностей разбиений $\{t_k^n\}$ и $\{\sigma_j^n\}$ соответственно, справедливо следующее соотношение:

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n}(\tilde{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-M\tilde{X}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})-\sum_{j=1}^{r_n}(\tilde{X}_{\sigma_{j-1}^n}^{\sigma_j^n}-M\tilde{X}_{\sigma_{j-1}^n}^{\sigma_j^n})\right|_4=\left|\sum_{i=1}^{N}[(X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}-x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0})-\right.$$

$$\left.-(X_{\tau_i-0}^{\tau_i}-x_{\tau_i-0}^{\tau_i})-(X_{\tau_i}^{\tau_i+0}-x_{\tau_i}^{\tau_i+0})]\right|_4=\sum_{i=1}^{N}|(X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}-x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0})-$$

$$-(X_{\tau_i-0}^{\tau_i}-x_{\tau_i-0}^{\tau_i})-(X_{\tau_i}^{\tau_i+0}-x_{\tau_i}^{\tau_i+0})|_4=\sum_{i=1}^{N}|(X_{\tau_i-0}^{\tau_i}-E)(X_{\tau_i}^{\tau_i+0}-E)+$$

$$+(x_{\tau_i-0}^{\tau_i}-E)(x_{\tau_i}^{\tau_i+0}-E)|_4=0$$

в силу условия (4), потому что (см. условие 1.3 в [1])

$$(x_{\tau_i-0}^{\tau_i}-E)(x_{\tau_i}^{\tau_i+0}-E)=M(X_{\tau_i-0}^{\tau_i}-E)(X_{\tau_i}^{\tau_i+0}-E)=0.$$

Легко видеть, что в формуле (7)

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{j=i}^{i+l}(X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}-x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}),\quad 0\leqslant\tau_{i-1}<s<\tau_i<\ldots<\tau_{i+l}<t<\tau_{i+l+1}\leqslant T,\\ (X_s^{\tau_i+0}-x_s^{\tau_i+0})+\sum\limits_{j=i+1}^{i+l}(X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}-x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}),\quad 0\leqslant\tau_i=s<\tau_{i+1}<\ldots<\tau_{i+l}<\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad <t<\tau_{i+l+1}\leqslant T,\end{array}\right.$$

$$\check{\tilde{Y}}_s^t = \begin{cases} \sum_{j=i}^{i+l-1} (X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0} - x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}) + (X_{\tau_{i+l-0}}^t - x_{\tau_{i+l-0}}^t), \quad 0 \leqslant \tau_{i-1} < s < \tau_i < \ldots \\ \qquad\qquad \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T, \\ (X_s^{\tau_i+0} - x_s^{\tau_i+0}) + \sum_{j=i+1}^{i+l-1} (X_{\tau_j-0}^{\tau_j+0} - x_{\tau_j-0}^{\tau_j+0}) + (X_{\tau_{i+l}-0}^t - x_{\tau_{i+l}-0}^t), \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \tau_i = s < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_{i+l} = t \leqslant T, \end{cases}$$

и свойства (2.1) — (2.4) из [1] для $\check{Y}_s^t$ теперь проверяются очевидным образом.

Итак, пусть $|x_{t-0}^{t+0} - E|_2 < 1$ при любом $t \in [0, T]$.

Покажем, что оператор x_s^t при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ обратим, а $(x_s^t)^{-1}$ — ограничен. Действительно, если это было бы не так для некоторых $0 \leqslant s < t \leqslant T$, то по свойству 1.1 из [1] это не выполнялось бы или для $x_s^{(t+s)/2}$ или для $x_{(t+s)/2}^t$ и т. д., т. е. существовали бы последовательности точек $\{s_n\} < \{t_n\} \subset [0, T]$, $n = \overline{1, \infty}$, сходящиеся к некоторой точке $t \in [0, T]$, что это не выполнялось бы для последовательности операторов $\{x_{s_n}^{t_n}\}$, $n = \overline{1, \infty}$. Однако при $s_n \leqslant t \leqslant t_n$ (для бесконечного числа n) это противоречило бы предположению $|x_{t-0}^{t+0} - E|_2 < 1$, а при $t \leqslant s_n \leqslant t_n$ или $s_n \leqslant t_n \leqslant t$ (для бесконечного числа n) это противоречило бы условию (2), из которого следует, что $|x_{s_n}^{t_n} - E|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим далее функцию $|(x_0^s)^{-1}|_2$ и покажем, что она ограничена при $s \in [0, T]$. В противном случае существовали бы точка $t \in [0, T]$ и последовательность $\{s_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, такие, что $s_n \to t$, но $|(x_0^{s_n})^{-1}|_2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Причем, не ограничивая общности, последовательность $\{s_n\}$ можно выбрать так, чтобы либо $s_n \uparrow t$, либо $s_n \downarrow t$ при $n \to \infty$. Рассмотрим для определенности первый случай. Тогда по условию (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{s_{n-1}}^{s_n} - E|_2 = c \leqslant \leqslant \operatorname{var}_{[0,T]} (x - E) < \infty$, и потому для фиксированного положительного ε, начиная с некоторого n, справедливо неравенство $|x_{s_{k-1}}^{s_k} - E|_2 < \varepsilon$ при $k \geqslant n$, откуда

