УДК 517.92

Е. В. Воскресенский, д-р физ.-мат. наук (Морд. ун-т, Саранск)

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА СРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

New estimates of solutions of nonlinear systems are obtained.

Одержані нові оцінки розв'язків нелінійних систем.

Введение. Толчком для написания настоящей статьи послужила работа [1], в которой для некоторых частных видов обыкновенных дифференциальных уравнений указаны оценки для отдельных их решений. Оказывается, подобные оценки можно вывести, используя принцип сравнения Важевского [2], с помощью которого в этом случае можно получить дополнительные результаты (например, существование периодических решений).

Существенной частью доказательства основных результатов данной статьи является получение оценок методом сравнения для матрицы Коши соответствующего уравнения в вариациях (ср. [3]).

Результаты основных теорем применены для установления свойства конвергенции и устойчивости решений возмущенных уравнений.

1. Оценки для решений возмущенных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x) + f(t, x), \tag{1}$$

где $\varphi = C^{(p,q)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $p \geq 0$, $q \geq 1$, $f \in C^{(p_0, q_0)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $p_0 \geq 0$, $q_0 \geq 0$. Тогда матрица Коши $Y(t, s)$ уравнения в вариациях вдоль решения $y(t: s, y(s))$ уравнения первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t, y) \tag{2}$$

имеет вид

$$Y(t, s) = \frac{\partial y(t: s, y(s))}{\partial \gamma}, \quad t \geq s \geq T, \quad \gamma = y(s).$$

Предположим $\| f(t, x) \| \leq F(t, \|x\|)$, где $F \in C([T, +\infty) \times R_+^1, R_+^1)$, $R_+^1 = [0, +\infty)$, и $F(t, u_1) \leq F(t, u_2)$ при $u_1 \leq u_2$ для каждого $t \geq T$.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = K \exp\left(-\int\limits_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right) F\left(t, z \exp\left(\int\limits_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right)\right), \quad t \geq T, \tag{3}$$

где K — положительная постоянная, $\psi \in C([T, +\infty) \times R_+^1)$.

Теорема 1. *Если*

$$\| Y(t, s) \| \leq K \exp\left(\int\limits_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right), \quad t \geq s \geq T, \tag{4}$$

то решения уравнения (1) $x(t) = x(t:\ s, x(s))$ *и уравнения* (3) $z(t) = z(t:\ s, z(s))$ *на общем интервале существования связаны неравенством*

$$\| x(t:\ s, x(s)) \| \le \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) z(t:\ s, z(s)),$$

если

$$K \| x(s) \| \le \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) z(s).$$

Доказательство. Применяя формулу Алексеева [2], получаем

$$x(t:\ s, x(s)) = y(t:\ s, x(s)) + \int_s^t \frac{\partial y(t:\tau, x(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

$$s \le t < s + \delta, \quad \delta > 0.$$

Так как

$$y(t:\ s, x(s)) = \int_0^1 \frac{\partial y(t:s, \tau x(s))}{\partial \gamma}\, d\tau\, x(s), \quad s \le t < s + \delta,$$

из неравенства (4) имеем

$$\| y(t:\ s, x(s)) \| \le K \| x(s) \| \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\, d\tau \right), \quad s \le t < s + \delta. \tag{5}$$

Тогда из неравенств (4) и (5) следует неравенство

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(t) \| \le K \| x(s) \| \exp\left(-\int_0^s \psi(\tau)\, d\tau \right) +$$

$$+ K \int_s^t \exp\left(-\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1 \right) F\left(\tau, \exp\left(-\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \| x(\tau) \| \exp\left(\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1 \right) \right) d\tau, \quad s \le t < s + \delta, \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Применяя принцип сравнения [4, с. 261] к неравенству (6), получаем

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(t) \| \le z(t), \quad s \le t < s + \delta,$$

если

$$K \| x(s) \| \exp\left(-\int_0^s \psi(\tau)\, d\tau \right) \le z(s).$$

Отсюда следует доказательство теоремы 1.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x),$$

где $P \in C([T, +\infty) \times S_R, R^n)$, $S_R = \{x:\ \|x\| < R,\ x \in R^n\}$. Пусть решения этого уравнения $x(t:\, t_0, x_0)$, $t_0 \geq T$, $x_0 \in S_{R_0}$, $R_0 < R$, определены при всех $t \geq t_0$ и $\psi_0 \in C([T, +\infty), (0, +\infty))$.

Определение. *Будем говорить, что решение* $x(t:\, t_0, x_0)$ ψ_0*-устойчиво, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ *такое, что если* $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$, *то выполняется неравенство*

$$\psi_0(t)\,\|x(t:\, t_0, x_0) - x(t:\, t_0, \bar{x}_0)\| < \varepsilon$$

при всех $t \geq t_0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\varphi(t, 0) = f(t, 0) = F(t, 0) \equiv 0$. *Тогда если решение* $z = 0$ *уравнения* (3) ψ_0*-устойчиво,* $\psi_0 = \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right)$, *то решение уравнения* (1) $x = 0$ *устойчиво.*

Доказательство. Так как неравенство

$$\|(t:\, t_0, x(t_0))\| \leq \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right) z(t:\, t_0, z(t_0)),$$

$$\|x(t_0)\| \leq \frac{1}{K}\exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right) z(t_0),$$

выполняется для всех $t \geq t_0$, из условия ψ_0-устойчивости нулевого решения уравнения (3) вытекает доказательство теоремы 2.

