УДК 517.948.35

Я. Д. Плоткин

О построении обобщенной функции Грина

В банаховом пространстве E рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$x'(t) = B(t)\,x(t) + f(t),\ \ x(0) = Dx(b),\ \ b > 0, \tag{1}$$

где функция $f(t)$ непрерывна, оператор-функция $B(t)$ сильно непрерывна на отрезке $[0,\ b]$, $D \in [E]$.

Предположим, что однородная краевая задача, соответствующая (1), имеет нетривиальные решения.

Оператор $A = I - DU(b)$, где $U(t)$—оператор Коши уравнения $x'(t) = B(t)\,x(t)$, назовем разрешающим оператором задачи (1). Очевидно, оператор A ограничен. Предположим дополнительно, что оператор A удовлетворяет условиям:

а) A — нормально разрешимый оператор;

б) ядро $N(A)$ и область значений $R(A)$ оператора A имеют соответственно прямые дополнения $M(A)$ и $L(A)$ в E;

в) ядро $N(A)$ и коядро $L(A)$ изоморфны.

Через P и Q обозначим соответственно операторы проектирования на $N(A)$ и $L(A)$ соответственно параллельно $M(A)$ и $R(A)$.

Для оператора A существует обобщенный обратный оператор R_0, обладающий свойствами

$$R_0A = I - P,\ \ AR_0 = I - Q,\ \ R_0Q = PR_0 = 0. \tag{2}$$

Л е м м а. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^b QU^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau = 0, \tag{3}$$

то краевая задача (1) *разрешима.*

О п р е д е л е н и е. *Обобщенной функцией Грина краевой задачи* (1) *назовем функцию* $G(t, \tau)$, *определенную в квадрате* $0 \leqslant \tau$; $t \leqslant b$ *и такую, что*

1) $G(t, \tau)$ *удовлетворяет неоднородному уравнению*

$$G_t'(t, \tau) = B(t) G(t, \tau) - b^{-1} U(t) Q U^{-1}(\tau) \tag{4}$$

при $0 < t < \tau$ *и* $\tau < t < b$;

2) $G(t, \tau)$ *удовлетворяет граничному условию*

$$G(0, \tau) = DG(b, \tau); \tag{5}$$

3) $$G(t, t-0) - G(t, t+0) = I. \tag{6}$$

Из определения следует, что решение краевой задачи (1) имеет вид $x(t) = x_0(t) + \int\limits_0^b G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$, где $x_0(t)$ — произвольное решение соответствующей (1) однородной краевой задачи.

Т е о р е м а. *Обобщенной функцией Грина краевой задачи* (1) *является функция*

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t)(R_0 + b^{-1}(b-t)Q + PK(\tau))\, U^{-1}(\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b, \\ U(t)(R_0 + b^{-1}(b-t)Q + PK(\tau) - I)\, U^{-1}(\tau), & 0 \leqslant t < \tau \leqslant b, \end{cases} \tag{7}$$

где $K(\tau)$ *при* $\tau \in [0, b]$ *есть линейный ограниченный оператор, сильно непрерывно дифференцируемый по* τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (7) по t, получим (4). Далее,

$$DG(b, \tau) = DU(b)(R_0 + PK(\tau))\, U^{-1}(\tau) =$$

$$= (I - A)(R_0 + PK(\tau))\, U^{-1}(\tau) = (R_0 + PK(\tau) + Q - I)\, U^{-1}(\tau) = G(0, \tau).$$

Этим доказано (5). Условие (6) проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что краевая задача (1) имеет бесконечное множество обобщенных функций Грина, что вполне закономерно. Чтобы из множества обобщенных функций Грина (7) выделить обобщеннную функцию Грина, обладающую определенными свойствами симметрии, введем краевую задачу

$$y'(t) = -B^*(t)\, y(t), \ \ D^* y(0) = y(b), \ \ y(t) \in E^*, \tag{8}$$

сопряженную к однородной краевой задаче, соответствующей (1). Обобщенная функция Грина краевой задачи (1), удовлетворяющая условию $G^*(\tau, t) = H(t, \tau)$, где $H(t, \tau)$ — обобщенная функция Грина краевой задачи (8), единственна. Такой обобщенной функцией Грина является функция

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t)(R_0 + b^{-1}(b-t)Q + b^{-1}(b-\tau)P)\, U^{-1}(\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b, \\ U(t)(R_0 + b^{-1}(b-t)Q + b^{-1}(b-\tau)P - I)\, U^{-1}(\tau), & 0 \leqslant t < \tau \leqslant b. \end{cases}$$

Таким образом, получено обобщение результатов работ [1, 2], где существенным было предложение о конечномерности ядра дифференциального оператора.

1. *Мацёнис И*. Об обобщенной функции Грина.— Лит. мат. сб., 1973, 13, № 1, с. 109—114.
2. *Кведарас Б*. Построение асимптотических рядов возмущений для двухточечной краевой задачи с переменной границей.— Дифференц. уравнения и их примен., 1976, вып. 14, с. 41—56.

Херсон. пед. ин-т

Поступила 14.03.84