УДК 517.984

В. А. Деркач, канд. физ.-мат. наук (Макеев. инж.-строит. ин-т)

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТАХ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Various classes of extensions and generalized resolvents of an Hermite operator acting in the Krein space are described in terms of abstract boundary conditions.

У термінах абстрактних граничних умов дано опис різних класів розширень та узагальнених резольвент ермітова оператора, що діє у просторі Крейна.

Пусть $\mathfrak{h}$ — сепарабельное пространство Крейна [1], т. е. гильбертово пространство с J-метрикой $[\cdot,\cdot] = (J\cdot,\cdot)$, где J — линейный оператор в $\mathfrak{h}$, удовлетворяющий условиям $J = J^* = J^{-1}$; A — замкнутый линейный J-эрмитов оператор в $\mathfrak{h}$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$: $[Af, g] = [f, Ag]$ $\forall f, g \in \mathfrak{D}(A)$.

Описание различных свойств расширений эрмитовых $(J = I)$ операторов, в особенности дифференциальных, естественно проводить в рамках подхода, связанного с понятием пространства граничных значений (ПГЗ) [2]. В настоящей работе, основные результаты которой анонсированы в [3], введено понятие ПГЗ и соответствующей ему функции Вейля для J-эрмитова оператора A в терминах граничного оператора и функции Вейля, дано описание J-самосопряженных (J-диссипативных) расширений J-эрмитова оператора, охарактеризован их спектр, получен аналог формулы М. Г. Крейна [4] для обобщенных резольвент J-эрмитова оператора A.

1. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Линеал $\theta \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ называют линейным отношением в $\mathcal{H}$ [5, 6]. Совокупность замкнутых линейных отношений в $\mathcal{H}$ обозначим через $\tilde{C}(\mathcal{H})$. Для $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{C}(\mathcal{H})$ положим

$$\alpha\theta = \{\{f, \alpha f'\} : \{f, f'\} \in \theta\},\ \alpha \in \mathbb{C};$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \{\{f, f_1' + f_2'\} : \{f, f_i'\} \in \theta_i,\ i = 1, 2\};$$

$$\mathfrak{R}(\theta) = \{f' : \exists f \in \mathcal{H}\ \{f, f'\} \in \theta\};$$

$$\ker\theta = \{f : \{f, 0\} \in \theta\},\quad \theta(0) = \{f' : \{0, f'\} \in \theta\}.$$

Отождествляя линейный оператор T, действующий в $\mathcal{H}$, с его графиком $\operatorname{gr} T = \{\{f, Tf\} : f \in \mathfrak{D}(T)\}$, определим вложение множества $C(\mathcal{H})$ замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$ в $\tilde{C}(\mathcal{H})$. Во множестве $\tilde{C}(\mathcal{H})$ определена инволюция

$$\theta \to \theta^* = \{\{h, h'\} : (h', f)_{\mathcal{H}} = (h, f')_{\mathcal{H}}\ \ \forall \{f, f'\} \in \theta\}.$$

Отношение θ называется эрмитовым, если $\theta \subset \theta^*$, и самосопряженным, если $\theta = \theta^*$. Отношение $\theta \in \tilde{C}(\mathcal{H})$ называется диссипативным, если из $\{f, f'\} \in \theta$ следует, что $\operatorname{Im}(f', f)_{\mathcal{H}} \geq 0$.

Следуя [5], определим резольвентное множество $\rho(\theta)$ отношения θ: $\rho(\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\theta - \lambda I) = \{0\},\ \mathfrak{R}(\theta - \lambda I) = \mathcal{H}\}$ и дадим классификацию спектра $\sigma(\theta) = \mathbb{C} \setminus \rho(\theta)$:

$$\sigma_p(\theta) = \{\lambda \in \sigma(\theta) : \ker(\theta - \lambda I) \neq \{0\}\};$$

$$\sigma_c(\theta) = \{\lambda \in \sigma(\theta) \setminus \sigma_p(\theta) : \mathfrak{R}(\theta - \lambda I) \neq \overline{\mathfrak{R}(\theta - \lambda I)} = \mathcal{H}\};$$

$$\sigma_r(\theta) = \{\lambda \in \sigma(\theta) \setminus \sigma_p(\theta) : \overline{\mathfrak{R}(\theta - \lambda I)} \neq \mathcal{H}\}.$$

Тогда $\sigma(\theta) = \sigma_p(\theta) \dot{\cup} \sigma_c(\theta) \cup \sigma_r(\theta)$.

Пусть $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ — множество ограниченных линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; $[\mathcal{H}] := [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$.

***Определение* 1 [7].** *Семейство отношений $\tau(\lambda) \in \tilde{C}(\mathcal{H})$, определенных в окрестности O_ζ точки $\zeta \in \mathbb{C}$, называют голоморфным в точке ζ, если существует гильбертово пространство $\mathcal{H}_1$ и ограниченно-голоморфные в точке ζ оператор-функции $\Phi(\lambda)$ и $\Psi(\lambda)$ со значениями в $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}]$ такие, что $\tau(\lambda)$ представимо в виде $\tau(\lambda) = \{\{\Phi(\lambda)h, \Psi(\lambda)h\} : h \in \mathcal{H}_1\}$.*

Для краткости будем писать $\tau(\lambda) = \{\Phi(\lambda), \Psi(\lambda)\}$. В случае $\tau(\lambda) \in C(\mathcal{H})$ определение 1 совпадает с определением Реллиха [7], а в случае $\tau(\lambda) \in [\mathcal{H}]$ — с определением ограниченно-голоморфной оператор-функции.

Если семейство $\tau(\lambda)$ вида (1) голоморфно, а $M(\lambda)$ — ограниченно-голоморфна в точке ζ, то семейство $\tau(\lambda) + M(\lambda) = \{\Phi(\lambda), \Psi(\lambda) + M(\lambda)\Phi(\lambda)\}$ также голоморфно в точке ζ [7, с. 461].

Будем говорить, что ядро $k(\lambda, \mu)$ со значениями в $[\mathcal{H}]$, определенное на $G \times G$ (G — некоторая область в $\mathbb{C}$), имеет κ отрицательных квадратов в G, если $k(\lambda, \mu) = k^*(\mu, \lambda)$ и $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_j \in G$, $h_j \in \mathcal{H}$, $1 \le j \le n$, квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} (k(\lambda_i, \lambda_j) h_i, h_j)_{\mathcal{H}} \xi_i \bar{\xi}_j \tag{2}$$

имеет не более κ (и хотя бы для одного набора λ_j, h_j) точно κ отрицательных квадратов.

***Определение* 2 [8].** *Голоморфное в области $G = \overline{G}$ семейство отношений $\tau = (\tau(\lambda))_{\lambda \in G}$ вида (1) будем относить к классу $\tilde{N}_\kappa(G, \mathcal{H})$, если: 1) $\tau(\bar{\lambda}) = \tau^*(\lambda)$ $\forall \lambda \in G$; 2) ядро $k(\lambda, \mu) := (\Phi^*(\mu)\Psi(\lambda) - \Psi^*(\mu)\Phi(\lambda))/(\lambda - \bar{\mu})$ имеет κ отрицательных квадратов в G.*

Число $\lambda_0 \in G$ называется ζ-точкой семейства τ, если $\zeta \in \sigma_p(\tau(\lambda_0))$.

