УДК 517.512

**С. Б. Вакарчук,** канд. физ.-мат. наук
(Ин–т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск)

# О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

Let $E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$, be a Banach space of functions $f(z)$ analytic in a finite simply connected domain $\Omega$ with a rectifiable Jordan boundary and such that

$$\|f\|_{E'_p} = \left\{\iint_\Omega |f(z)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p} < \infty.$$

For entire transcendental functions $\varphi(z)$ of order $\rho = \infty$, the behavior of the best approximations by polynomials of degree less than or equal to $n$, $\mathcal{E}_n(\varphi)_p$, is considered in the metric of the space $E'_p(\Omega)$. In particular, a relationship between the $q$-order and the $q$-type of the functions $\varphi(z)$ and $\mathcal{E}_n(\varphi)_p$ is established.

Для цілих трансцендентних функцій $\varphi(z)$, що мають порядок $\rho = \infty$, у метриці простору $E'_p(\Omega)$ розглянуті питання поведінки найкращих наближень поліномами степеня $\leq n$, $\mathcal{E}_n(\varphi)_p$, де $E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$, — банахів простір, який складається з функцій $f(z)$, аналітичних у скінченній однозв'язній області $\Omega$ зі спрямлюваною жордановою межею, що задовольняють умову

$$\|f\|_{E'_p} = \left\{\iint_\Omega |f(z)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p} < \infty.$$

Зокрема, встановлені співвідношення, що пов'язують $q$-порядок і $q$-тип функції $\varphi(z)$ з $\mathcal{E}_n(\varphi)_p$.

**1.** Пусть $\Omega$ — конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой замкнутой жордановой кривой $\gamma$, причем дополнением к $\overline{\Omega} \overset{\mathrm{df}}{=} \Omega \cup \gamma$ служит односвязная область $G$, содержащая точку $z = \infty$. Будем говорить, что аналитическая в $\Omega$ функция $f(z)$ принадлежит множеству $E'_p(\Omega)$, $p > 0$, если выполняется условие

$$\|f\|_{E'_p} = \left\{\iint\limits_\Omega |f(z)|^p d\sigma_z\right\}^{1/p} < \infty, \quad d\sigma_z = dx\,dy, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, при $p \geq 1$ $E'_p(\Omega)$ есть банахово пространство.

Отметим, что в случае $p = 2$ и $\Omega = \{z : |z| < 1\}$ предельные соотношения, связывающие порядок и тип целой функции $f(z)$ с величинами ее наилучших полиномиальных приближений, были получены в [1]. Для остальных $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, существование подобных зависимостей доказано в [2]. Для односвязной области $\Omega$, ограниченной жордановой кривой $\gamma$, при $p = \infty$ первые результаты принадлежат А. В. Батыреву [3]. Позднее случай $2 \leq p < \infty$ был изучен в [4].

Полученные в [1–4] оценки наилучших полиномиальных приближений справедливы лишь для целых функций конечного положительного порядка $\rho$. При $\rho = \infty$, $\Omega = \{z : |z| < 1\}$ и $1 \leq p \leq \infty$ вопрос о поведении наилучших полиномиальных приближений целых функций рассматривался в [5]. Настоящая статья посвящена случаю $\rho = \infty$ для односвязной области $\Omega$, граница которой является спрямляемой жордановой кривой.

**2.** Пусть $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z(s) = x(s) + iy(s),\ 0 \leq s \leq l,\ z(0) = z(l)\}$, где $s$ — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на $\gamma$, $l$ — длина $\gamma$; $\Theta(s)$ — угол между касательной к (гладкой) кривой $\gamma$ в точке $z(s)$ и положительным направлением оси $OX$; $\omega(\Theta, t)$ — модуль непрерывности функции $\Theta(s)$.

Если для $\gamma$ выполнено условие

$$\int_0^c t^{-1}\omega(\Theta, t)\,dt < \infty,$$

где $c$ — произвольное положительное число, то говорят, что кривая $\gamma$ принадлежит классу $\Gamma$ [6].

Пусть $z = \psi_0(w)$ — функция, конформно и однолистно отображающая круг $|w| < 1$ на односвязную область $\Omega$ при условиях $\psi_0(0) = z_0$, $\psi_0'(0) > 0$, где $z_0$ — некоторая фиксированная точка из $\Omega$. С. Варшавски установил [7], что если $\gamma \in \Gamma$, то $\psi_0'(w)$ непрерывна, отлична от нуля в области $|w| \le 1$ и существуют положительные константы $\mu_1$ и $\mu_2$, зависящие только от $\gamma$, для которых

$$0 < \mu_1 \le |\psi_0'(w)| \le \mu_2 < \infty, \; |w| \le 1. \tag{1}$$

Известно [8], что замкнутую кривую $\gamma$ с отображающей функцией $w = \varphi(z)$ называют кривой типа $(\alpha)$, $\alpha \in [1, 2]$, если для любых $z \in \gamma$ и $t \in \gamma_R$ выполняется неравенство $|\varphi(t) - \varphi(z)| \le \hat{A}_\gamma |t - z|^{1/\alpha}$. Здесь $w = \varphi(z)$ — функция, которая конформно и однолистно отображает $G$ на область $|w| > 1$ при условиях

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z)/z = \nu > 0, \quad \varphi(\infty) = \infty;$$

$\gamma_R$, $R > 1$, — линия уровня кривой $\gamma$, соответствующая окружности $|w| = R$; $A_\gamma$ — некоторая постоянная, зависящая от $\gamma$.