$$|(x_0^{s_k})^{-1}|_2 = |[(x_{s_{k-1}}^{s_k} - E) + E]^{-1} [(x_{s_{k-2}}^{s_{k-1}} - E) + E] \ldots [(x_{s_{n-1}}^{s_n} - E) + E]^{-1} \times$$
$$\times (x_0^{s_{n-1}})^{-1}|_2 \leqslant |(x_0^{s_{n-1}})^{-1}|_2 \cdot \left[\prod_{i=n}^{k} (1 - |x_{s_{i-1}}^{s_i} - E|_2\right]^{-1}. \tag{8}$$

Но поскольку все $|x_{s_{i-1}}^{s_i} - E|_2$ не отрицательны, $i = \overline{n, \infty}$, то сходимость бесконечного произведения в (8) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{i=n}^{\infty} |x_{s_{i-1}}^{s_i} - - E|_2 \leqslant \operatorname{var}_{[0,T]} (x - E) < \infty$, и таким образом, правая часть выражения (8) ограничена, что противоречит предположению $|(x_0^{s_n})^{-1}|_2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует такая константа $\alpha(T)$, что $|(x_0^s)^{-1}|_2 < \alpha(T)$ при $0 \leqslant s \leqslant T$.

Заметим, что в силу неравенства $|(x_s^t)^{-1}|_2 \leqslant |(x_0^t)^{-1}|_2 \, |x_0^s|_2$ аналогичный результат справедлив и для $|(x_s^t)^{-1}|_2$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим теперь семейство $x_0^s X_s^t (x_0^t)^{-1}$. В силу неравенств

$$|x_0^t - E|_3^2 = |M(X_s^t - E)|_3^2 \leqslant M|X_0^t - E|_3^2 = |X_0^t - E|_4^2; \quad |X_0^t (x_0^t)^{-1} - E|_4^2 \leqslant$$
$$\leqslant |(x_0^t)^{-1}|_2^2 \, |X_0^t - x_0^t|_4^2 \leqslant 2 \, |(x_0^t)^{-1}|_2^2 (|X_0^t - E|_4^2 + |x_0^t - E|_3^2) \leqslant 4\alpha^2(T) |X_0^t - E|_4^2$$

и условия (1) функция $F(\check{t}) = F_0(t) = |X_0^t (x_0^t)^{-1} - E|_4^2$ определена и семейство $x_0^s X_s^t (x_0^t)^{-1}$ является $\check{M}$-полугруппой (см. [1]). В силу свойства (2.8) из [2] при $0 \leqslant s \leqslant \mu \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ выполняется неравенство

$$|x_0^\mu X_\mu^t (x_0^t)^{-1} - x_0^\mu X_\mu^\tau (x_0^\tau)^{-1}|_4^2 \leqslant |x_0^s X_s^t (x_0^t)^{-1} - x_0^s X_s^\tau (x_0^\tau)^{-1}|_4^2 \leqslant F(t) - F(\tau) \quad (9)$$

и, таким образом, функция $F(t)$ монотонно возрастает. Далее, из неравенства

$$M|X_0^t|_2^2 \leqslant 2(M|X_0^t - x_0^t|_2^2 + |x_0^t|_2^2) \leqslant 2|x_0^t|_2^2 M|X_0^t (x_0^t)^{-1} - E|_2^2 +$$
$$+ 2|x_0^t|_2^2 \leqslant 2|x_0^t|_2^2 (F(t) + 1)$$