Предложение 1. *Пусть $\tau = (\tau(\lambda))_{\lambda \in G} \in \tilde{N}_\kappa(G, \mathcal{H})$. Тогда: 1) $\forall \lambda \in G \cap \mathbb{C}_+$ множество $\sigma(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_-$ состоит из изолированных точек; 2) $\forall \zeta \in \mathbb{C}_-$ $\tau(\lambda)$ имеет не более чем κ ζ-точек в $\mathbb{C}_+$.*

Доказательство. 1) Пусть $\lambda \in G \cap \mathbb{C}_+$, $z \in \sigma_p(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_-$ и φ_j, $1 \le j \le n$, — линейно независимые векторы из $\ker(\tau(\lambda) - \zeta)$. Представляя $\tau(\lambda)$ в виде (1) и выбирая $h_j \in \mathcal{H}_1$ так, чтобы $\Phi(\lambda)h_j = \varphi_j$, $\Psi(\lambda)h_j = \zeta\varphi_j$, $\lambda_j = \lambda$, $1 \le j \le n$, получаем, что форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} (k(\lambda_i, \lambda_j) h_i, h_j)_{\mathcal{H}} \xi_i \bar{\xi}_j = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\lambda - \bar{\lambda}} \sum_{i,j=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)_{\mathcal{H}} \xi_i \bar{\xi}_j$$

является отрицательно определенной. В силу условия 2 из определения 2 ζ

является собственным значением отношения $\tau(\lambda)$ конечной кратности $k \le \kappa$. Аналогично показывается, что $\sigma_c(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_- = \varnothing$ и $\sigma_p(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_-$ не имеет точек сгущения в $\mathbb{C}_-$.

Если $\zeta \in \sigma_r(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_-$, то $\bar{\zeta} \in \sigma_p(\tau^*(\lambda)) = \sigma_p(\tau(\bar{\lambda}))$, поэтому множество $\sigma_r(\tau(\lambda)) \cap \mathbb{C}_-$ также состоит из изолированных точек.

2) Пусть $\zeta \in \mathbb{C}_-$ и λ_j — различные ζ-точки семейства τ, т.е. $\zeta \in \sigma_p(\tau(\lambda_j))$ и $\{\varphi_j, \zeta\varphi_j\} \in \tau(\lambda_j)$, $1 \le j \le n$. Тогда форма (2) приобретает вид

$$\operatorname{Im}\zeta \sum_{j,k=1}^{n} \frac{2i}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k} (\varphi_j, \varphi_k)_{\mathcal{H}} \xi_j \bar{\xi}_k .$$

Утверждение 2 следует теперь из того факта, что матрица $(2i/(\lambda_j - \bar{\lambda}_k) I_{\mathcal{H}})_{j,k>1}^{n}$ является положительно определенной в $\mathcal{H}^n$.

***Замечание* 1.** Для семейства $(\tau(\lambda))_{\lambda \in G} \in \tilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$ справедливо более сильное утверждение: суммарная алгебраическая кратность всех ζ-точек в $\mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}_-$) не превышает κ. В случае $(\tau(\lambda)) \in N_\kappa(\mathbb{C}^n)$ см. [9].

Из предположения 1 получаем, что условие $\zeta \in \rho(\tau(\lambda_0))$ для семейства $\tau \in \tilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$ влечет существование резольвенты $(\tau(\lambda) - \zeta)^{-1}$ для всех λ из некоторой окрестности точки λ_0 и голоморфность семейства τ эквивалентна голоморфности резольвенты $(\tau(\lambda) - \zeta)^{-1}$.

Как известно [10], в случае $\tau = (\tau(\lambda)) \in \tilde{N}_0 = (\tilde{R})$ неопределенная часть $\tau(\lambda)$ не зависит от λ и отношение $\tau(\lambda)$ представляется в виде $\tau(\lambda) = \{\{h_1, \tau_1(\lambda)h_1 + h_0\} : h_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 0, 1,\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,\ \tau_1(\lambda) \in N_0(\mathcal{H}_1)\}$. В случае $\kappa \ne 0$ это не так.

Пример. Пусть $\Psi(\lambda) = I_{\mathbb{C}^2}$, $\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, тогда семейство $\tau(\lambda) = \{\Phi(\lambda), \Psi(\lambda)\} \in N_1(\mathbb{C}^2)$. А $(\tau(\lambda))(0) = \left\{c\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}\right\}$ изменяется с изменением λ.

2. Пространства граничных значений и функция Вейля J-эрмитова оператора. Всюду в дальнейшем $\mathfrak{h}$ — сепарабельное пространство Крейна, A — замкнутый J-эрмитов оператор в $\mathfrak{h}$ с плотной областью определения и равными индексами дефекта $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{h} \ominus \mathfrak{R}(JA - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$; $A^+ := JA^*J$; $\mathfrak{D}(A^+)$ — гильбертово пространство с нормой графика оператора A^+.

***Определение* 3.** Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, в которой $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство; $\Gamma_i \in [\mathfrak{D}(A^+), \mathcal{H}]$, $i = 1, 2$, будем называть пространством граничных значений (ПГЗ) оператора A^+, если:

1) $\forall f, g \in \mathfrak{D}(A^+)$ $[A^+f, g] - [f, A^+g] = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}$; (3)

2) отображение $\Gamma : f \to \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}$ из $\mathfrak{D}(A^+)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюрьективно.

В дефинитном случае ($J = I$) определение ПГЗ и историю вопроса см. в [2] (в несколько иной, но эквивалентной форме в [11]). В [12] вводится понятие ПГЗ оператора, действующего в банаховом пространстве.

С каждым ПГЗ естественно связаны два J-самосопряженных расширения $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^+$ и $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^+$, у которых

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}_i) = \ker \Gamma_i, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Замкнутое расширение $\tilde{A}$ оператора A назовем собственным и будем писать $\tilde{A} \in \mathrm{Ex}_A$, если $A \subset \tilde{A} \subset A^+$. Два собственных расширения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ оператора A называют дизъюнктными, если $\mathfrak{D}(\tilde{A}_1) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{D}(A)$, и трансверсальными, если, к тому же, $\mathfrak{D}(\tilde{A}_1) + \mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{D}(A^+)$.

Из определения 3 получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— ПГЗ оператора* A^+. *Тогда:*

1) *между множествами* Ex_A *и множеством* $\tilde{C}(\mathcal{H})$ *существует взаимнооднозначное соответствие, при котором*

$$f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}) \quad (\tilde{A} \in \mathrm{Ex}_A) \Leftrightarrow \Gamma f = \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta\, (\in \tilde{C}(\mathcal{H})); \tag{5}$$

2) *расширение* $\tilde{A} \in \mathrm{Ex}_A$ *трансверсально (дизъюнктно) расширению* $\tilde{A}_2$, *если и только если* $\exists B \in [\mathcal{H}]$ $(B \in C(\mathcal{H}))$, *такой что*

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2); \tag{6}$$

3) *расширение* $\tilde{A} \in \mathrm{Ex}_A$ *является* J*-эрмитовым* (*соответственно* J*-самосопряженным,* J*-диссипативным*), *если и только если отношение* θ *является эрмитовым* (*соответственно самосопряженным, диссипативным*).

Расширение $\tilde{A} \in \mathrm{Ex}_A$, определяемое соотношением (5) ((6)), обозначим $\tilde{A}_\theta$ $(\tilde{A}_B)$.