Отображающая функция $\varphi(z)$ имеет в области $\overline{G}$ с границей $\gamma \in \Gamma$ непрерывную первую производную $\varphi'(z)$, для которой справедливо неравенство [6]

$$0 < \nu_1 \le |\varphi'(z)| \le \nu_2 < \infty, \quad z \in \overline{G}, \tag{2}$$

где $\nu_1$, $\nu_2$ — константы, зависящие только от $\gamma$.

Легко видеть, что для $\gamma \in \Gamma$ в силу (2)

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| \le \int_{z_1}^{z_2} |\varphi'(z)||dt| \le \nu_2 |z_2 - z_1|,$$

где $z_1 \in \gamma$, $z_2 \in \gamma_R$. Это означает, что все элементы множества $\Gamma$ являются кривыми типа $\alpha$ (при $\alpha = 1$).

Нам понадобится один аналог неравенства типа С. М. Никольского на плоскости $\mathbb{C}$ для класса алгебраических полиномов комплексного переменного. При его получении испопользован ряд идей и результатов из [2, 8].

**Лемма 1.** *Пусть $\Omega$ — односвязная область комплексной плоскости и ее граница $\gamma \in \Gamma$. Если $p_n(z)$ — произвольный многочлен степени $\le n$ и $1 \le$ $\le p \le q \le \infty$, то существует не зависящая от $n$ постоянная $c_{p,q}$ такая, что*

$$\|p_n\|_{E_q'} \le c_{p,q}\, n^{1/p - 1/q} \|p_n\|_{E_p'}. \tag{3}$$

***Доказательство.*** Покажем вначале, что для произвольного многочлена $p_n(z)$ степени $\le n$ существует не зависящая от $n$ константа $c_p > 0$, для которой в области $\Omega$ справедливо неравенство

$$|p_n(z)| \le c_p n^{1/p} \| p_n \|_{E'_p}. \tag{4}$$

Рассуждая от противного, полагаем, что для некоторого полинома $\tilde{p}_n(z)$ хотя бы в одной точке $z_0$ не существует константы $c_p$, удовлетворяющей (4). Обозначая через $\hat{\gamma}_r$ образ окружности $|w| = r$, $0 < r < 1$, при отображении $z = \psi_0(w)$ и полагая $l_* \overset{\text{df}}{=} \sup \{ |\hat{\gamma}_r| : 0 < r < 1 \}$, где $|\hat{\gamma}_r|$ — длина кривой $\hat{\gamma}_r$; $c_p^* \overset{\text{df}}{=} \left( l_*^2 \pi^{-1} \mu_1^{-2} \right)^{1/p}$, получаем

$$|\tilde{p}_n(z_0)| > c_p^* n^{1/p} \| \tilde{p}_n \|_{E'_p}. \tag{5}$$

Так как $\hat{\gamma}_r$, $r \in (0, 1)$, является замкнутой правильной аналитической кривой, очевидно, $\hat{\gamma}_r \in \Gamma$, и следовательно, является кривой типа $(\alpha = 1)$. Понимая под $\Omega_r$ область, ограниченную кривой $\gamma_r$ и содержащую точку $z_0$, на основании [8] имеем

$$\sup_{z \in \Omega_r} |\tilde{p}_n(z)| \le \left( l_*^2 / (2\pi A_{\hat{\gamma}_r}) \right)^{1/p} n^{1/p} \| \tilde{p}_n \|_{L_p(\hat{\gamma}_r)}. \tag{6}$$

Здесь $A_{\hat{\gamma}_r}$ — константа, соответствующая $\hat{\gamma}_r$ в определении кривых типа $(\alpha = 1)$;

$$\| f \|_{L_p(\gamma)} \overset{\text{df}}{=} \left\{ \int_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p}.$$

Поскольку всегда можно считать $A_\gamma \ge 1$, то, заменив $A_{\hat{\gamma}_r}^{-1}$ единицей, продолжим оценку (6):

$$\le (l_*^2 / 2\pi)^{1/p} n^{1/p} \| \tilde{p}_n \|_{L_p(\hat{\gamma}_r)}. \tag{7}$$

Используя отображение $z = \psi_0(w)$ $\forall f \in E'_p(\Omega)$, записываем

$$\| f \|_{E'_p} = \left\{ \int_0^1 \int_{|w|=r} |f(\psi_0(w))|^p |\psi'_0(w)|^2 |dw| \, dr \right\}^{1/p}. \tag{8}$$