следует, что функция $M|X_0^t|_2^2 = \|X_0^t\|_2^2$ ограничена при $0 \leqslant t \leqslant T$, а условие (3) и неравенство (см. 2.11 в [2])

$$F(t) - F(s) = |X_0^t (x_0^t)^{-1} - X_0^s (x_0^s)^{-1}|_4^2 \leqslant \|X_0^s\|^2 \cdot \|X_s^t - x_s^t|_4^2 |(x_0^t)^{-1}|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\|X_0^s\|^2 (|X_s^t - E|_4^2 + |x_s^t - E|_3^2) |(x_0^t)^{-1}|_2^2 \quad (10)$$

влекут непрерывность $F(t)$ в каждой точке $t \in [0, T]$ слева или справа в зависимости от поведения в этой точке $X_{t-0}^t - E$ и $X_t^{t+0} - E$.

В силу условия (2) при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ определена функция

$$f(s, t) = \sup_{\{t_k^n\} \subset [s,t]} \Sigma |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_k^n}|_2 \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |x_0^\tau|_2 \operatorname*{Var}_{[0,t]} (x - E) < \infty.$$

Легко видеть, что $f(s, t)$ возрастает при $0 \downarrow s < t \uparrow T$ и для любых $0 \leqslant s \leqslant \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ справедливо равенство $f(s, \tau) + f(\tau, t) = f(s, t)$, из которого вытекают следующие равенства:

$$f(s, \tau \pm 0) + f(\tau \pm 0, t) = f(s, t). \quad (11)$$

Покажем теперь, что при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ справедливы равенства

$$f(s, \tau - 0) + |x_0^\tau - x_0^{\tau-0}|_2 = f(s, \tau) = f(s, \tau + 0) - |x_0^{\tau+0} - x_0^\tau|_2. \quad (12)$$

Действительно, пусть последовательность $\{t_k^n\}$ разбиений отрезка $[s, \tau]$ такова, что $f(s, \tau) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n}|_2$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{m_n - 1} |x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n}|_2 \leqslant$ $\leqslant f(s, t_{m_n - 1}^n) + |x_0^\tau - x_0^{t_{m_n-1}^n}|_2 \leqslant f(s, \tau)$, и, переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем первое из равенств (12).

Аналогичные рассуждения приводят к равенству $f(\tau, t) = f(\tau + 0, t) + |x_0^{\tau+0} - x_0^\tau|_2$, вычитая которое из соответствующего равенства в (11), получаем второе из равенств в (12).

Из равенств (10) и (12) в силу условия (3), ограниченности $\|X_0^s\|$ на $[0, T]$ и неравенства $\|X_0^t - X_0^s\| \leqslant \|X_0^s\| \cdot \|X_s^t - E\|$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, вытекает, что если $X_{\tau-0}^\tau - E = 0 \pmod P$, $\{X_\tau^{\tau+0} - E = 0, \bmod P\}$, то одновременно $F(t-0) = F(t)$ и $f(0, t-0) = f(0, t)$, $\{F(t+0) = F(t)$ и $f(0, t+0) = f(0, t)\}$. Иными словами, функции $F(t)$ и $f(t) = f(0, t)$ в каждой точке $t \in [0, T]$ одновременно непрерывны по крайней мере с одной стороны в зависимости от этой точки.

Покажем теперь, что для произвольной последовательности разбиений $\{\Delta_n\} = \{t_k^n\}$, $k = \overline{1, m_n}$, $0 \leqslant s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t \leqslant T$, удовлетворяющей условию $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, существует в $|\cdot|_4$ следующий предел:

$$\check{D}(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) = \lim_{n\to\infty} \check{Y}_s^t(\Delta_n) = \check{Y}_s^t, \quad (13)$$

который не зависит от последовательности $\{\Delta_n\}$.

Как и в [1], для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только для некоторого разбиения Δ_n выполняется соотношение $\delta_n < \delta(\varepsilon)$, то для любого другого разбиения $\Delta_m \supset \Delta_n$ справедливо равенство $|\check{Y}_s^t(\Delta_n) - \check{Y}_s^t(\Delta_m)|_4^2 < \varepsilon$.