Замечание 2. В случае пространства Крейна особенно заметны преимущества данного подхода по сравнению с подходом Дж. Неймана. Все утверждения предложения 2 очевидны, в то время как попытка обобщить формулы Дж. Неймана и получить на этом пути описание расширений оператора A приводят к значительным трудностям [1, 13].

Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — некоторое ПГЗ оператора A^+; $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ — J-самосопряженные расширения J-эрмитова оператора A, определенные равенством (4). Будем в дальнейшем предполагать, что $\rho(\tilde{A}_2) \neq \varnothing$. Здесь мы определим функцию Вейля J-эрмитова оператора. Ввиду отсутствия аналога формулы Дж. Неймана, отправным пунктом является следующее предложение.

Предложение 3. 1) $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ *справедливо разложение*

$$\mathfrak{D}(A^+) = \mathfrak{D}(\tilde{A}_2) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda; \; (\mathfrak{N}_\lambda = \ker(A^+ - \lambda)); \tag{7}$$

2) $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ *оператор* $\Gamma_2 \upharpoonright_{\mathfrak{N}_\lambda} \in [\mathfrak{N}_\lambda, \mathcal{H}]$ *ограниченно обратим.*

Доказательство. 1) Пусть $f \in \mathfrak{D}(A^+)$, тогда существует $f_2 \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$, такой что $(\tilde{A}_2 - \lambda) f_2 = (A^+ - \lambda) f$. Так как $(A^+ - \lambda)(f - f_2) = 0$, то $f_\lambda = f - f_2 \in \mathfrak{N}_\lambda$. 2) Достаточно показать, что $\forall h \in \mathcal{H}$ $\exists f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda : \Gamma_2 f_\lambda = h$. Действительно, из определения 3 следует, что $\exists f \in \mathfrak{D}(A^+)$, такой что $\Gamma_2 f = h$. Если $f = f_2 + f_\lambda$, $f_2 \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$, $f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, то $\Gamma_2 f_\lambda = h$.

Пусть $\gamma(\lambda)$ — оператор-функция, определенная $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ равенством

$$\gamma(\lambda) = (\Gamma_2 \upharpoonright_{\mathfrak{N}_\lambda})^{-1} \in [\mathcal{H}, \mathfrak{N}_\lambda]. \tag{8}$$

Предложение 4. $\forall\, \lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}_2)$ *справедливы соотношения*

$$\gamma(\lambda) = (\tilde{A}_2 - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}\gamma(\zeta); \tag{9}$$

$$\gamma^{+}(\bar{\lambda}) = \Gamma_1(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $f_\zeta \in \mathfrak{N}_\zeta$. Тогда, как легко видеть,

$$f_\lambda = (\tilde{A}_2 - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_\zeta = f_\zeta + (\lambda - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_\zeta \in \mathfrak{N}_\lambda. \tag{11}$$

Из (8) и (11), учитывая, что $\Gamma_2 f_\lambda = \Gamma_2 f_\zeta\ (= h)$, получаем

$$\gamma(\lambda)h = \gamma(\lambda)\Gamma_2 f_\lambda = f_\lambda = (\tilde{A}_2 - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_\zeta =$$

$$= (\tilde{A}_2 - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}\gamma(\zeta)\Gamma_2 f_\zeta = (\tilde{A}_2 - \zeta)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}\gamma(\zeta)h.$$

Для доказательства соотношения (10) положим в определении 3, $f = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} h$, $h \in \mathfrak{h}$, $g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Тогда $[\tilde{A}_2(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} h, g] - [(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} h, A^{+} g] = (\Gamma_1(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} h, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}$, откуда с учетом равенства $\gamma(\bar{\lambda})\Gamma_2 g = g$, следует $[h, \gamma(\bar{\lambda})\Gamma_2 g] = (\Gamma_1(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} h, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}$, т. е. $\gamma^{+}(\bar{\lambda}) = \Gamma_1(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}$.

Определение 4. *Оператор-функцию* $M(\lambda)$, *определенную* $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ *равенством*

$$M(\lambda)\Gamma_2 g = \Gamma_1 f_\lambda \quad (f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda), \tag{12}$$

назовем функцией Вейля J-эрмитова оператора A, соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Как следует из соотношений (8), (12), $M(\lambda) = \Gamma_1\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$, и является голоморфной в $\rho(\tilde{A}_2)$ оператор-функцией со значениями в $[\mathcal{H}]$. Из определения 3 следует, что $M(\bar{\lambda}) = M^{*}(\lambda)$.

Предложение 5. $\forall \lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}_2)$ *справедливо соотношение*

$$M(\lambda) - M^{*}(\zeta) = (\lambda - \bar{\zeta})\gamma^{+}(\zeta)\gamma(\lambda). \tag{13}$$

Доказательство. Из тождества $\gamma(\lambda) - \gamma(\bar{\zeta}) = (\lambda - \bar{\zeta})(\tilde{A}_2 - \bar{\zeta})^{-1}\gamma(\lambda)$, соотношений $\Gamma_2\gamma(\lambda)h = \Gamma_2\gamma(\bar{\zeta})h = h$ и предложения 4 следует

$$M(\lambda) - M(\bar{\zeta}) = (\lambda - \bar{\zeta})\Gamma_1(\tilde{A}_2 - \bar{\zeta})^{-1}\gamma(\lambda) = (\lambda - \bar{\zeta})\gamma^{+}(\zeta)\gamma(\lambda).$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $M^{*}(\zeta) = M(\bar{\zeta})$.

Пространство Крейна с J-метрикой называется пространством Понтрягина индекса κ ($\mathfrak{h} = \Pi_\kappa$), если $\dim (J - I)\mathfrak{h} = \kappa < \infty$. Напомним [8, 10] следующее определение.

Определение 5. *Пусть* $\mathfrak{h} = \Pi_\kappa$ — *пространство Понтрягина,* A — *J-эрмитов оператор в* $\mathfrak{h}$, $\tilde{A}_2$ — *его J-самосопряженое расширение;* $\mathcal{H}$ — *гильбертово пространство,* $\gamma(\lambda_0) \in [\mathcal{H}, \mathfrak{N}_{\lambda_0}]$, $\gamma^{-1}(\lambda_0) \in [\mathfrak{N}_{\lambda_0}, \mathcal{H}]$, $\lambda_0 \in \rho(\tilde{A}_2)$, $\gamma(\lambda)$ — *оператор-функция, определенная соотношением* (9). *Тогда оператор-функция* $M(\lambda)$, *удовлетворяющая* $\forall\, \lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}_2)$ *соотношению* (13), *называется Q-функцией оператора A, принадлежащей J-самосопряженному расширению* $\tilde{A}_2$.

Таким образом, в предложении 6 нами доказана в одну сторону следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — J-эрмитов оператор, действующий в пространстве Π_κ, $\tilde{A}_2$ — его J-самосопряженное расширение. Тогда совокупность Q-функций оператора A, принадлежащих расширению $\tilde{A}_2$, совпадает с совокупностью функций Вейля J-эрмитова оператора A, соответствующих всевозможным ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, для которых $\ker\Gamma_2 = \mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$.*

Доказательство обратного утверждения см. в [14]. При $J = I$ предложения 4, 5 и теорема 1 доказаны в [15–17].

3. Функция Вейля и спектр расширений оператора A. Пусть θ — замкнутое линейное отношение в $\mathcal{H}$, $\tilde{A}_\theta$ — расширение оператора A, определяемое соотношением (5).