Полагая

$$I_p(f) \overset{\text{df}}{=} \left\{ \int_0^1 \int_{\hat{\gamma}_r} |f(z)|^p |dz| \, dr \right\}^{1/p},$$

в силу (1) и (8) имеем

$$\mu_1^{2/p} I_p(f) \le \| f \|_{E'_p} \le \mu_2^{2/p} I_p(f). \tag{9}$$

Из (5) – (7) следует

$$(c_p^*)^p n \| \tilde{p}_n \|_{E'_p}^p \le (l_*^2 / 2\pi) n \| \tilde{p}_n \|_{L_p(\hat{\gamma}_r)}^p.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $r$ от $0$ до $1$ и учитывая вид $c_p^*$, а также левую часть неравенства (9), получаем $2 \le 1$. Данное противоречие доказывает справедливость соотношения (4).

При $1 \le p \le q \le \infty$

$$\| p_n \|_{E'_q} \le \left\{ \sup_{z \in \Omega} |p_n(z)|^{q-p} \right\}^{1/q} \left\{ \iint_{\Omega} |p_n(z)|^p \, d\sigma_z \right\}^{1/q}.$$

Учитывая (4), получаем требуемую формулу (3), что и завершает доказательство леммы 1.

Для функции $f(z) = E'_p(\Omega)$, $p \ge 1$, в области $\Omega$ рассмотрим интегральный модуль непрерывности

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{|h| \le \delta} \left\{ \iint_{\Omega} |f(z+h) - f(z)|^p \, d\sigma_z \right\}^{1/p},$$

где $f(z)$ полагается равной 0 при $z \overline{\in} \Omega$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\le n$. Пусть $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup \{ \| f - p_n \|_{E'_p} : p_n \in \mathcal{P}_n \}$. В дальнейшем понадобится следующее утверждение, полученное С. Я. Альпером.

**Лемма 2** [9]. *Пусть $f(z) \in E'_p(\Omega)$, $p \ge 1$, где $\Omega$ — ограниченная область с границей $\gamma \in \Gamma$. Тогда для всех натуральных $n$ справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n(f)_{E'_p} \le c\,\omega_p\left( f, \frac{\ln n}{n} \right), \tag{10}$$

*где константа $c$ от $n$ не зависит.*

Поскольку конечномерное подпространство нормированного пространства является множеством существования элемента наилучшего приближения (см., например, [10]), т. е. для $f(z) \in E'_p(\Omega)$ $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p} = \| f - \tilde{p}_n(f) \|_{E'_p}$, где $\tilde{p}_n(f) \in \mathcal{P}_n$, из (10) следует

$$\| f - \tilde{p}_n(f) \|_{E'_p} \to 0 \tag{11}$$

при $n \to \infty$.

Используя соотношения (3), (11) и метод, приведенный в [2], получаем в комплексной плоскости аналог результата А. А. Конюшкова [11] в виде следующей леммы.

**Лемма 3.** *Пусть $\Omega$ — конечная односвязная область комплексной плоскости с границей $\gamma \in \Gamma$; функция $f(z) \in E'_p(\Omega)$, $1 \le p < p_1 \le \infty$, и*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{E}_\nu(f)_{E'_p} \nu^{1/p - 1/p_1 - 1} < \infty.$$

*Тогда $f(z) \in E'_{p_1}(\Omega)$ и для всех натуральных $n$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_n(f)_{E'_{p_1}} \le \alpha_{p,p_1} \left\{ \mathcal{E}_n(f)_{E'_p} n^{1/p - 1/p_1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \mathcal{E}_\nu(f)_{E'_p} \nu^{1/p - 1/p_1 - 1} \right\}, \tag{12}$$

*где $\alpha_{p,p_1}$ — константа, не зависящая от $n$.*

**3.** Пусть $\gamma_r$ — образ окружности $|w| = r$, $r > 1$, на плоскости $z$ при конформном отображении $z = \psi(w)$, $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) > 0$, внешности единичного круга $|w| > 1$ на внешность области $\Omega$; $\Omega_r^+$ — часть комплексной плоскости, находящейся внутри $\gamma_r$; $\overline{\Omega}_r \overset{\mathrm{df}}{=} \Omega_r^+ \cup \gamma_r$. Обозначим $\tilde{M}(r, f)_\Omega = \max \{ |f(z)| : z \in \overline{\Omega}_r \}$.

Для целой функции $f(z)$ рассмотрим следующую величину:

$$\lambda(q) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^{[q]} \tilde{M}(r, f)_\Omega}{\ln r}, \; q \in N, \; q \geq 2, \tag{13}$$

где

$$\ln^{[q]} x = \underbrace{\ln \ldots \ln}_{q} x; \quad \ln^{[0]} x = x.$$

Если $\lambda(q-1) = \infty$, а $\lambda(q) < \infty$, то назовем $f(z)$ целой функцией $q$-порядка $\lambda(q)$. В случае $0 < \lambda(q) < \infty$ величину

$$k(q) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^{[q-1]} \tilde{M}(r, f)_\Omega}{r^{\lambda(q)}} \tag{14}$$

назовем $q$-типом функции $f(z)$.