Итак, пусть $0 \leqslant s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t \leqslant T$, $\Delta_n = \bigcup_{k=0}^{m_n} t_k^n$, $t_{k-1}^n = s_0^k < s_1^k < \ldots < s_{r_k}^k = t_k^n$, $\Delta_m = \bigcup_{k=0}^{m_n} \bigcup_{i=0}^{r_k} s_i^k$, $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)$.

В силу свойства 1.1 из [1] справедливо равенство:

$$X_s^t - x_s^t = \sum_{k=1}^{m_n} (X_s^{t_k^n} x_{t_k^n}^t - X_s^{t_{k-1}^n} x_{t_{k-1}^n}^t) = \sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x_{t_k^n}^t,$$

воспользовавшись которым, запишем следующее соотношение:

$$|\check{Y}_s^t(\Delta_n) - \check{Y}_s^t(\Delta_m)|_4^2 = \left| \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) \right|_4^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) x_{s_i^k}^{t_k^n} - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) \right|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | X_{t_{i-1}^n}^{s_{i-1}^k} (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) x_{s_i^k}^{t_k^n} - (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) |_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | (X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k}) \times$$

$$\times (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) x_{s_i^k}^{t_k^n} + (x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E)(X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) x_{s_i^k}^{t_k^n} + (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) \times$$

$$\times (x_{s_i^k}^{t_k^n} - E)|_4^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} 3 \{ | (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} [x_0^{t_{k-1}^n} X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} (x_0^{s_{i-1}^k})^{-1} - E] \times$$

$$\times [x_0^{s_{i-1}^k} X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} (x_0^{s_i^k})^{-1} - E] x_0^{t_k^n}|_4^2 + | (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} (x_0^{s_{i-1}^k} - x_0^{t_{k-1}^n}) (x_0^{s_{i-1}^k})^{-1} \times$$

$$\times [x_0^{s_{i-1}^k} X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} (x_0^{s_i^k})^{-1} - E] x_0^{t_k^n}|_4^2 + | (x_0^{s_{i-1}^k})^{-1} [x_0^{s_{i-1}^k} X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} (x_0^{s_i^k})^{-1} - E] \times$$

$$\times (x_0^{t_k^n} - x_0^{s_i^k})|_4^2 \leqslant \beta(T) \left[\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (F(s_{i-1}^k) - F(t_{k-1}^n))(F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (f(s_{i-1}^k) - f(t_{k-1}^n))^2 (F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)) + \tag{14}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (f(t_k^n) - f(s_i^k))^2 (F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)) \right],$$

где $\beta(T) = 3[\alpha^2(T) + (\alpha^4(T) + \alpha^2(T)) \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x_0^t|_2^2]$.

Покажем теперь, что каждое из трех слагаемых, стоящих в квадратных скобках в правой части соотношения (14), стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для первого слагаемого доказательство проведено в работе [1], а поскольку для второго и третьего слагаемых доказательства аналогичны, проведем его для второго слагаемого.

Для этого заметим, что поскольку $f(\tau)$ и $F(\tau)$ монотонны, то у них имеется только счетное число скачков, из которых всегда можно выделить конечное число скачков так, чтобы сумма всех оставшихся скачков функций $f(\tau)$ и $F(\tau)$ была меньше $\frac{\varepsilon}{12}\min(f^{-2}(T),\ F(T)^{-1/2})$.

Занумеруем теперь все точки скачков θ_i, $i=\overline{1,\infty}$, функций $f(\tau)$ и $F(\tau)$ на $[0,\ T]$ так,чтобы первые $N(\varepsilon)$ из них были именно теми, в которых происходят выделенные скачки, и представим функции $f(\tau)$ и $F(\tau)$ на отрезке $[0,\ T]$ в виде $f(\tau)=f_1(\tau)+f_2(\tau)+f_3(\tau)$, $F(\tau)=F_1(\tau)+F_2(\tau)+F_3(\tau)$, где $f_1(\tau)$ и $F_1(\tau)$ непрерывны на $[0,\ T]$, а $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ и $F_2(\tau)$ $F_3(\tau)$ — ступенчатые, причем скачки $f_3(\tau)$ и $F_3(\tau)$ совпадают по месту и величине с теми скачками $f(\tau)$ и $F(\tau)$ соответственно, которые попали в выделенные $N(\varepsilon)$ скачков, и только с ними, а скачки $f_2(\tau)$ и $F_2(\tau)$ совпадают с оставшимися скачками $f(\tau)$ и $F(\tau)$ соответственно по месту и величине, и только с ними и, кроме того, все $f_i(\tau)$, $F_i(\tau)$, $i=\overline{1,3}$, монотонно возрастают на $[0,\ T]$, а $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ и $F_2(\tau)$, $F_3(\tau)$ соответственно в каждой точке отрезка $[0,\ T]$ непрерывны или справа, или слева одновременно в зависимости от точки.