Теорема 2. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора A^+, $M(\lambda)$ — соответствующая ему функция Вейля, $\tilde{A}_\theta \in \mathrm{Ex}_A$. Тогда:*

1) $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(M(\lambda) - \theta)$, $\Gamma_2 \ker(\tilde{A}_\theta - \lambda) = \ker(M(\lambda) - \theta)$;

2) $\lambda \in \sigma_r(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_r(M(\lambda) - \theta)$;

3) $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \rho(M(\lambda) - \theta)$ и $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta)$

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(M(\lambda) - \theta)^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda}). \tag{14}$$

Доказательство. 1) Пусть $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta)$ и $\tilde{A}_\theta f = \lambda f$. Тогда $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $M(\lambda)\Gamma_2 f = \Gamma_1 f$. Учитывая, что $\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta$, получаем $\{\Gamma_2 f, 0\} \in M(\lambda) - \theta$, т. е. $0 \in \sigma_p(M(\lambda) - \theta)$ и $\Gamma_2 f \in \ker(M(\lambda) - \theta)$.

Обратно, если $\{h, 0\} \in M(\lambda) - \theta$, то, полагая $f = \gamma(\lambda)h$, получаем, что $f \in \mathfrak{N}_\lambda$, и, так как $\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} = \{h, M(\lambda)h\} \in \theta$, то $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_\theta)$. Таким образом, $\tilde{A}_\theta f = \lambda f$, $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta)$ и $\Gamma_2 f = h \in \ker(M(\lambda) - \theta)$.

2) Если $\lambda \in \sigma_r(\tilde{A}_\theta)$, то $\bar{\lambda} \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta^+)$ и из утверждения 1 следует, что $0 \in \sigma_p(M(\lambda) - \theta^*)$. Так как $M(\bar{\lambda}) = M^*(\lambda)$ и $0 \notin \sigma_p(M(\lambda) - \theta)$, то $0 \in \sigma_r(M(\lambda) - \theta)$.

3) Пусть $0 \in \rho(M(\lambda) - \theta)$. Покажем, что уравнение

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda)f = g \tag{15}$$

разрешимо $\forall g \in \mathfrak{h}$. Отыскивая решение уравнения (15) в виде $f = f_\lambda + (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}g$, где $f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, и применяя предложение 4, получаем $\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} = \{\Gamma_2 f_\lambda, \gamma^+(\bar{\lambda})g + M(\lambda)\Gamma_2 f_\lambda\} \in \theta$. Таким образом, $\{\Gamma_2 f_\lambda, \gamma^+(\bar{\lambda})g\} \in \theta - M(\lambda)$ и, следовательно,

$$\Gamma_2 f_\lambda = (\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda})g \Rightarrow f_\lambda = \gamma(\lambda)(\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda})g,$$

$$f = (\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}g - \gamma(\lambda)(M(\lambda) - \theta)^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda})g.$$

Тем самым показано, что $0 \in \rho(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}$ и $(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(M(\lambda) - \theta)^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda})$.

Для доказательства обратного утверждения покажем, что при $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta)$ $\forall\, h_1 \in \mathcal{H}$ $\exists\, h_2 \in \mathcal{H}$, такой, что $\{h_2, h_1\} \in M(\lambda) - \theta$. В силу определения 3 существует $g \in \mathfrak{D}(A^+)$, для которого $\Gamma_2 g = 0$, $\Gamma_1 g = -h$. Пусть $f = (\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}(\tilde{A}_2 - \lambda) g \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_\theta)$. Так как $f_\lambda = f - g \in \mathfrak{N}_\lambda$, то $\Gamma_1 f_\lambda = M(\lambda)\Gamma_2 f_\lambda$ и

$$\{\Gamma_2 f_\lambda, h_1\} = \{\Gamma_2 f_\lambda, \Gamma_1 f_\lambda - (\Gamma_1 f_\lambda - h_1)\} = \{\Gamma_2 f_\lambda, \Gamma_1 f_\lambda - \Gamma_1 f\} \in M(\lambda) - \theta.$$

Полагая $h_2 = \Gamma_2 f_\lambda$, получаем требуемое. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{h})$ — идеал Неймана – Шаттена в $[\mathfrak{h}]$, $1 \le p \le \infty$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\tilde{A}_{\theta_j} \to Ex_A$, $\theta_j \in \tilde{C}(\mathcal{H})$, $j = 1, 2$, $\lambda \in \rho(\tilde{A}_{\theta_1}) \cap \cap\, \rho(\tilde{A}_{\theta_2})$, $z \in \rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2)$. *Тогда* $(\tilde{A}_{\theta_1} - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{h}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\theta_1 - \lambda)^{-1} - (\theta_2 - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$. *При* $J = I$ *теорема* 2 *и следствие* 1 *получены в* [15–17], *в частных случаях доказывались рядом авторов* (*см.* [2]).

Напомним [18], что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным числом, а $h_0\ (\ne 0)$ — собственным вектором операторного пучка $L(\lambda)$, $\lambda \in G \subset \mathbb{C}$, если $L(\lambda_0) h_0 = 0$. Вектор h_k называется присоединенным вектором пучка $L(\lambda)$, соответствующим числу λ_0, если существуют векторы $h_0\ (\ne 0)$, $h_1, \ldots, h_{k-1}$, такие что

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} L^{(j)}(\lambda_0) h_{m-j} = 0, \; m = 0, 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Следующее предложение дополняет теорему 2.

Предложение 6. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta)$. *Тогда система векторов* $f_0, f_1, \ldots, f_k$ *образует цепочку собственных и присоединенных векторов оператора* $\tilde{A}_\theta$, *соответствующих числу* λ, *если и только если система* $h_j = \Gamma_2 f_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, *образует цепочку собственных и присоединенных векторов пучка* $L(\lambda) = M(\lambda) - \theta$, *соответствующих числу* λ, *т. е.*

$$\left\{ h_m, \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} M^{(l)}(l) h_{m-l} \right\} \in \theta, \;\; m = 0, 1, \ldots, k. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть векторы $f_0, f_1, \ldots, f_k$ образуют цепочку собственных и присоединенных векторов оператора $\tilde{A}_\theta$, т. е. выполнены соотношения

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda) f_0 = 0, \; (\tilde{A}_\theta - \lambda) f_j = f_{j-1}, \; j = 1, 2, \ldots, k. \tag{18}$$

В силу уже доказанного в теореме 2 имеем

$$\{h_0, M(\lambda) h_0\} \in \theta, \; h_0 = \Gamma_2 f_0. \tag{19}$$

Докажем вначале, что выполнены соотношения $(j = 1, 2, \ldots, k;\; f_{\bar\zeta} \in \mathfrak{N}_{\bar\zeta})$

$$[f_{j-1}, f_{\bar\zeta}] = \sum_{l=1}^{j} \left(\left\{ M(\zeta) - \sum_{s=0}^{l-1} \frac{M^{(s)}(\lambda)}{s!} (\zeta - \lambda)^s \right\} \frac{\Gamma_2 f_{j-l}}{(\zeta - \lambda)^l}, \; \Gamma_2 f_{\bar\zeta} \right)_{\mathcal{H}}. \tag{20}$$