Для $\Omega = \{z: |z| < 1\}$ величины $\lambda(q)$ и $k(q)$ были введены в [12]. При $q = 2$ и односвязной области $\Omega$ выражения (13) и (14), совпадающие соответственно с порядком $\rho$ и типом $\sigma$ целой функции $f(z)$, рассматривались в [3]. Отметим, что величины $\lambda(q)$ и $k(q)$ при $q \geq 3$ позволяют производить деление целых функций бесконечного порядка на классы по их росту.

Пусть функция $w = \varphi(z)$ — обратная рассмотренной ранее функции $z = \psi(w)$. Для достаточно больших $|z|$ ее лорановское разложение имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{z}{d} + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \ldots,$$

а $n$-й полином Фабера $F_n(z)$ для области $\Omega$ есть правильная часть разложения $\varphi^n(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$. Здесь $d$ — трансфинитный диаметр множества $\overline{\Omega}$. Далее потребуется следующая теорема.

**Теорема А** [13, с. 135, 136]. *Пусть $F_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots,$ — последовательность полиномов Фабера для односвязной области $\Omega$. Если функция $f(z)$ регулярна в области $\Omega_r^+$, $1 < r < \infty$, и на линии $\gamma_r$ имеет особую точку, то:*

1) *функция $f(z)$ разлагается в ряд по полиномам Фабера:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z), \tag{15}$$

*где*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} f(\psi(w)) w^{-n-1} dw, \; 1 < R < r;$$

2) *при этом*

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = r^{-1} \tag{16}$$

*и ряд* (15) *равномерно сходится внутри $\Omega_r^+$ и расходится вне $\overline{\Omega}_r$;*

3) *обратно: если выполняется* (16), *то ряд* (15) *равномерно сходится внутри $\Omega_r^+$ и расходится вне $\overline{\Omega}_r$, а функция $f(z)$, определенная рядом* (15), *регулярна в $\Omega_r^+$ и на линии уровня $\gamma_r$ имеет особую точку.*

*Поскольку*

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{\varphi^n(\xi)}{\xi - z} d\xi, \; z \in \Omega_r^+; \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

*то*

$$|F_n(z)| \le c_1(r)\,r^n,\; c_1(r) \overset{\text{df}}{=} l(\gamma_r)/(2\pi\,\tilde{d}(\gamma,\gamma_r));\; z\in\gamma, \tag{17}$$

*где* $l(\gamma_r)$ *— длина линии* $\gamma_r$*;* $\tilde{d}(\gamma,\gamma_r)$ *— расстояние между границей* $\gamma$ *области* $\Omega$ *и кривой* $\gamma_r$*;* $r>1$.

Выразим $q$-порядок и $q$-тип целой функции через коэффициенты ряда (15).

**Лемма 4.** *Пусть* $f(z)$ *— целая трансцендентная функция, представимая в области* $\Omega$ *рядом* (15). *Для того чтобы она имела конечный* $q$*-порядок* $\lambda(q)=\mu$, $q\ge 2$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln^{[q-1]}n}{-\ln|a_n|} = \mu. \tag{18}$$

*Если* $0<\lambda(q)<\infty$, *то для существования конечного* $q$*-типа* $k(q)=\nu>0$ *функции* $f(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \kappa_q |a_n|^{\lambda(q)/n}\ln^{[q-2]}n = \nu;\; q\ge 2, \tag{19}$$

*где* $\kappa_q \overset{\text{df}}{=} \{1/(e\lambda(q)d^{\lambda(q)})$, *если* $q=2$; $1$, *если* $q=3,4,\ldots\}$, $d$ *— трансфинитный диаметр множества* $\Omega$.

Доказательство данного утверждения не приводится, поскольку все основные рассуждения проводятся по указанной в [12] схеме. Отметим также, что случай $q=2$ ранее рассмотрен в [4].

**4. Теорема 1.** *Пусть функция* $f(z)=E_2'(\Omega)$, *где* $\Omega$ *— конечная односвязная область с жордановой границей, принадлежащей* $\Gamma$. *Для того чтобы* $f(z)$ *была соответственно:* 1) *целой;* 2) *целой функцией конечного* $q$*-порядка* $\lambda(q)>0$*;* 3) *целой функцией конечного* $q$*-порядка* $\lambda(q)>0$ *и конечного* $q$*-типа* $k(q)>0$*; необходимо и достаточно, чтобы соответственно выполнялись условия:*

1) $$\lim_{n\to\infty} [\mathcal{E}_n(f)_{E_2'}]^{1/n} = 0; \tag{20}$$

2) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln^{[q-1]}n}{-\ln\mathcal{E}_n(f)_{E_2'}} = \lambda(q); \tag{21}$$

3) $$\limsup_{n\to\infty} \kappa_q [\mathcal{E}_n(f)_{E_2'}]^{\lambda(q)/n}\ln^{[q-2]}n = k(q),\; q\ge 2. \tag{22}$$

