УДК 512.83

А. Г. Мазко

Оценка расположения спектра матрицы относительно плоских кривых

Решение ряда задач теории устойчивости, стабилизации движения с заданным качеством и др. [1, 2] требует изучения спектральных свойств матриц (операторов). В [3, 4] разработан общий метод оценки количества собственных значений матрицы, принадлежащих заданным областям. В данной статье этот метод распространяется на более широкий класс областей и некоторых множеств в комплексной плоскости C^1.

Пусть $A \in C^{n\times n}$— матрица, имеющая спектр $\sigma(A)=\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $f(\overline{\lambda}, \mu)$— комплексная функция, для которой $f(\overline{\lambda}, \mu) \equiv \overline{f}(\overline{\mu}, \lambda)$, $\lambda, \mu \in C^1$, и определены множества $\Lambda_f^- = \{\lambda : f(\overline{\lambda}, \lambda) < 0\}$, $\Lambda_f^0 = \{\lambda : f(\overline{\lambda}, \lambda) = 0\}$, $\Lambda_f^+ = \{\lambda : f(\overline{\lambda}, \lambda) > 0\}$, $\Lambda_f^- \neq \varnothing$, $\Lambda_f^0 \neq \varnothing$, $\Lambda_f^+ \neq \varnothing$, $\Lambda_f^- \cup \Lambda_f^0 \cup \Lambda_f^+ = C^1$. Требуется дать оценку числам $\nu_f^-(A)$, $\nu_f^0(A)$ и $\nu_f^+(A)$, которые равны соответствующему количеству собственных значений λ_i (с учетом кратности), находящихся в Λ_f^-, Λ_f^0 и Λ_f^+.

Классическое решение этой задачи в простейшем случае $f(\overline{\lambda}, \mu) = \overline{\lambda} + \mu$ ($\Lambda_f^\pm$ — полуплоскости) было получено с помощью матричного уравнения Ляпунова $A^*X + XA = Y$. Здесь и в дальнейшем $Y = Y^* > 0$ — любая эрмитова положительно определенная $n \times n$ — матрица, $X = X^*$ — неизвестная эрмитова матрица.

Пусть функция $f(\overline{\lambda}, \mu)$ однозначно определена в окрестности множества $\sigma(A^*) \times \sigma(A)$ и аналитична по $\overline{\lambda}$ (μ) в окрестности точек $\sigma(A^*)$ ($\sigma(A)$) при фиксированном $\mu \in \sigma(A)$ ($\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$). Тогда аналогом уравнения Ляпунова служит соотношение

$$L_f(X) = Y, \tag{1}$$

где $L_f(X) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\sigma^*} \oint\limits_{\sigma} f(\overline{\lambda}, \mu) (\lambda I - A)^{-1*} X (\mu I - A)^{-1} d\overline{\lambda} d\mu$, σ^* и σ — некоторые контуры, охватывающие $\sigma(A^*)$ и $\sigma(A)$ соответственно [1].

Приведем утверждения, дающие оценку чисел $\nu_f^\pm(A)$ ($\nu_f^-(A) = \nu_{(-f)}^+(A)$) для некоторых классов функций f [3—5].

Теорема 1. *Если при всех* $\lambda, \mu \in \Lambda_f^+$ *и* $\mu_i \in \Lambda_f^+$, $i = 1, \dots, n$, *выполнены условия*

$$f(\overline{\lambda}, \mu) \neq 0, \quad F \stackrel{\Delta}{=} \| 1/f(\overline{\mu}_i, \mu_j) \|_{i,j=1}^n \geqslant 0, \tag{2}$$

то $\nu_f^+(A) = n$ *в том и только в том случае, когда существует единственное решение* $X = X^* > 0$ *уравнения* (1).

Условиям (2) удовлетворяет класс функций

$$f(\overline{\lambda}, \mu) = \sum_{s,k=0}^{N} \gamma_{sk} \overline{f_s(\lambda)} f_k(\mu) \equiv z_\lambda^* \Gamma z_\mu, \tag{3}$$

где $z_\lambda^* = [\overline{f_0(\lambda)}, \dots, \overline{f_N(\lambda)}]$, $f_k(\lambda)$ — некоторые функции, определенные на $\sigma(A)$, $k = 0, \dots, N$, $\Gamma = \| \gamma_{sk} \|_{s,k=0}^N$ — эрмитова матрица такая, что если $z^*\Gamma z > 0$, $z \in C^{N+1}$, то

$$\Gamma - (z^*\Gamma z)^{-1} \Gamma z z^* \Gamma \leqslant 0. \tag{4}$$

В условии (4) можно положить, например, $z = z_\lambda$ при $\lambda \in \Lambda_f^+$ [5]. Если $\Lambda_f^\pm$ — открытые области, ограниченные алгебраической кривой Λ_f^0, то функция f представима в виде (3) при $f_k(\lambda) = \lambda^k$, $k = 0, \dots, N$.