***Замечание* 1.** При условиях теоремы 2 решение $z = 0$ уравнения (3) может быть не устойчивым.

Если правые части уравнений (1) и (2) — ω-периодические вектор-функции, то теорема 1 может быть использована для доказательства существования ω-периодических решений уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $T = -\infty$, $q_0 \geq 1$, $\varphi(t+\omega, x) \equiv \varphi(t, x)$, $f(t+\omega, x) \equiv f(t, x)$,

$$\exp\left(\int_0^\omega \psi(\tau)\,d\tau\right) z(\omega:\, 0, z(0)) \leq R_0, \quad z(0) \geq KR_0, \quad z(0) \geq K\|x(0)\|.$$

При этих условиях уравнение (1) *на множестве* $\bar{S}_{R_0} = \{x:\, \|x\| \leq R_0, x \in R^n\}$ *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

Доказательство. Так как $L:\, \bar{S}_{R_0} \to \bar{S}_{R_0}$, где $Lx_0 = x(\omega:\, 0, x(0))$, $\|x(0)\| \leq R_0$, и решения уравнения (1) непрерывно зависят от начальных условий, оператор L в $\bar{S}_{R_0}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку [2], которой соответствует ω-периодическое решение.

Пример. Рассмотрим уравнение [3] $z'' + f(z')z' + z = \varphi(t)$, где $\varphi \in C(R_+^1, R_+^1)$, $f \in C^{(1)}(R^1, R^1)$ и $f(K)K$ — неубывающая функция. Запишем для этого пример уравнения (1) и (2) в виде систем

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - f(x_2)x_2 + \varphi(t)$$

и

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_2 - f(y_2)\,y_2.$$

Пусть $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2)$, $y = \operatorname{colon}(y_1, y_2)$, $x(t:\ s, x(s))$, $y(t:\ s, y(s))$ — решения соответствующих систем. В работе [3] доказано, что

$$\left\| \frac{\partial y(t:s,\,y(s))}{\partial y} \right\| \le \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \right), \quad t \ge s, \quad \int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \le 0.$$

Тогда выполняются все условия теоремы 1 и

$$\| x(t:\ s, x(s)) \| \le \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \right) z(t:\ s, z(s)), \quad t \ge s \ge T,$$

$$\| x(s) \| \le \exp\left(\int_0^s \psi(\tau)\,d\tau \right) z(s).$$

Тогда уравнение (3) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \right) |\varphi(t)|, \quad t \ge T.$$

Поэтому при

$$\| x(s) \| = \exp\left(\int_0^s \psi(\tau)\,d\tau \right) z(s)$$

имеем

$$\| x(t:\ s, x(s)) \| \le \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \right) \| x(s) \| +$$

$$+ \int_s^t \exp\left(\int_\tau^t \psi(\tau_1)\,d\tau_1 \right) |\varphi(\tau)|\,d\tau, \quad t \ge s \ge T.$$

Критерий существования оценки (4) дан в работе [3].

2. Оценки для фундаментальной матрицы уравнения в вариациях. Вновь рассмотрим уравнения (1) и (2). Пусть

$$\left\| \frac{\partial y(t:\tau,\,x(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x(\tau)) - \frac{\partial y\big(t:\tau,\,x_0(\tau)\big)}{\partial \gamma} f\big(\tau, x_0(\tau)\big) \right\| \le$$

$$\le K \exp\left(\int_\tau^t \psi(\tau_1)\,d\tau_1 \right) \lambda(\tau, \| x(\tau) - x_0(\tau) \|), \quad T \le \tau \le t < t + \delta, \tag{7}$$

$\lambda \in C([T, +\infty) \times R^1_+,\ R^1_+)$, $\lambda(\tau, u_1) \le \lambda(\tau, u_2)$ при $u_1 \le u_2$ для всех $\tau \ge T$.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = K \exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \right) \lambda\left(t, z \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \right) \right), \quad t \ge T, \tag{8}$$

где постоянная K и функции ψ определены выше. Предположим, что для фундаментальной матрицы $Y(t, s)$, $t \ge s$, справедлива оценка (4).