***Доказательство.*** Проведем рассуждения для случая, когда выполяется условие 1. Пусть функция $f(z)$ целая. Полагая

$$p_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$$

и учитывая (17), получаем

$$\mathcal{E}_n^2(f)_{E_2'} \le \|f-p_n(f)\|_{E_2'}^2 \le c_1^2(r)\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2 r^{2k}, \tag{23}$$

где $r=\text{const}>1$. В силу (16) для $f(z)$ имеем

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0,$$

т. е. $\forall\,\delta>0\;\;\exists\, m_\delta\in N$ такое, что $|a_k|>\delta^k$ при $k>m_\delta$. Полагая $\delta<1/r$, продолжаем неравенство (23) для $n > m_\delta$

$$\leq c_1^2(r)(\delta r)^{2(n+1)}/(1-(\delta r)^2). \tag{24}$$

Учитывая произвольность $\delta > 0$, из (23), (24) получаем (20).

Пусть соотношение (20) выполняется. Рассмотрим замкнутое множество $K \in \Omega$. Используя (12), $\forall n > m_\delta$, где $\delta$ — произвольное положительное число, имеем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'(K)} \leq \alpha_{2,\infty}\delta^n\{n^{1/2} + \delta/(1-\delta)\}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} [\mathcal{E}_n(f)_{E_2'(K)}]^{1/n} = 0,$$

а это означает (см., например, [3]), что функция $f(z)$ целая.

Рассмотрим условие 2. Пусть для $f(z) = E_2'(\Omega)$ выполняется соотношение (21). Очевидно, в этом случае справедливо (20) и в силу условия 1 функция $f(z)$ целая.

Положив, что $f(z)$ имеет $q$-порядок $\mu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mu(q)$, докажем равенство $\lambda(q) = \mu$. Воспользовавшись (18), запишем: $\forall\, \delta > 0\ \exists\, m_\delta \in N$ такое, что при $n > m_\delta$

$$|a_n| \leq \{\ln^{[q-2]} n\}^{-n/(\mu+\delta)}. \tag{25}$$

Обозначая $M_{\delta,r,q} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \exp^{[q-2]}(r^{\mu+\delta})$, где $\exp^{[n]}x = \exp(\exp^{[n-1]}x)$, $\exp^{[0]}x = x$, и выбирая целое $n > \max\{m_\delta; M_{\delta,r,q}\}$, на основании (23), (25) имеем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \leq c_1(r)\{\ln^{[q-2]}(n+1)\}^{-(n+1)/(\mu+\delta)} r^{n+1} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{r^2}{\{\ln^{[q-2]}(n+1)\}^{2/(\mu+\delta)}}\right\}^{-1/2}.$$

При $r \to 1+0$ поведение $c_1(r)$, как следует из (17), существенно зависит от величины $d(\gamma, \gamma_r)$. Пусть, например, $r = 1 + 1/n$, где $n = 1, 2, \ldots$ . Используя оценку $d(\gamma, \gamma_{1+1/n}) \geq c_\gamma n^{-2}$, ($c_\gamma = \mathrm{const}$ зависит только от $\gamma$), справедливую для произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma$ [14], имеем $c_1(1+1/n) \leq \leq n^2 l(\gamma_{1+1/n})/(2\pi c_\gamma)$, $n = 1, 2, \ldots$ . Учитывая это соотношение, произвольность выбора $\delta > 0$ и полагая $r = 1 + 1/n$ в правой части неравенства, из которого вытекает оценка величины $\mathcal{E}_n(f)_{E_2'}$, из (21) имеем $\mu \geq \lambda(q)$.

Покажем справедливость обратного неравенства $\mu \leq \lambda(q)$. Для целой функции $f(z)$ из теоремы А нетрудно получить

$$|a_{n+1}| \leq \mathcal{E}_n(f)_{E_2'(\Omega)}. \tag{26}$$

Воспользовавшись соотношениями (20), (26), а также неравенством (12) при $p_1 = \infty$, $p = 2$, имеем

$$\mu = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln^{[q-1]} n}{-\ln|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln^{[q-1]} n}{-\ln \mathcal{E}_n(f)_{E_2'}} = \lambda(q).$$

Следовательно, $\mu = \lambda(q)$ и достаточность условия 2 доказана.

Доказывая необходимость условия 2, полагаем, что $f(z)$ — целая функция

$q$-типа $\mu$. Справедливость равенства $\mu = \lambda(q)$ доказываем так же, как и в случае достаточности условия 2.