Неравенство (4) эквивалентно тому, что матрица Γ имеет лишь одно положительное собственное значение. Можно доказать более общее утверждение.

Если матрица $Z \in C^{(N+1)\times p}$ такая, что $Z^*\Gamma Z > 0$, то неравенство $\Gamma - \Gamma Z (Z^*\Gamma Z)^{-1} Z^*\Gamma \leqslant 0$ выполнено в том и только в том случае, когда матрица Γ имеет ровно p положительных собственных значений.

Возвращаясь к классу функций (3), отметим, что условие (4) обеспечивает им каноническое представление

$$f(\bar{\lambda}, \mu) = \overline{\varphi_0(\lambda)}\,\varphi_0(\mu) - \sum_{k=1}^{N} \overline{\varphi_k(\lambda)}\,\varphi_k(\mu), \tag{5}$$

где $\varphi_k(\lambda)$ — линейные комбинации функций $f_s(\lambda)$, $s = 0, \ldots, N$. Уравнение (1) приобретает вид

$$\varphi_0(A)^* X \varphi_0(A) - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(A)^* X \varphi_k(A) = Y. \tag{6}$$

Согласно теореме 1, $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$, если существует единственное решение $X = X^* > 0$ уравнения (6). Обратно, при $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ решение $X = X^* > 0$ представляется в виде сходящегося ряда [4] $X = \sum_{s=0}^{\infty} Y_s$, где $\varphi_0(A)^* Y_0 \varphi_0(A) = Y$, $\varphi_0(A)^* Y_s \varphi_0(A) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(A)^* Y_{s-1} \varphi_k(A)$, $s = 1, 2, \ldots$.

При дополнительных ограничениях имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция f представима в виде* (5) *при $N = 1$, $X = X^*$ — единственное решение уравнения* (6). *Тогда количество собственных значений матрицы A, принадлежащих Λ_f^+ и Λ_f^- соответственно, совпадает с количеством положительных и отрицательных квадратов эрмитовой формы $\theta^* X \theta$, $\theta \in C^n$.*

Рассмотрим в плоскости C^1 два множества Λ_u^+ и Λ_v^+, заданных аналогично Λ_f^+ с помощью соответствующих функций $u(\bar{\lambda}, \lambda)$ и $v(\bar{\lambda}, \lambda)$. Предположим, нас интересует расположение спектра $\sigma(A)$ относительно их непустого пересечения, которое может быть описано в виде $\Lambda_w^+ \triangleq \Lambda_u^+ \cap \Lambda_v^+ = \{\lambda : w(\bar{\lambda}, \lambda) > 0\}$, где $w(\bar{\lambda}, \lambda) = R(u(\bar{\lambda}, \lambda), v(\bar{\lambda}, \lambda))$, $R(\xi, \eta) = \xi + \eta - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ [6]. Потребуем, чтобы выражение $\psi(\lambda) = U(x, y) + iV(x, y)$, где $U(x, y) = u(x - iy, x + iy)$, $V(x, y) = v(x - iy, x + iy)$, представляло некоторую аналитическую функцию переменного $\lambda = x + iy \in \Lambda_w^+$, т. е. U и V — вещественные функции, удовлетворяющие условиям дифференцируемости Коши — Римана. В этом случае определена функция от матрицы $\psi(A)$.

Теорема 3. *Равенство $\nu_w^+(A) = n$ выполнено в том и только том случае, когда существует единственное решение $X = X^* > 0$ уравнения*

$$(1 + i)\,\psi(A)^* X + (1 - i)\,X\psi(A) - 2\sqrt{\psi(A)}^* X \sqrt{\psi(A)} = Y. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $u = \operatorname{Re}\psi = (\psi + \bar{\psi})/2$, $v = \operatorname{Im}\psi = (\psi - \bar{\psi})/2i$, то $w(\bar{\lambda}, \lambda) = z_\lambda^* \Gamma z_\lambda / 2$, где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 - i \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 + i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad z_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\psi(\lambda)} \\ \psi(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Матрица Γ имеет лишь одно положительное собственное значение, поэтому выполнены условия (2)—(4) в теореме 1. В силу интегрального представления аналитической функции от матрицы [7] $\psi(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\sigma \psi(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$, уравнение (1) при $f = 2w$ имеет вид (7). Теорема доказана.