В этих обозначениях легко видеть, что второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (14) не превышает следующей суммы, состоящей из пяти слагаемых:

$$3\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(f_1(s_{i-1}^k)-f_1(t_{k-1}^n))^2(F(s_i^k)-F(s_{i-1}^k))+3\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(f_2(s_{i-1}^k)-f_2(t_{k-1}^n))^2\times$$

$$\times(F(s_i^k)-F(s_{i-1}^k))+3\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(f_3(s_{i-1}^k)-f_3(t_{k-1}^n))^2(F_1(s_i^k)-F_1(s_{i-1}^k))+$$

$$+3\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(f_3(s_{i-1}^k)-f_3(t_{k-1}^n))^2(F_2(s_i^k)-F_2(s_{i-1}^k))+$$

$$+3\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}(f_3(s_{i-1}^k)-f_3(t_{k-1}^n))^2(F_3(s_i^k)-F_3(s_{i-1}^k)). \tag{15}$$

Первое слагаемое в этой сумме не превышает $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n}(f_1(s_{i-1}^k)-f_1(t_{k-1}^n))^2F(T)$ и в силу равномерной непрерывности $f_1(\tau)$ на $[0,\ T]$ может быть сделано меньше $\varepsilon/4$ при $\delta_n\to 0$. Второе слагаемое в (15) меньше $\varepsilon/4$, поскольку $(f_2(s_{i-1}^k)-f_2(t_{k-1}^n))^2\leqslant\frac{\varepsilon}{12}F^{-1}(T)$ по определению функции $f_2(\tau)$. Четвертое слагаемое в (15) в силу свойств функции $F_2(\tau)$ ограничено величиной $f^2(T)\sum\limits_{k=1}^{m_n}\sum\limits_{i=1}^{r_k}(F_2(s_i^k)-F_2(s_{i-1}^k))<\varepsilon/4$. Заметим теперь, что если с ростом n δ_n станет и будет оставаться меньше $\min\limits_{0<i\neq j\leqslant N(\varepsilon)}|\theta_i-\theta_j|$, то в двойной сумме третьего слагаемого выражения (15) останется не более $N(\varepsilon)$ слагаемых, отличных от нуля, а все пятое слагаемое будет тождественно равняться нулю.

Каждое из не более чем $N(\varepsilon)$ слагаемых, в сумму которых превратится третье слагаемое выражения (15) при $\delta_n\ll\min\limits_{0<i\neq j\leqslant N(\varepsilon)}|\theta_i-\theta_j|$, будет иметь вид $(f_3(s_{i-1}^k)-f_3(t_{k-1}^n))^2\cdot(F_1(t_k^n)-F_1(s_{i-1}^k))$ (если $t_{k-1}^n\leqslant\theta_j\leqslant s_{i-1}^k\leqslant\leqslant t_k^n$ при некотором θ_j, $j=\overline{1,N(\varepsilon)}$) и за счет равномерной непрерывности на $[0,\ T]$ функции $F_1(t)$ может быть сделано меньше $\varepsilon(4N(\varepsilon)f^2(T))^{-1}$ при малых δ_n.

Поэтому все третье слагаемое в (15) при малых δ_n может быть сделано меньше $\varepsilon/4$. Таким образом, все выражение (15) может быть сделано меньше наперед заданного $\varepsilon>0$ при малых δ_n. Поэтому второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках выражения (14), стремится к нулю при $n \to \infty$, и, с учетом предыдущих замечаний относительно первого и третьего слагаемых, существует предел $\check{Y}_s^t = \check{D}(X_s^t)$ (см. (13)) в норме $|\cdot|_4$, который не зависит от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Переходя ко второй ее части, заметим, что доказательство свойств 2.3 и 2.4 в [1] для $\check{Y}_s^t$ очевидно, свойство 2.1 в [1] вытекает из того, что точку τ всегда можно присоединить к соответствующим разбиениям $\{\Delta_n\}$, а свойство 2.2 в [1] следует из оценки

$$|\check{D}(X_s^t)|_4^2 = |\check{Y}_s^t|_4^2 = \varphi(t) - \varphi(s) \leqslant \gamma(T)(F(t) - F(s)), \tag{16}$$