При $j = 1$ получаем из (18) и (3) $[f_0, f_{\bar\zeta}] = 1/(\lambda - \zeta)([A^+ f_0, f_{\bar\zeta}] - [f_0, A^+ f_{\bar\zeta}]) = 1/(\lambda - \zeta)((\Gamma_1 f_0, \Gamma_2 f_{\bar\zeta})_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f_0, \Gamma_1 f_{\bar\zeta})_{\mathcal{H}})$, т. е. $[f_0, f_{\bar\zeta}] = ((M(\lambda) - M(\zeta))(\lambda - \zeta)^{-1} f_0, f_{\bar\zeta})_{\mathcal{H}}$, соотношение (20) при $j = 1$ доказано. Пусть теперь соотношения (20) выполняются при $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, переходя к пределу при $\zeta \to \lambda$, получаем

$$[f_{j-1}, f_{\bar\lambda}] = \left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{l!} M^{(l)}(\lambda)\,\Gamma_2 f_{j-l},\ \Gamma_2 f_{\bar\lambda} \right)_{\mathcal{H}},\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$[f_{j-1}, f_{\bar\lambda}] = [(A^+ - \lambda) f_j, f_{\bar\lambda}] = ((\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2) f_j, \Gamma_2 f_{\bar\lambda})_{\mathcal{H}}. \tag{22}$$

Из (21), (22) получаем

$$(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2) f_j = \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{l!} M^{(l)}(\lambda)\,\Gamma_2 f_{j-l},\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{23}$$

Докажем справедливость соотношения (20) при $j = m + 1$. Отправляясь от равенства $f_m = (\zeta - \lambda)^{-1}(f_{m-1}, (A^+ - \zeta) f_m)$, имеем

$$[f_m, f_{\bar\zeta}] = (\zeta - \lambda)^{-1}([f_{m-1}, f_{\bar\zeta}] - [(A^+ - \zeta) f_m, f_{\bar\zeta}]) =$$

$$= (\zeta - \lambda)^{-1}([f_{m-1}, f_{\bar\zeta}] - ((\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2) f_m, \Gamma_2 f_{\bar\zeta})_{\mathcal{H}}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} (\zeta - \lambda)^{-(l+1)} \left(\left(M(\zeta) - \sum_{s=0}^{l-1} \frac{1}{s!} M^{(s)}(\lambda)(\zeta - \lambda)^s \right) \Gamma_2 f_{m-l},\ \Gamma_2 f_{\bar\zeta} \right)_{\mathcal{H}} -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{M^{(l)}(\lambda)}{(\zeta - \lambda)\, l!} \Gamma_2 f_{m-l},\ \Gamma_2 f_{\bar\zeta} \right)_{\mathcal{H}} + \left(\frac{M(\zeta) - M(\lambda)}{\zeta - \lambda} \Gamma_2 f_m,\ \Gamma_2 f_{\bar\zeta} \right)_{\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m+1} (\zeta - \lambda)^{-l} \left(\left(M(\zeta) - \sum_{s=0}^{l-1} \frac{1}{s!} M^{(s)}(\lambda)(\zeta - \lambda)^s \right) \Gamma_2 f_{m+1-l},\ \Gamma_2 f_{\bar\zeta} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Из соотношений (20) следует справедливость соотношений (23) при $j = 1, 2, \ldots, k$. Учитывая, что $\{\Gamma_2 f_m, \Gamma_1 f_m\} \in \theta$, получаем из (19) и (23) соотношения (17).

Для доказательства обратного утверждения предположим, что выполнены соотношения (17), и выберем вектор $f_0 \in \mathfrak{N}_\lambda$ такой, что $\Gamma_2 f_0 = h_0$. Тогда $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde A_\theta)$ и $(\tilde A_\theta - \lambda) f_0 = 0$. Предположим, что уже выбраны векторы $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ так, что $(\tilde A_\theta - \lambda) f_j = f_{j-1}$ при $j = 1, 2, \ldots, m - 1$. Выберем вначале вектор $\tilde f_m \in \mathfrak{D}(A^+)$ так, чтобы

$$\Gamma_2 \tilde f_m = h_m,\ \Gamma_1 \tilde f_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} M^{(l)}(\lambda)\, h_{m-l}.$$

Тогда

$$[(A^+ - \lambda) \tilde f_m, f_{\bar\lambda}] = ((\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2) \tilde f_m, \Gamma_2 f_{\bar\lambda})_{\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{l!} M^{(l)}(\lambda)\,\Gamma_2 f_{m-l},\ \Gamma_2 f_{\bar\lambda} \right)_{\mathcal{H}}. \tag{24}$$

Подставляя в (24) доказанное выше соотношение (21) при $j = m$ и учитывая, что в силу (17) $\tilde f_m \in \mathfrak{D}(\tilde A_\theta)$, получаем $[(\tilde A_\theta - \lambda) \tilde f_m, f_{\bar\lambda}] = [f_{m-1}, f_{\bar\lambda}]$. Отсюда следует, что $(\tilde A_\theta - \lambda) \tilde f_m - f_{m-1} \in \mathfrak{R}(A - \lambda)$, т. е. $\exists f_m \in \mathfrak{D}(\tilde A_\theta)$ такой, что $(\tilde A_\theta - \lambda) f_m = f_{m-1}$, при этом $\Gamma_i f_m = \Gamma_i \tilde f_m$, $i = 1, 2$.

***Следствие* 2.** Пусть в условиях теоремы 2 $n_{\pm}(A) = 1$, $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta)$. Тогда алгебраическая кратность $\kappa(\lambda)$ собственного значения λ совпадает с наибольшим n, для которого $M^{(l-1)}(\lambda) = 0$, $l = 2, \ldots, n$, т. е. $\kappa(\lambda)$ совпадает с кратностью нуля λ функции $M(\zeta) - \theta$.

4. Обобщенные резольвенты *J*-эрмитова оператора.

***Определение* 6** [1, 10]. *Голоморфную в окрестности точки* ζ *оператор-функцию* R_λ *называют обобщенной резольвентой* J*-эрмитова оперятора* A, *и пишут* $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}$, *если существует такое* J_1*-пространство* $\mathfrak{h}_1$ *и* $\tilde{J}$*-самосопряженный оператор* $\tilde{A} \supset A$ *в пространстве* $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}_1$ *с* $\tilde{J}$*-метрикой* $(\tilde{J} = J \oplus J_1)$, *для которого* $\zeta \in \rho(\tilde{A})$ *и*

$$R_\lambda = P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}}, \ \lambda \in \rho(\tilde{A}), \tag{25}$$

где P *— ортопроектор из* $\tilde{\mathfrak{h}}$ *на* $\mathfrak{h}$. *Обобщенную резольвенту* R_λ *называют* κ*-регулярной и пишут* $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}(\kappa)$, *если в качестве* $\mathfrak{h}_1$ *выбрано пространство Понтрягина* Π_κ *и выполнено условие*

$$(\mathfrak{h}_{\tilde{A}} :=) \operatorname{span}\{(\tilde{A} - \lambda)^{-1}\mathfrak{h} : \lambda \in \rho(\tilde{A})\} = \tilde{\mathfrak{h}}. \tag{26}$$

***Предложение* 7.** *Пусть* $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}$ *— обобщенная резольвента вида* (25), *такая что* $\mathfrak{h}_1 = \Pi_\kappa$. *Тогда:*

1) $\exists \kappa' \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa' \le \kappa : R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}(\kappa')$;

2) *ядро* $k_R(\lambda, \mu) := (1/(\lambda - \bar{\mu}))(R_\lambda - R_{\bar{\mu}}) - R_\mu^+ R_\lambda$ *имеет* κ' *отрицательных квадратов в* $\rho(\tilde{A})$;