Перейдем к рассмотрению условия 3. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного $q$-порядка и конечного $q$-типа. Согласно проведенным выше рассуждениям ее $q$-порядок $\lambda(q)$ определяется формулой (21). В силу леммы 4 для $q$-типа $\nu$ и $q$-порядка $\lambda(q)$ справедлива формула (19). Покажем, что $\nu = k(q)$. Из (19) имеем: $\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, m_\delta \in N$ такое, что при $n > m_\delta$

$$|a_n| \le \left\{ \frac{\nu + \delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]} n} \right\}^{n/\lambda(q)}. \tag{27}$$

Отсюда, используя (23) и (27), для $n > \max\{ m_\delta;\ \tilde{M}_{\delta,r,q} \overset{\text{df}}{=} \exp^{[q-2]}((\nu + \delta)\, r^{\lambda(q)}/\kappa_q)\}$ можем записать

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \le c_1(r) \left\{ \frac{\nu+\delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]}(n+1)} \right\}^{(n+1)/\lambda(q)} r^{n+1} \times$$
$$\times \left\{ 1 - r^2 \left[ \frac{\nu+\delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]} n} \right]^{2/\lambda(q)} \right\}^{-1/2}.$$

Заменяя в данном неравенстве $r$ на $1 + 1/n$ и учитывая произвольность $\delta > 0$, из (22) имеем $k(q) \le \nu$.

С другой стороны, на основании (22), (26) и неравенства (12) при $p_1 = \infty$ и $p = 2$ получаем обратное неравенство $k(q) \ge \nu$. Следовательно, $k(q) = \nu$.

Докажем достаточность условия 3. Из выполнения соотношения (22) следует справедливость равенства (20), а это означает, что функция $f(z)$ целая. Используя (21), (22), нетрудно видеть, что $q$-порядок $f(z)$ равен $\lambda(q)$. Полагая $q$-тип $f(z)$ равным $\nu$ и учитывая, что $\lambda(q)$ и $\nu$ связаны формулой (19), получаем, как и в случае рассмотрения необходимости условия 3, равенство $\nu = k(q)$. Теорема 1 доказана.

**5.** Используя теорему 1, распространим основные результаты предыдущего пункта на общий случай $p \ge 1$.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f \in E_p'(\Omega)$, $p \ge 1$, область $\Omega$ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Для того чтобы $f(z)$ была соответственно:* 1) *целой;* 2) *целой функцией конечного $q$-порядка $\lambda(q) > 0$;* 3) *целой функцией конечного $q$-порядка $\lambda(q) > 0$ и конечного $q$-типа $k(q) > 0$; необходимо и достаточно, чтобы соответственно выполнялись условия:*

1) $$\lim_{n\to\infty} [\mathcal{E}_n(f)_{E_p'}]^{1/n} = 0; \tag{28}$$

2) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln^{[q-1]} n}{-\ln \mathcal{E}_n(f)_{E_p'}} = \lambda(q); \tag{29}$$

3) $$\limsup_{n\to\infty} \kappa_q [\mathcal{E}_n(f)_{E_p'}]^{\lambda(q)/n} \ln^{[q-2]} n = k(q),\ q \ge 2. \tag{30}$$

***Доказательство.*** Поскольку необходимость условия 1 доказывается аналогично доказательству ее в предыдущей теореме, то перейдем к рассмотрению достаточности. Пусть для $f(z) \in E_2'(\Omega)$ справедлива формула (28), т. е. $\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, m_\delta \in N$ такое, что при $n > m_\delta$ $\mathcal{E}_n(f)_{E_p'} < \delta^n$. Используя в случае $p \in [1, 2)$ последнее неравенство и (12), для натуральных $n > m_\delta$ имеем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \le \alpha_{2,p}\delta^n\{n^{1/p-1/2}+(1-\delta)^{-1}\}.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что $f(z)$ — целая функция. Если $p \ge 2$, то из соотношений (28) и

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \le c\,\mathcal{E}_n(f)_{E_p'}, \tag{31}$$

где $c$ — абсолютная константа, а также теоремы 1 получаем, что функция $f(z)$ целая.

Покажем справедливость условия 2. Положив, что $f(z) \in E_p'(\Omega)$ является целой функцией конечного $q$-порядка $\mu$, докажем равенство $\mu = \lambda(q)$.

Используя теорему A и (17), получаем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_p'} \le \|f-p_n(f)\|_{E_p'} = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z)\right\|_{E_p'} \le c_2(r)\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k, \tag{32}$$

где $c_2(r) \overset{\text{df}}{=} c_1(r)[\operatorname{mes}\Omega]^{1/p}$; $\operatorname{mes}\Omega$ — площадь множества $\Omega$; $r$ — фиксированное число, $r \in (1,\infty)$.

Продолжим неравенства (32), применив к $|a_k|$ при $k > \max\{M_{\delta,r,q}; m_\delta\}$ соотношение (25):

$$\le c_2(r)\sum_{k=n+1}^{\infty}\{\ln^{[q-2]}k\}^{-k/(\mu+\delta)}r^k \le$$

$$\le c_2(r)\{\ln^{[q-2]}(n+1)\}^{-(n+1)/(\mu+\delta)}r^{n+1}\{1-r[\ln^{[q-2]}(n+1)]^{-1/(\mu+\delta)}\}^{-1}.$$

Полагая $r = 1+1/n$ и используя данное неравенство и (29), в силу произвольности $\delta > 0$ имеем $\mu \ge \lambda(q)$.