Теорема 4. *Пусть* $x(t) = x(t: s, x(s))$, $x_0(t) = x(t: s, x_0(s))$, $s \le t < s + \delta$ — *общий интервал существования этих решений. Тогда*

$$\| x(t: s, x(s)) - x(t: s, x_0(s)) \| \le \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) z(t), \tag{9}$$

если

$$K \exp\left(-\int_0^s \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(s) - x_0(s) \| \le z(s), \quad s \le t < s + \delta_1, \quad \delta_2 \le \delta.$$

Доказательство. Так как

$$x(t) = y(t: s, x(s)) + \int_s^t \frac{\partial y(t: \tau, x(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad s \le t < s + \delta_1,$$

$$x_0(t) = y(t: s, x_0(s)) + \int_s^t \frac{\partial y(t: \tau, x_0(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau, \quad s \le t < s + \delta_1,$$

то

$$x(t) - x_0(t) = y(t: s, x(s)) - y(t: s, x_0(s)) +$$

$$+ \left[\int_s^t \frac{\partial y(t: \tau, x(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x(\tau)) - \frac{\partial y(t: \tau, x_0(\tau))}{\partial \gamma} f(\tau, x_0(\tau)) \right] d\tau.$$

Тогда с учетом условия (7) получаем

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(t) - x_0(t) \| \le K \exp\left(-\int_0^s \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(s) - x_0(s) \| +$$

$$+ K \int_s^t \exp\left(-\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1\, \lambda\left(\tau, \exp\left(-\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1 \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \| x(t) - x_0(t) \| \exp\left(\int_0^\tau \psi(\tau_1)\, d\tau_1 \right) \right) \right) d\tau, \quad s \le t < s + \delta_1.$$

Применяя принцип сравнения к уравнению (8), получаем неравенство (9). Теорема 4 доказана.

Следствие. Пусть $q, q_0 \ge 2$. Тогда

$$\| x(t: s, x(s)) - x(t: s, x_0(s)) \| \le \left\| \frac{\partial x(t: s, c)}{\partial \gamma} \right\| \| x(s) - x_0(s) \|,$$

где $c = x(s) + \theta(x(s) - x_0(s))$, $s \le t < s + \delta$, $0 \le \theta \le 1$. Будем считать, что

$$K \exp\left(-\int_0^s \psi(\tau)\, d\tau \right) \| x(s) - x_0(s) \| = z(s),$$

$$z(t: s, z(s)) \le M(t) \| z(s) \|,$$

$$s \le t < s + \delta_1, \quad 0 < \delta_1 \le \delta, \quad M \in C([T, +\infty), R_+^1).$$

Поэтому, учитывая

$$\left\| \frac{\partial x(t:s,c)}{\partial\gamma} - (x(s)-x_0(s)) \right\| \le \left\| \frac{\partial x(t:s,c)}{\partial\gamma} \right\| \| x(s)-x_0(s) \|$$

и оценку

$$\| x(t:\ s, x(s)) - x(t:\ s, x_0(s)) \| \le K \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \right) M(t) \| x(s)-x_0(s) \|,$$

$$s \le t \le s+\delta_1,$$

имеем

$$\left\| \frac{\partial x(t:s,c)}{\partial\gamma} \right\| \le K \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \right) M(t), \quad s \le t < s+\delta_1. \tag{10}$$

Так как $q, q_0 \ge 2$, при $x_0(s) \to x(s)$ переменная c стремится к $x(s)$. Тогда

$$\frac{\partial x(t:s,c)}{\partial\gamma} \to \frac{\partial x(t:s,x(s))}{\partial\gamma}.$$

Поэтому из неравенства (10) получаем

$$\left\| \frac{\partial x(t:s,x(s))}{\partial\gamma} \right\| \le K \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau \right) M(t), \quad s \le t < s+\delta_1. \tag{11}$$

Оценку (11) можно применить в качестве оценки (4) для другого возмущенного уравнения. Первоночально, например, оценка (4) может быть быстро получена. В частности, если $\varphi(t,x) \equiv 0$, то $Y(t,s) = E$. Тогда, применяя теорему 4, можно получить новую оценку типа (4) уже для нового возмущенного уравнения.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются условия теорем* 3 *и* 4. *Тогда если уравнение* (3) *имеет* ψ_0*-устойчивое решение* $z = 0$ *и для всех решений* $z(t) = z(t:\ s, z(s))$, $\psi_0(t)z(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *то уравнение* (1) *имеет конвергенцию* [5].

Доказательство. Существование ω-периодического решения вытекает из теоремы 3. Из условий теоремы 5 следует единственность этого ω-периодического решения. Так как $\psi_0(t)z(t) \to 0$ при любом решении $z(t)$ и решение $z = 0$ ψ_0-устойчиво, то единственное ω-периодическое решение асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, уравнение (1) имеет конвергенцию [5].

Замечание 2. Если уравнение (1) автономно, то оно при условиях теоремы 5 имеет единственный устойчивый предельный цикл.

1. *Taniguchi T.* On the estimate of solutions of perturbed linear differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **153**, №1. – P. 288 – 300.
2. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 224 с.
3. *Воскресенский Е. В.* Функции Ляпунова и асимптотика решений возмущенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1991. – №5. – С. 3 – 9.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 427 с.

Получено 26.02.92