Теоремы 1—3 могут быть использованы для определения чисел $\nu_f^{\pm}(A)$ при условиях существования единственного решения X соответствующего уравнения (1), (6) или (7), в частности при $\nu_f^0(A) = 0$.

Перейдем к рассмотрению случая $\nu_f^0(A) \neq 0$, т. е. $\sigma(A) \cap \Lambda_f^0 \neq \varnothing$, при условии, что матрица A имеет простую структуру.

Теорема 4. *Оценка $\nu_f^0(A) \geqslant r > 0$ верна в том и только в том случае, когда однородное уравнение*

$$L_f(X) = 0 \tag{8}$$

имеет неотрицательно определенное решение $X = X^* \geqslant 0$, причем $\operatorname{rang} X \geqslant r$.

Доказательство. Пусть $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ и $P = [p_1, \ldots, p_n]$ — матрицы, столбцы которых образуют квазибиортогональные системы левых и правых собственных векторов матрицы A $(Q^*P = I)$. Тогда, применяя формулу интегрирования Коши и представление резольвенты [8] $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j)^{-1} p_j q_j^*$, находим $P^* L_f(X) P = \| f(\bar{\lambda}_i, \lambda_j) \|_{i,j=1}^{n} \odot P^*XP$, где $\odot$ — операция произведения Шура ($A \odot B = \|a_{ij} b_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$). Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X = Q(\| \delta(f(\bar{\lambda}_i, \lambda_j))\|_{i,j=1}^{n} \odot C) Q^*, \tag{9}$$

где $\delta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ 0, & \lambda \neq 0 \end{cases}$, C — произвольная эрмитова $n \times n$-матрица.

Известно, что любая неотрицательно определенная матрица ранга r имеет по крайней мере r положительных диагональных элементов [9]. Поэтому если $X = X^* \geqslant 0$, $\operatorname{rang} X \geqslant r$, то, согласно (9), $\nu_f^0(A) \geqslant r$. Обратно, если $f(\bar{\lambda}_i, \lambda_i) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, то уравнению (8) удовлетворяет матрица

$$X = Q \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0) Q^* \geqslant 0, \qquad \operatorname{rang} X = r. \tag{10}$$

Теорема доказана.

Исходя из формулы (9), можно доказать следующие предложения.

Следствие 1. *Существует вектор $l \neq 0$, $l \in C^n$ такой, что $L_f(ll^*) = 0$ в том и только том случае, когда $\sigma(A) \cap \Lambda_f^0 \neq \varnothing$. При ограничении*

$$f(\bar{\lambda}, \mu) \neq 0 \; (\lambda, \mu \in \Lambda_f^0, \; \lambda \neq \mu) \tag{11}$$

этот вектор принадлежит линейной оболочке левых собственных векторов матрицы A, отвечающих некоторому собственному значению λ_i.

Следствие 2. *Существует матрица $X = X^* > 0$ такая, что $L_f(X) = 0$ в том и только том случае, когда $\sigma(A) \subset \Lambda_f^0$. При ограничении* (11) *эта матрица представляется в виде*

$$X = Q \operatorname{diag}(C_1, \ldots, C_m) Q^*, \tag{12}$$

где $C_k = C_k^* > 0$ — блоки размера $n_k \times n_k$, отвечающие различным собственным значениям λ_k, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$. В частности, если матрица A не имеет кратных собственных значений, то решение (12) *имеет вид* (10) *при $r = n$.*

Замечание 1. Если A — дефектная матрица, то, приведя ее к жордановой форме, можно убедиться в справедливости утверждения достаточности теоремы 4. Таким образом, неравенство $\nu_f^0(A) \geqslant \operatorname{rang} X$ выполнено для любой матрицы A, если $X = X^* \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению (8).

Изложенный способ оценки числа $\nu_f^0(A)$ основан на решении однородного уравнения (8). В некоторых случаях равенство $\nu_f^0(A) = n$ может быть установлено с помощью теорем 1—3.

Определим некоторую окрестность множества Λ_f^0 вида $\Lambda_{f_\tau}^+ = \{\lambda : f_\tau(\overline{\lambda}, \lambda) > 0\}$, где $f_\tau(\overline{\lambda}, \mu) = 1 - \tau^2 f^2(\overline{\lambda}, \mu)$, $\tau \geqslant \tau_0 > 0$. Если функция f_τ удовлетворяет условиям (2), то согласно теореме 1 $\sigma(A) \subset \Lambda_{f_\tau}^+$ в том и только том случае, когда уравнение

$$X - \tau^2 L_{f^2}(X) = Y \tag{13}$$

имеет единственное положительно определенное решение $X = X_\tau > 0$.