Покажем справедливость обратного неравенства. Если $p \ge 2$, то соотношение $\lambda(q) \ge \mu$ следует из неравенства (31), формулы (29) и условия 2 теоремы 1. Если $1 \le p < 2$, то оценку $\lambda(q) \ge \mu$ получаем, исходя из леммы 3, теоремы 1 и равенства (29). Следовательно, $\forall\, p \ge 1$ имеем $\mu = \lambda(q)$.

При доказательстве достаточности условия 2 из (29) следует, что для $f(z) \in E_p'(\Omega)$ справедливо предельное равенство (28), т. е. функция $f(z)$ целая. Полагая ее $q$-порядок равным $\mu$, совпадение величин $\mu$ и $\lambda(q)$ показываем так же, как и в случае необходимости условия 2.

Переходя к условию 3, докажем его достаточность. Очевидно, из выполнения для $f(z) \in E_p'(\Omega)$ предельного равенства (30) следует справедливость формулы (28). Это означает, что $f(z)$ — целая функция. Используя (30), определение верхнего предела и уже доказанное условие 2, нетрудно показать, что $q$-порядок $f(z)$ равен $\lambda(q)$. Положив, что $q$-тип $f(z)$ есть конечное число $\nu > 0$, связанное с $\lambda(q)$ соотношением (14), докажем равенство $\nu = k(q)$.

Используя (32) и (27), для натуральных $n > \max\{m_\delta; \tilde{M}_{\delta,r,q}\}$ получаем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_p'} \le c_2(r)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left\{\frac{\nu+\delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]}(n+1)}\right\}^{(k+1)/\lambda(q)} r^k \le$$

$$\le c_2(r)\,r^{n+1}\left\{\frac{\nu+\delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]}(n+1)}\right\}^{(n+1)/\lambda(q)}\left\{1 - r\left[\frac{\nu+\delta}{\kappa_q \ln^{[q-2]}n}\right]^{1/\lambda(q)}\right\}^{-1}.$$

Полагая $r = 1+1/n$ и учитывая произвольность $\delta > 0$, из последнего неравенства и (30) имеем $k(q) \le \nu$. Если $p \ge 2$, то из (31), (30) и условия 3 теоремы 1 следует $k(q) \ge \nu$. Используя при $1 \le p < 2$ лемму 3, где $p_1 = 2$, равенство (30) и условие 3 предыдущей теоремы, получаем $k(q) \geq \nu$. Таким образом, для всех $p \geq 1$ $\nu = k(q)$.

Необходимость условия 3 доказывается на основе ряда рассуждений, справедливых при рассмотрении ее достаточности, а также рассуждений, проведенных для последнего условия теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Заметим, что теорема 2 обобщает полученные ранее частные результаты. Так, результаты теоремы 2 в частных случаях при $q = 2$, $p = \infty$ были получены в [3], а при $q = 2$, $2 \leq p < \infty$ — в [4]. В случае $\Omega = \{z: |z| < 1\}$, $q = 2$, $p = 2$, она доказана в [1]; при $q = 2$, $p \geq 1$ — в [2], а для $q = 3, 4, \ldots$ и $p \geq 1$ — в [5]. Случай с $q \geq 3$ в односвязной области не рассматривался.

**Следствие 1.** *Пусть функция $f(z) \in E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$, где область $\Omega$ удовлетворяет требованиям теоремы* 1. *Тогда условие*

$$\lim_{n \to \infty} \{ \ln^{[q-2]} n \} \mathcal{E}_n^{1/n} (f)_{E'_p} = 0; \; q \geq 2, \tag{33}$$

*является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(z)$ была целой функцией $q$-порядка $\lambda(q) \in (0, 1)$.*

Действительно, пусть $f(z)$ — целая функция $q$-порядка $0 < \lambda(q) < 1$. Из (29) имеем $\forall \, \delta > 0 \;\; \exists n_\delta \in N$ такое, что при $n > n_\delta$

$$\mathcal{E}_n^{1/n} (f)_{E'_p} \leq \{ \ln^{[q-2]} n \}^{-1/(\lambda+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_n^{1/n} (f)_{E'_p} \ln^{[q-2]} n \leq \{ \ln^{[q-2]} n \}^{1 - 1/(\lambda(q)+\delta)}; \; n > n_\delta.$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (33).

Пусть соотношение (33) выполняется. Тогда выполняется равенство (28) и в силу теоремы 2 функция $f(z)$ целая. Из (29), (33) получаем, что ее $q$-порядок $\lambda(q) \in (0, 1)$. Следствие 1 доказано.

**6.** Пусть $\Omega$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой кривой $\gamma$ и $z = \psi_0(w)$ — определенная в п. 2 отображающая функция. Если для функции $f(z)$, аналитической в $\Omega$, при любых $r \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\left\{ \int_{\dot{\gamma}_r} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} \leq M, \; p > 0,$$

где $M$ — произвольная постоянная, то говорят (см., например, [3, 15]), что $f(z)$ принадлежит пространству $E_p(\Omega)$ в области $\Omega$. Очевидно, при $p \geq 1$ пространство $E_p(\Omega)$ — банахово.