3) *оператор* $\tilde{A}$ *в* (25), *удовлетворяющий условию* (26), *определяется однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{h}_{\tilde{A}} \ne \tilde{\mathfrak{h}}$ и $\mathfrak{h}_0$ — изотропное подпространство в $\mathfrak{h}_{\tilde{A}}$. Так как $\mathfrak{h}_{\tilde{A}} \supset \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}_0 \subset \Pi_\kappa$ и, следовательно, $(\tilde{A} - \zeta)^{-1}\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$. Из соотношений $(\tilde{A} - \zeta)^{-1}\mathfrak{h}_{\tilde{A}} \subset \mathfrak{h}_{\tilde{A}}$, $(\tilde{A} - \zeta)^{-1}\mathfrak{h}_{\tilde{A}}^{[\perp]} \subset \mathfrak{h}_{\tilde{A}}^{[\perp]}$ получаем, что $(\tilde{A} - \zeta)^{-1}\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$. Полагая $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{\tilde{A}} \ominus \mathfrak{h}_0$, определяем оператор-функцию $R'_\lambda = (I - P_0)(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}'}$, где $P_0 = P_0^*$ — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}_0$. Пространство $\mathfrak{h}'$ является пространством Понтрягина индекса $\kappa' \le \kappa$. Учитывая, что $P_0(\tilde{A} - \lambda)^{-1}h' \in \mathfrak{h}_0$ $\forall h' \in \mathfrak{h}'$, $\lambda \in \rho(\tilde{A})$, получаем $\forall f' \in \mathfrak{h}'$

$$[R'_\lambda f', h'] = [(\tilde{A} - \lambda)^{-1} f', h'] - [P_0(\tilde{A} - \lambda)^{-1} f', h'] =$$

$$= [f', (\tilde{A} - \bar{\lambda})^{-1} h'] = [f', R'_{\bar{\lambda}} h'],$$

т. е. $(R'_\lambda)^+ = R'_{\bar{\lambda}}$ $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A})$. Аналогично получаем тождество

$$R'_\lambda - R'_\mu = (\lambda - \mu) R'_\lambda R'_\mu, \quad \lambda, \mu \in \rho(\tilde{A}). \tag{27}$$

Наконец, из соотношения $(\tilde{A} - \zeta)^{-1}\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$ следует, что $\ker R'_\lambda = \{0\}$.

Здесь мы воспользуемся общеизвестным фактом, доказательство которого в дефинитном случае имеется в [7].

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{h}'$ *— пространство Крейна, а* R'_λ *— голоморфная в* $G = \overline{G} \subset \mathbb{C}$ *оператор-функция со значениями в* $[\mathfrak{h}]$, *удовлетворяющая условиям* $R'_\lambda = (R'_\lambda)^+$, $R'_\lambda - R'_\mu = (\lambda - \mu) R'_\lambda R'_\mu$, $\ker R'_\lambda = \{0\}$, $\lambda, \mu \in G$. *Тогда существует оператор* $A' = (A')^+ \in C(\mathfrak{h}')$, *такой что*

$$R'_\lambda = (A' - \lambda)^{-1}. \tag{28}$$

Применяя лемму 1, представляем оператор-функцию R'_λ в виде (28). Для доказательства первого утверждения остается заметить, что

$$R_\lambda = P(A' - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}}, \ \lambda \in \rho(\tilde{A}), \tag{29}$$

и выполнено равенство $\mathfrak{h}' = \operatorname{span}\{(A' - \lambda)^{-1}\mathfrak{h} : \lambda \in \rho(\tilde{A})\}$.

2) Пусть $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}(\kappa')$ и оператор A из (25) удовлетворяет условию (26). Тогда ядро

$$k_R(\lambda, \mu) = (1/(\lambda - \overline{\mu}))(R_\lambda - R_{\overline{\mu}}) - R_\mu^+ R_\lambda, \ \lambda, \mu \in \rho(\tilde{A}), \tag{30}$$

имеет κ' отрицательных квадратов в $\rho(\tilde{A})$. Действительно, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, h_i \in \mathfrak{h}$, $\lambda_i \in \rho(\tilde{A})$, $1 \le i \le n$, полагая $f_i = R_{\lambda_i} h_i$, $\tilde{f}_i = (\tilde{A} - \lambda_i)^{-1} h_i$, получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} [k_R(\lambda_i, \lambda_j) h_i, h_j] \xi_i \overline{\xi}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \{(\lambda_i - \overline{\lambda}_j)^{-1}([R_{\lambda_i} h_i, h_j] - [h_i, R_{\lambda_j} h_j]) - [R_{\lambda_i} h_i, R_{\lambda_j} h_j]\} \xi_i \overline{\xi}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \{(\lambda_i - \overline{\lambda}_j)^{-1}([\tilde{f}_i, (\tilde{A} - \lambda_j)\tilde{f}_j] - [(\tilde{A} - \lambda_i)\tilde{f}_i, \tilde{f}_j]) - [f_i, f_j]\} \xi_i \overline{\xi}_j =$$

$$= [\tilde{f}, \tilde{f}] - [f, f] = [(I - P)\tilde{f}, (I - P)\tilde{f}], \tag{31}$$

где $\tilde{f} = \sum_i \xi_i \tilde{f}_i$, $f = P\tilde{f} = \sum_i \xi_i f_i$. В силу условия (26) из (31) следует утверждение о ядре $k_R(\lambda, \mu)$.

3) Пусть теперь оператор-функция $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}(\kappa)$ допускает два представления (25) и (29), удовлетворяющие условию (26), $\Pi_\kappa = \tilde{\mathfrak{h}} \ominus \mathfrak{h}$, $\Pi'_\kappa = \tilde{\mathfrak{h}}' \ominus \mathfrak{h}$. Полагая

$$U(I - P)\sum_{i=1}^{n} \xi_i (\tilde{A} - \lambda_i)^{-1} h_i = (I - P')\sum_{i=1}^{n} \xi_i (\tilde{A}' - \lambda_i)^{-1} h_i, \ \lambda_i \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}').$$

Определим оператор U, действующий из $\mathfrak{D}(U) \subset \Pi_\kappa$ в $\mathfrak{R}(U) \subset \Pi_{\kappa'}$, являющийся (в силу (31)) изометрическим. Так как $\overline{\mathfrak{D}}(U) = \Pi_\kappa$, $\overline{\mathfrak{R}}(U) = \Pi_{\kappa'}$, то оператор U допускает продолжение до унитарного оператора $U \in [\Pi_\kappa, \Pi_{\kappa'}]$. Отсюда следует, в частности, что $\kappa = \kappa'$. Пусть $\tilde{U} = I_{\mathfrak{h}} \oplus U \in [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}']$. Из равенства $\tilde{U}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} P = (\tilde{A}' - \lambda_i)^{-1} P'$, $\lambda \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}')$, и тождества Гильберта для резольвент получаем соотношение $\tilde{U}(\tilde{A} - \lambda_i)^{-1} = (\tilde{A}' - \lambda)^{-1}\tilde{U}$, $\lambda \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}')$, что и доказывает предложение.