которая в силу (9) получается предельным переходом в неравенстве

$$|\check{Y}_s^t(\Delta_n)|_4^2 = \left|\sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\right|_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} |X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |(x_0^{t_{k-1}^n})^{-1}|_2^2 \, |x_0^{t_{k-1}^n} X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (x_0^{t_k^n})^{-1} - E|_4^2 \, |x_0^{t_k^n}|_2^2 \leqslant \gamma^2(T)(F(t) - F(s)).$$

Здесь $\gamma(T) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |(x_0^t)^{-1}|_2 \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |x_0^t|_2$, $\varphi(t) = |\check{Y}_0^t|_4^2$.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. $\hat{\sigma}_s^t \subset \sigma_s^t$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Следствие 2. *Справедлива оценка*

$$|X_s^t - x_s^t - \check{D}(X_s^t)|_4^2 \leqslant \beta(T)[(F(t-0) - F(s))(F(t) - F(s+0)) + (f(t-0) - f(s))^2(F(t) - F(s+0)) + (f(t) - f(s+0))^2(F(t-0) - F(s))], \tag{17}$$

которая получается предельным переходом (см. (14)) *в неравенстве*

$$|X_s^t - x_s^t - \check{Y}_s^t(\Delta_n)|_4^2 = \left|X_s^t - x_s^t - \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\right|_4^2 =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) x_{t_k^n}^t - \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\right|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \beta(T)\left\{\sum_{k=1}^{m_n} [F(t_{k-1}^n) - F(s)][F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)] + \sum_{k=1}^{m_n} [f(t_{k-1}^n) - f(s)]^2 \times \right.$$

$$\left. \times [F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)] + \sum_{k=1}^{m_n} [f(t) - f(t_k^n)]^2 [F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \beta(T)\{[F(t_{m_n-1}^n) - F(s)][F(t) - F(t_1^n)] + [f(t_{m_n-1}^n) - f(s)]^2[F(t) - F(t_1^n)] +$$

$$+ [f(t) - f(t_1^n)]^2 [f(t) - f(t_1^n)]^2 [F(t_{m_n-1}^n) - F(s)]\}.$$

Замечание 1. Если оператор $(x_0^t)^{-1}$ определен и $|(x_0^t)^{-1}|_2 < c(T) < \infty$ при $t \in [0, T]$, то из неравенства $|x_s^t - E|_2 \leqslant |(x_0^s)^{-1}|_2 |x_0^t - x_0^s|_2$ вытекает, что существование функции $f(t)$ влечет выполнение условия (2).

Замечание 2. Условие (4) носит необходимый характер для существования инфинитезимальной полугруппы, что легко увидеть на примере $\tilde{X}_s^t$.

Замечание 3. Из неравенства

$$|y_s^t(\Delta_n) - y_s^t(\Delta_m)|_2 = \left|\sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E)\right|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E |_2 \, | x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E |_2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} |(x_0^{t_{k-1}^n})^{-1}|_2 \, |(x_0^{s_{i-1}^k})^{-1}|_2 \times$$

$$\times | x_0^{s_{i-1}^k} - x_0^{t_{k-1}^n} |_2 \, | x_0^{s_i^k} - x_0^{s_{i-1}^k} |_2 \leqslant \gamma^2 (T) \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (f(s_{i-1}^k) - f(t_{k-1}^n)) (f(s_i^k) - f(s_{i-1}^k))$$

и свойств функции $f(t)$ аналогично (5) в [1] вытекает существование инфинитезимальной аддитивной детерминированной полугруппы $y_s^t = Dx_s^t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)$ в норме $|\cdot|_2$ для мультипликативной детерминированной полугруппы x_s^t.