Это утверждение при достаточно большом значении параметра τ может быть использовано для оценки расположения собственных значений матрицы A вблизи заданной кривой Λ_f^0 с некоторой желаемой точностью.

Замечание 2. Матрица-решение X_τ представима в виде $X_\tau = Q(\| 1/f_\tau(\overline{\lambda}_i, \lambda_j) \|_{i,j=1}^n \odot P^*YP) Q^*$. Поэтому если все собственные значения матрицы A находятся на кривой Λ_f^0, то при $\tau \to \infty$ имеем положительно определенное предельное значение данного решения [4] $X_\infty = Q(\| \delta(f(\overline{\lambda}_i, \lambda_j)) \|_{i,j=1}^n \odot P^*YP) Q^*$. Обратное утверждение следует из теоремы 4, поскольку матрица X_∞ совпадает с частным решением вида (9) уравнения (8).

Проиллюстрируем изложенный подход на примерах, представляющих практический интерес.

1. Апериодичность линейных систем. Решения системы $\dot{x} = Ax$ апериодичны, если спектр матрицы A вещественный. Согласно теореме 4, достаточным условием апериодичности является симметризуемость матрицы A [9], т. е. существование матрицы $X = X^* > 0$ такой, что $L_f(X) = 0$, $f(\overline{\lambda}, \mu) = i(\overline{\lambda} - \mu)$. В случае простой вещественной матрицы $A \in R^{2\times 2}$ это условие означает $\alpha \overset{\Delta}{=} 4a_{12}a_{21} + (a_{11} - a_{22})^2 > 0$. Если матрица A дефектна ($\alpha = 0$, $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$), то она не может быть симметризуемой в указанном смысле. В общем случае свойство апериодичности можно установить, используя приведенные результаты.

Решение уравнения (13), имеющего вид $X + \tau^2(A^{*2}X + XA^2 - 2A^*XA) = Y$, находим в виде

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + \tau^{-2}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \alpha + \tau^{-2} - 2a_{12}a_{21}, & 2a_{21}(a_{22} - a_{11}), & 2a_{21}^2 \\ a_{12}(a_{22} - a_{11}), & \alpha + \tau^{-2} - (a_{11} - a_{22})^2, & a_{21}(a_{11} - a_{22}) \\ 2a_{12}^2, & 2a_{12}(a_{11} - a_{22}), & \alpha + \tau^{-2} - 2a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix}.$$

Если $X_\tau = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} > 0$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_{f_\tau}^+$. В частности, при $Y = I$ имеем

$$X_\tau \to X_\infty = I + \frac{a_{21} - a_{12}}{\alpha} \begin{bmatrix} 2a_{21}, & a_{11} - a_{22} \\ a_{11} - a_{22}, & -2a_{12} \end{bmatrix}, \quad \tau \to \infty,$$

причем неравенство $X_\infty > 0$ сводится к одному из условий $\alpha > 0$ или $\alpha = 0$; $a_{12}^2 + a_{21}^2 = 0$.

2. Устойчивость некоторых гамильтоновых систем. Пусть A — матрица монодромии линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами, λ_i — ее мультипликаторы. Для устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы матрица A имела простую структуру и все ее мультипликаторы были расположены на единичной окружности Λ_f^0, $f(\overline{\lambda}, \mu) = 1 - \overline{\lambda}\mu$ [10].

Уравнение (13) имеет вид $X - \tau^2(X - 2A^*XA + A^{*2}XA^2) = Y$.

Соответствующая функция $f_\tau(\overline{\lambda}, \mu)$ удовлетворяет условиям (2)—(4) при всех $\tau \neq 0$. Следовательно, если τ — достаточно большое число, то неравенство $X = X_\tau > 0$ обеспечивает размещение всех мультипликаторов системы вблизи единичной окружности. Для устойчивости рассматриваемой гамильтоновой системы необходимо, чтобы предельное выражение для матрицы-решения X_∞ было также положительно определенным.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
2. *Jury E. I., Gutman S.* A General Theory for Matrix Root-Clustering in Subregions of the Complex Plane.— IEEE Trans. Automat. Control, 1981, **26**, N 4, p. 853—863.
3. *Мазко А. Г.* Оценка расположения спектра матрицы относительно широкого класса алгебраических и трансцендентных кривых.— В кн.: Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 103—109.
4. *Мазко А. Г.* Теория распределения спектра матрицы относительно алгебраических и трансцендентных кривых.— Киев, 1983.— 40 с. — (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 83.5).
5. *Мазко А. Г.* Критерий принадлежности спектра матрицы произвольной области из некоторого класса.— Автоматика, 1980, № 6, с. 54—59.
6. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике.— Киев : Наук. думка, 1974.— 260 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 20.05.83