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— некоторое ПГЗ оператора* A^+, $M(\lambda)$ *— соответствующая функция Вейля,* $\zeta \in \rho(\tilde{A}_2)$. *Тогда:*

1) *соотношение*

$$R_\lambda = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\Phi(\lambda)\gamma^+(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in O_\zeta \cup \bar{O}_\zeta, \tag{32}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством $\Omega_{A,\zeta}$ *обобщенных резольвент оператора* A *и множеством оператор-функций* $\Phi(\lambda)$ *со значениями в* $[\mathcal{H}]$, *голоморфных в точке* ζ *(* O_ζ *— окрестность точки* ζ; $\Phi(\lambda) = \Phi^*(\bar{\lambda})$ $\forall\lambda \in O_\zeta$*);*

2) $\forall\, h \in \mathfrak{H}$ $R_\lambda h$ *является решением граничной задачи*

$$(A^+ - \lambda)f = h, \quad (\Phi(\lambda)M(\lambda) - I)\Gamma_2 f - \Phi(\lambda)\Gamma_1 f = 0 \tag{33}$$

со спектральным параметром λ *в граничном условии;*

3) *совокупность* $\Omega_{A,\zeta}(\kappa)$ *описывается формулой*

$$R_\lambda = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda}), \tag{34}$$

в которой $\tau(\lambda) \in \tilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$, $0 \in \rho(\tau(\zeta) + M(\zeta))$. *Условие* (33) *эквивалентно условию* $\Gamma f = \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in -\tau(\lambda)$.

Доказательство. 1) Пусть $R_\lambda \in \Omega_{A,\zeta}$ — обобщенная резольвента оператора A. Так как расширения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ трансверсальны, то существует замкнутое (в норме графика оператора $\tilde{A}_2$ подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$, такое что $\mathfrak{D}(\tilde{A}_1) \dotplus \mathfrak{L} = \mathfrak{D}(A^+)$. Ясно, что оператор $\Gamma_1 \upharpoonright_{\mathfrak{L}} \in [\mathfrak{L}, \mathcal{H}]$ ограниченно обратим. Определим оператор-функцию $\Phi(\lambda) = -\Gamma_2 R_\lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)(\Gamma_1 \upharpoonright_{\mathfrak{L}})^{-1}$, $\lambda \in \rho(\tilde{A})$, со значениями в $[\mathcal{H}]$ и голоморфное в $\rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}_2)$ семейство $\theta(\lambda)$

$$\theta(\lambda) = \{\{\Phi(\lambda)h, [-I + M(\lambda)\Phi(\lambda)]h\} : h \in \mathcal{H}\}. \tag{35}$$

Пусть $\tilde{A}_{\theta(\lambda)} \in \mathrm{Ex}_A$ — расширение оператора A, определяемое соотношением (5). Из (35) получаем $\theta(\lambda) - M(\lambda) = \{\{\Phi(\lambda)h, -h\} : h \in \mathcal{H}\}$, поэтому $0 \in \rho(\theta(\lambda) - M(\lambda))$ и $(\theta(\lambda) - M(\lambda))^{-1} = -\Phi(\lambda)$. На основании теоремы 2 $\lambda \in \rho(\tilde{A}_{\theta(\lambda)})$ и справедливо равенство

$$(\tilde{A}_{\theta(\lambda)} - \lambda)^{-1} = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\Phi(\lambda)\gamma^+(\bar{\lambda}), \tag{36}$$

а так как $(\tilde{A}_{\theta(\lambda)} - \lambda)^{-1} - R_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ и

$$\Gamma_2(\tilde{A}_{\theta(\lambda)} - \lambda)^{-1} = -\Phi(\lambda)\gamma^+(\bar{\lambda}) = \Gamma_2 R_\lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)(\Gamma_1 \upharpoonright_{\mathfrak{L}})^{-1}\gamma^+(\bar{\lambda}) = \Gamma_2 R_\lambda,$$

то $R_\lambda = (\tilde{A}_{\theta(\lambda)} - \lambda)^{-1}$. Таким образом, из (36) получаем $R_\lambda = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\Phi(\lambda)\gamma^+(\bar{\lambda})$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\Phi(\lambda)$ — оператор-функция со значениями в $[\mathcal{H}]$, голоморфная в точке ζ. Рассмотрим голоморфное семейство отношений $\theta(\lambda)$, определенное формулой (35), и семейство собственных расширений $\tilde{A}_{\theta(\lambda)}$ ($\in \mathrm{Ex}_A$) оператора A.

Выбирая окрестность O_ζ точки ζ настолько малой, что при $\lambda \in O_\zeta$ выполняется неравенство $\|\Phi(\lambda)((M(\lambda) - M(\zeta))\| < 1$, получаем $0 \in \rho(\theta(\lambda) -$

$-M(\zeta))$. Действительно, если $\{h, h'\} \in \theta(\lambda) - M(\zeta)$, то $\{h, h' - M(\zeta)h\} \in \in \theta(\lambda)$, т. е.

$$\{I + \Phi(\lambda)[M(\zeta) - M(\lambda)]\}h + \Phi(\lambda)h' = 0. \tag{37}$$

Из (37) следует, что $0 \in \rho(\theta(\lambda) - M(\zeta))$, отсюда в силу теоремы 2 вытекает $\zeta \in \rho(\tilde{A}_{\theta(\lambda)})\ \forall \lambda \in O_\zeta$. Пусть

$$z(\lambda) = (\lambda - \zeta)(\lambda - \overline{\zeta})^{-1}, \quad U = \mathcal{K}_\zeta(A), \quad \mathcal{U}(z(\lambda)) = \mathcal{K}_\zeta(\tilde{A}_{\theta(\lambda)}),$$

где $\mathcal{K}_\zeta(A) = (A - \overline{\zeta})(A - \zeta)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора A. Нам потребуется следующее предложение.

Предложение 8 [19, 20]. *Пусть* $\mathcal{U}(z)$ — *голоморфная в точке* $z = 0$ *оператор-функция со значениями в* $[\mathfrak{h}_0]$. *Тогда существует* $\tilde{J}$*-унитарный узел* $\tilde{U} \in [\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1]$, *такой что*

$$\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1 = \operatorname{span}\{(\tilde{U} - z)^{-1}\mathfrak{h}_0 \colon z \in \rho(\tilde{U})\}, \tag{38}$$

и $\mathcal{U}(z)$ *является характеристической оператор-функцией узла* $\tilde{U}$:

$$\mathcal{U}(z) = U_{00} + zU_{01}(I - zU_{11})^{-1}U_{10}, \quad U_{ij} \in [\mathfrak{h}_j, \mathfrak{h}_i];\ i, j = 0, 1. \tag{39}$$

Предложение 8 получено в [19] как следствие из теоремы Д. З. Арова [21] о представимости произвольной голоморфной в точке $z = 0$ оператор-функции в виде характеристической функции узла Δ и теоремы Дэвиса о существовании $\tilde{J}$-унитарной дилатации $\tilde{U}$ для произвольного оператора Δ. В приведенном виде предложение 8 содержится в [20], где оператор $\tilde{U}$ построен конструктивно, методом воспроизводящих ядер.

Из (39) и формулы Фробениуса получаем равенство

$$(I - z\,\mathcal{U}(z))^{-1} = P(I - z\tilde{U})^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}}, \quad z = z(\lambda), \quad \lambda \in O'_\zeta. \tag{40}$$

Здесь P — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$, $O'_\zeta \subset O_\zeta$ — некоторая окрестность точки ζ. Кроме того, $1 \notin \sigma_p(\tilde{U})$. Действительно, если $\exists f \neq 0 \colon \tilde{U}f = f$, то $\forall h \in \mathfrak{h}$ $[f, (U - I)h] = 0$, т. е. $f [\perp] \mathfrak{h}$.