Причем, аналогично началу доказательства теоремы, существование $(x_0^t)^{-1}$ и ограниченность $|(x_0^t)^{-1}|_2$ на $[0, T]$, используемые выше, не умаляют общности рассуждений. Учитывая это, а также замечание 1, и переходя к пределу в неравенствах

$$| y_s^t (\Delta_n) |_2 \leqslant \sum_k | x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E |_2 \leqslant c(T) (f(t) - f(s)), \quad | x_s^t - E - y_s^t (\Delta_n)|_3 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |x_s^{t_{k-1}^n} - E |_3 \, | x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E |_2 \leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_s^\tau - E |_3 (f(t) - f(s)),$$

$$| x_s^t - E - y_s^t (\Delta_n)_3| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} | x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E |_2 \, | x_{t_k^n}^t - E |_3 \leqslant$$

$$\leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_\tau^t - E |_3 (f(t) - f(s)),$$

получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} &| y_s^t |_2 \leqslant c(T) (f(t) - f(s)), \\ &| x_s^t - E - y_s^t |_3 \leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_s^\tau - E |_3 (f(t) - f(s)), \\ &| x_s^t - E - y_s^t |_3 \leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_\tau^t - E |_3 (f(t) - f(s)), \\ &| y_s^t |_3 \leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_s^\tau - E |_3 (f(t) - f(s)) + | x_s^t - E |_3, \\ &| y_s^t |_3 \leqslant c(T) \sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} | x_\tau^t - E |_3 (f(t) - f(s)) + | x_s^t - E |_3, \end{aligned} \tag{18}$$

из которых вытекает, что y_s^t удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname*{Var}_{[0,T]} y = \sup_{\{t_k^n\}} \sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |_2 < \infty, \quad 0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = T, \tag{19}$$

$$| x_{\tau-0}^\tau - E |_3 = | y_{\tau-0}^\tau |_3 = 0, \quad | x_\tau^{\tau+0} - E |_3 = | y_\tau^{\tau+0} |_3 = 0. \tag{20}$$

Иными словами, y_s^t непрерывна в каждой точке $\tau \in [0, T]$ слева или справа одновременно с x_s^t в норме $|\cdot|_3$, а также имеет на $[0,T]$ ограниченную вариацию в норме $|\cdot|_2$.

Рассмотрим теперь аддитивную стохастическую полугруппу $Y_s^t = \check{Y}_s^t + y_s^t$ для заданной M_2-полугруппы X_s^t, где $\check{Y}_s^t = \check{D}(X_s^t)$, $y_s^t = D(x_s^t)$. Очевидно, что при $| y_{\tau-0}^{\tau+0} |_2 \leqslant 1$ существуют в норме $|\cdot|_4$ пределы

$$Y_{\tau-0}^{\tau-0} = 0, \quad Y_{\tau+0}^{\tau+0} = 0, \quad Y_{\tau-0}^{\tau+0} \text{ и } Y_{\tau-0}^{\tau} Y_\tau^{\tau+0} = 0 \pmod P, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{21}$$

которые совпадают с соответствующими пределами в (4).

Таким образом, в условиях теоремы в норме $\|\cdot\|$ существует предел

$$D(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = \check{Y}_s^t + y_s^t = Y_s^t, \tag{22}$$

который, очевидно, удовлетворяет условиям 2.1 и 2.3 в [1], а в силу соотношений (17), (18) и (21) будет удовлетворять также и условиям:

Если $\forall \tau \in (0, T)$ $|y_{\tau-0}^{\tau+0}|_2 < 1$, то $\exists Y_{\tau-0}^{\tau}$, $Y_{\tau}^{\tau+0}$ в норме $|\cdot|_4$ и хотя бы один из этих пределов равен нулю $(\mathrm{mod}\, P)$, (23)

$$|Y_s^t|_4 < \infty, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{24}$$

При этом соответствующие пределы в (23) и (3) совпадают.

Определение 2. *Семейство Y_s^t со значениями в $\sigma_2(H)$ называется A_2-полугруппой, если оно удовлетворяет условиям* 2.1 *и* 2.3 *в* [1], *а также условиям* (19), (21), (23) и (24).

Определение 3. *A_2-Полугруппа называется A_3-полугруппой, если она удовлетворяет условию* (19) *в норме $|\cdot|_3$.*

Определение 4. *M_2-Полугруппа называется M_3-полугруппой, если она удовлетворяет условию* (3) *в норме $|\cdot|_3$.*

Следствие 3. *Для всякой $M_2(M_3)$-полугруппы X_s^t существует инфинитезимальная $A_2(A_3)$-полугруппа Y_s^t, которая задается по формуле* (22), *где предел понимается в норме $\|\cdot\|$ ($|\cdot|_4$).*

1. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 2, с. 221—224.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Поступила 01.03.84