**Теорема 3.** *Пусть $\Omega$ — конечная односвязная область комплексной плоскости со спрямляемой границей $\gamma$ и функция $f(z) \in E_p(\Omega)$, $p \geq 1$. Для того чтобы $f(z)$ была соответственно:* 1) *целой;* 2) *целой конечного $q$-порядка $\lambda(q) > 0$;* 3) *целой конечного $q$-порядка $\lambda(q) > 0$ и конечного $q$-типа $k(q) > 0$; необходимо и достаточно выполнения соответствующих условий:*

1) $$\lim_{n \to \infty} [\mathcal{E}_n(f)_{E_p}]^{1/n} = 0; \tag{34}$$

2) $$\limsup_{n \to \infty} \frac{n \ln^{[q-1]} n}{-\ln \mathcal{E}_n(f)_{E_p}} = \lambda(q); \tag{35}$$

3) $$\limsup_{n \to \infty} \kappa_q [\mathcal{E}_n(f)_{E_p}]^{\lambda(q)/n} \ln^{[q-2]} n = k(q), \quad q \geq 2; \tag{36}$$

*где*

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_p} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\{\|f-p_n\|_{E_p}:\, p_n \in \mathcal{P}_n\}, \quad \|f\|_{E_p} = \left\{\int\limits_\gamma |f(z)|^p\,|dz|\right\}^{1/p}$$

***Доказательство.*** Покажем вначале достаточность условий 1 – 3. Пусть выполняется соотношение (34). Зафиксировав в $\Omega$ произвольную область $K \subset \Omega$ с границей $\partial K \in \Gamma$, для $f(z) \in E_p(\Omega)$ получим

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_p(K)} \le [\operatorname{mes} K]^{1/p}\, \mathcal{E}_n(f)_{E_p(\Omega)}. \tag{37}$$

Из (34) и (28) следует, что функция $f(z)$ целая.

Пусть для $f(z) \in E_p(\Omega)$ выполнено равенство (35). Отсюда вытекает справедливость формулы (34), а это в силу достаточности условия 1 означает, что $f(z)$ — целая функция. Полагая ее $q$-порядок равным $\mu$, из (29), (35) и (37) имеем $\mu \le \lambda(q)$. Обратное неравенство $\mu \ge \lambda(q)$ получаем так же, как и в теореме 2. Следовательно, $\mu = \lambda(q)$.

Полагаем, что для $f(z) \in E_p(\Omega)$ выполняется равенство (36). Отсюда следует справедливость (34), т. е. функция $f(z)$ целая. Из (36) и достаточности условия 2 получаем, что $f(z)$ имеет $q$-порядок $\lambda(q)$. Считая $q$-тип функции $f(z)$ равным $\nu$ и используя его связь с $q$-порядком $\lambda(q)$ по формуле (19), из (30), (36), (37) выводим неравенство $\nu \le k(q)$. Обратное неравенство $\nu \ge k(q)$ получаем на основании ряда соображений, имевших место в теореме 2. Следовательно, $\nu = k(q)$.

Необходимость условий 1, 3 доказывается с помощью рассуждений, которые в общих чертах аналогичны проведенным в теореме 2. Теорема 3 доказана.

***Следствие 2.*** *Пусть функция $f(z) \in E_p(\Omega)$, $p \ge 1$, где область $\Omega$ удовлетворяет требованиям теоремы 2. Тогда условие*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n^{1/n}(f)_{E_p} \ln^{[q-2]} n = 0$$

*является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(z)$ была целой $q$-порядка $\lambda(q) \in (0, 1)$.*

В заключение отметим, что в случае $\Omega = \{z:\, |z| < 1\}$, $q \ge 2$, $p \ge 1$ теорема 3 получена в [5].


1. *Reddy A. R.* A constribution to best approximation in the $L^2$ norm // J. Approxim. Theory. – 1974. – **11**, №1. – P. 110–117.
2. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 2. – С. 280– 283.
3. *Батырев А. В.* К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 2. – С. 173– 175.
4. *Giroux A.* Approximation of entire functions over bounded domains // J. Approxim. Theory. – 1980. – **28**, №1. – P. 45–53.
5. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в некоторых банаховых пространствах аналитических функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 1. – С. 8– 10.
6. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**, № 3. – С. 423– 444.
7. *Werschawski S. E.* Über des Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // Math. Z. – 1932. – **35**. – P. 321–456.
8. *Мамедханов Дж. И.* Неравенства типа С. М. Никольского для многочленов комплексного переменного на кривых // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 1. – С. 37– 39.
9. *Альпер С. Я.* О приближении аналитических функций в среднем по области // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 2. – С. 265– 268.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
11. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53– 84.
12. *Sato D.* On the rate of growth of entire functions of fast growth // Bull. Amer. Math. Soc. – 1963. – **69**, № 3. – P. 411–414.
13. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964. – 438 с.
14. *Мергелян С. Н.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **37**. – С. 3– 90.
15. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.


Получено 06.07.92