Из соотношения $(\tilde{U}^+ - \overline{z})^{-1}f = (1 - \overline{z})^{-1}f, z \in \rho(\tilde{U})$, получаем $[(\tilde{U} - - z)^{-1}h, f] = [h, (\tilde{U}^+ - \overline{z})^{-1}f] = 0$, что противоречит условию (38).

Обратное преобразование Кэли $\tilde{A} = (\zeta\tilde{U} - \overline{\zeta})(\tilde{U} - I)^{-1}$ оператора A является $\tilde{J}$-самосопряженным расширением оператора A и тогда, как следует из (40), справедливо равенство

$$(\tilde{A}_{\theta(\lambda)} - \lambda)^{-1} = \tilde{P}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}}, \ \lambda \in O'_\zeta. \tag{41}$$

Из (41) и (36) получаем равенство (32).

2) Из равенства (41) и предложения 2 следует, что $\forall h \in \mathfrak{h}$ $R_\lambda h$ является решением „граничной" задачи

$$(A^+ - \lambda)f = h, \quad \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta(\lambda), \quad \lambda \in \rho(\tilde{A}_2) \cap \rho(\tilde{A}), \tag{42}$$

где $\theta(\lambda)$ — голоморфное семейство отношений, определенное формулой (35).

Остается заметить, что соотношение $\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta(\lambda)$ можно переписать в эквивалентной форме $[I - \Phi(\lambda)M(\lambda)]\Gamma_2 f + \Phi(\lambda)\Gamma_1 f = 0$.

3) Пусть $R_\lambda = P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathfrak{h}} \in \Omega_{A,\zeta}(\kappa)$. Тогда $T(\lambda) = -\tilde{A}_{\theta(\lambda)} \in N_\kappa(\mathfrak{h})$. Действительно, пусть $f_i \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_{\theta(\lambda_i)})$, $1 \le i \le n$, и $g_i = R_{\lambda_i}^{-1} f_i$. Из (41) получаем $\tilde{A}_{\theta(\lambda)} = R_\lambda^{-1} + \lambda$ и

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda}_j)^{-1} \{[\tilde{A}_{\theta(\lambda_i)} f_i, f_j]) - [f_i, \tilde{A}_{\theta(\lambda_j)} f_j]\} \xi_i \bar{\xi}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} [k_R(\lambda_i, \lambda_j) f_i, f_j] \xi_i \bar{\xi}_j. \qquad (43)$$

Из п. 2 предложения 7 следует, что $-\tilde{A}_{\theta(\lambda)} \in N_\kappa(\mathfrak{h})$. Положим $\tau(\lambda) = -\theta(\lambda)$, $\Psi(\lambda) = I - M(\lambda)\Phi(\lambda)$. Тогда $\tau(\lambda) = \{\Phi(\lambda), \Psi(\lambda)\}$. Пусть $\lambda_i \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}_2)$, $h_i \in \mathcal{H}$, $1 \le i \le n$. Выберем $f_i \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_{\theta(\lambda_i)})$ так, чтобы $\Gamma f_i = \{\Gamma_2 f_i, \Gamma_1 f_i\} = \{\Phi(\lambda_i) h_i, -\Psi(\lambda_i) h_i\}$.

Из (43) и тождества (3) получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(\Psi(\lambda_i) h_i, \Phi(\lambda_j) h_j) - (\Phi(\lambda_i) h_i, \Psi(\lambda_j) h_j)}{\lambda_i - \bar{\lambda}_j} \xi_i \bar{\xi}_j =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(\Gamma_1 f_i, \Gamma_2 f_j) - (\Gamma_2 f_i, \Gamma_1 f_j)}{\lambda_i - \bar{\lambda}_j} \xi_i \bar{\xi}_j = -\sum_{i,j=1}^{n} [k_R(\lambda_i, \lambda_j) f_i, f_j] \xi_i \bar{\xi}_j. \qquad (44)$$

Таким образом, $\tau(\lambda) = \tilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$. Из равенства $\tau(\zeta) + M(\zeta) = \{\{\Phi(\lambda) h, h\} : h \in \mathcal{H}\}$ следует, что $0 \in \rho(\tau(\zeta) + M(\zeta))$.

Обратное утверждение следует из п. 1 теоремы 3 и соотношений (31), (43), (44).

Замечание 3. Формулы (32), (34) являются обобщением формулы М. Г. Крейна для обобщенных резольвент $R_\lambda \in \Omega_A(\kappa)$, полученной в случае $\mathfrak{h} = \Pi_\kappa$ в [10, 22]. Иное описание обобщенных резольвент, основанное на представлении R_λ в виде (41), принадлежит в дефинитном случае А. В. Штраусу [23] (об обобщениях формулы А. В. Штрауса на индефинитный случай см. [1]). Отметим, что в работе [19] описаны обобщенные резольвенты R_λ классов $\Omega_{A,\zeta}$, $\Omega_{A,\zeta}(\kappa)$ методом А. В. Штрауса (в случае $\kappa = 0$ см. [24]). Связь формулы (34) с ПГЗ в дефинитном случае установлена в [16, 17].

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Мат. анализ. 17. – М., 1979. С. 113 – 205.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев : Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Деркач В. А.* Расширения эрмитова оператора в пространстве Крейна // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №5. – С. 5– 9.
4. *Крейн М. Г.* О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m).// Докл. АН СССР. – 1946. – **52**, №8. – С. 657– 660.
5. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**, №1. – С. 9– 23.

6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1969. – **8**. – С. 3–24.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
8. *Krein M. G., Langer H.* Uber die Q-function eines π-herniteschen Operators im Raume Π_κ // Acta sci. Math. Szeged. – 1973. – **34**. – P. 191–230.
9. *Krein M. G., Langer H.* Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ // Acta sci. Math. Szeged. – 1981. – **43**. – P. 181–205.
10. *Крейн М. Г., Лангер Г.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функцион. анализ. – 1971. – **5**, № 3. – С. 54–69.
11. *Штраус А. В.* О самосопряженных операторах в ортогональной сумме гильбертовых пространств // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 3. – С. 512–515.
12. *Брук В. М.* Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах // Функцион. анализ. Спектральная теория. – Ульяновск, 1988. – С. 32–42.
13. *Кужель А. В.* Правильные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. – 1982. – **265**, № 5. – С. 199–201.
14. *Деркач В. А.* Обобщенные резольвенты эрмитовых операторов в пространстве Крейна. – Донецк, 1992. – 48 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. математики и механики; 92.02).
15. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 51 с. – (Препринт / АН УССР. ДонФТИ; 85.09).
16. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**, № 5. – С. 1041–1046.
17. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized Resolvents and the Bondary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps // J. Funct. Analysis. – 1991. – **95**, N 1. – P. 1–95.
18. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
19. *Азизов Т. Я.* К теории расширений J-изометрических и J-симметрических операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1984. – **18**, вып. 1. – С. 57–58.
20. *Dijksma A., Langer H., de Snoo H.* Unitary colligations in Krein spaces // Lect. Notes Math. – 1987. – **1242**. – P. 1–42.
21. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 211–228.
22. *Krein M. G., Langer H.* Uber einige forsetzungprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhangen // Math. Nachr. – 977. – **77**. – P. 187–236.
23. *Штраус А. В.* Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 1. – С. 57–61.
24. *Никонов А. А.* Об обобщеных резольвентах плотно заданного оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Функцион. анализ. Вып. 2. – Ульяновск, 1974. – С. 42–45.

Получено 20.07.92