УДК 517.948.35

Г. С. Жукова

Ветвление собственных значений фредгольмовых операторов в многомерном случае

Пусть E — банахово пространство. Предположим:

1) $A(\varepsilon) = A_0 - H(\varepsilon)$ и операторные функции $H(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ голоморфны по ε в окрестности нуля $(0 < |\varepsilon| \leqslant \rho)$

$$H(\varepsilon) = \sum_{s\geqslant 1} \varepsilon^s H_s, \quad B(\varepsilon) = \sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^s B_s, \quad B_0 = I; \tag{1}$$

2) H_s, B_s, $s \geqslant 1$, — линейные ограниченные операторы, действующие в E;

3) A_0 — линейный замкнутый Ф-оператор нулевого индекса с плотной в E областью определения;

4) 0 — изолированное собственное значение оператора A_0 алгебраической кратности $n \geqslant 1$ и геометрической кратности m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — базисные векторы в $\ker A_0$ и $\operatorname{coker} A_0$ соответственно; Γ — обобщенный обратный к оператору A_0 (см. [1, с. 478]); $\langle x, \psi\rangle$ — значение линейного функционала $\psi \in E^*$ на векторе $x \in E$.

Обозначим n_j длину жордановой цепочки $\varphi_j, \ldots, \Gamma^{n_j-1}\varphi_j$ элемента φ_j. В силу предположения 4) оператор A_0 имеет полный жорданов набор [2, с. 424] из собственных и присоединенных векторов. Поэтому $n_1 + \ldots + n_m = n$, причем не уменьшая общности можно считать φ_i и ψ_i уже выбранными так, что

$$\langle \Gamma^s \varphi_j, \psi_i \rangle = \delta_{i,j}\delta_{s,n_j-1}, \quad i, j \geqslant 1, \quad s \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\delta_{a,b}$ — символ Кронекера.

1. Вывод уравнения разветвления. Заметим, что задача нахождения собственных значений $\mu(\varepsilon)$ пучка $A(\varepsilon) - \lambda B(\varepsilon)$ таких, что $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, есть задача ветвления нулевого собственного значения предельного оператора A_0 и аналогично [2, с. 440] при достаточно малом ε сводится к нахождению всех малых решений $\mu(\varepsilon)$ уравнения разветвления

$$\det \Lambda(\varepsilon, \mu) = 0, \tag{3}$$

где $\Lambda(\varepsilon, \mu) = \| a_{ij}(\varepsilon, \mu) \|_{i,j=\overline{1,m}}$ — матрица размерности $m \times m$ с коэффициентами

$$a_{ij}(\varepsilon, \mu) = \langle (H(\varepsilon) + \mu B(\varepsilon))(I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu \Gamma B(\varepsilon))^{-1} \varphi_j, \psi_i \rangle. \tag{4}$$

При этом собственные функции рассматриваемого пучка находятся по формуле

$$y(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j (I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu \Gamma B(\varepsilon))^{-1} \varphi_j, \tag{5}$$

где $\xi = \mathrm{colom}(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \ker \Lambda(\varepsilon, \mu)$.

Приведем уравнение (3) к виду $\sum_{s \geqslant 1} \mu^s l_{0s} + \sum_{\nu \geqslant 1} \varepsilon^\nu l_{\nu 0} + \sum_{\nu \geqslant 1} \varepsilon^\nu \sum_{s \geqslant 1} \mu^s l_{\nu s} = 0$

Для сокращения записи обозначим $F(\varepsilon, \mu) = (H(\varepsilon) + \mu B(\varepsilon))(I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu \Gamma B(\varepsilon))^{-1}$. Так как $\Gamma F = \sum_{j \geqslant 1} (\Gamma H + \mu \Gamma B)^j$, то

$$(I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu \Gamma B(\varepsilon))^{-1} = \sum_{j \geqslant 0} (\Gamma H(\varepsilon) + \mu \Gamma B(\varepsilon))^j = I + \Gamma F(\varepsilon, \mu), \tag{6}$$

откуда в силу (4) и (5) соответственно

$$a_{ij}(\varepsilon, \mu) = \langle F(\varepsilon, \mu) \varphi_j, \psi_i \rangle \tag{7}$$

и

$$y(\varepsilon) = (I + \Gamma F(\varepsilon, \mu)) \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j. \tag{8}$$

Представим оператор $(\Gamma H(\varepsilon) + \mu \Gamma B(\varepsilon))^j$ в виде

$$(\Gamma H(\varepsilon) + \mu \Gamma B(\varepsilon))^j = \sum_{s=0}^{j} \mu^s V_{js}. \tag{9}$$

Тогда с учетом (6)

$$\Gamma F(\varepsilon, \mu) = \sum_{k \geqslant 1} V_{k0} + \sum_{s \geqslant 1} \mu^s V_{ss} + \sum_{s \geqslant 1} \mu^s \sum_{k \geqslant 1} V_{k+s,s}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Операторы* $V_{k+s,s}$ *имеют вид:*

$$V_{k0} = \sum_{\nu \geqslant k} \varepsilon^\nu \sum_{i_{k-1}=1}^{\nu-k+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{\nu-1-i_{k-1}-\dots-i_2} \Gamma \prod_{a=1}^{k-1} (H_{i_{k-a}} \Gamma) H_{\nu-i_1-\dots-i_{k-1}}; \tag{11}$$

$$V_{ss} = \sum_{\nu \geqslant 0} \varepsilon^\nu \sum_{i_{s-1}=0}^{\nu} \cdots \sum_{i_1=0}^{\nu-i_{s-1}-\dots-i_2} \Gamma \prod_{b=1}^{s-1} (B_{i_{s-b}} \Gamma) B_{\nu-i_1-\dots-i_{s-1}}; \tag{12}$$

$$V_{k+s,s} = \sum_{\nu \geqslant k} \varepsilon^\nu \sum_{i_{k+s-1}=0}^{\nu-k} \cdots \sum_{i_1=0}^{\nu-k-i_{k+s-1}-\dots-i_2} \sum_{j_k=0}^{s} \cdots \sum_{j_1=0}^{s-j_k-\dots-j_2} \prod_{a=0}^{k-1} \times$$

$$\times \left(\prod_{b=1}^{j_{k-a}} (\Gamma B_{i_{k+s-a-b-j_k-\ldots-j_{k-a+1}}}) \Gamma H_{1+i_{k+s-a-1-j_k-\ldots-j_{k-a}}} \right) \times$$

$$\times \prod_{b=1}^{s-j_1-\ldots-j_k} (\Gamma B_{i_{s-j_1-\ldots-j_k-b}}), \quad i_0 = \nu - k - i_1 - \ldots - i_{k+s-1}. \tag{13}$$

Доказательство. Из равенства (9) вытекает, что операторы $V_{k+s,s}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $V_{k0} = \Gamma H(\varepsilon) V_{k-1,0}$, $V_{ss} = \Gamma B(\varepsilon) V_{s-1,s-1}$ и $V_{k+s,s} = \Gamma H(\varepsilon) V_{k+s-1,s} + \Gamma B(\varepsilon) V_{k+s-1,s-1}$, k, $s \geqslant 1$, откуда

$$V_{k0} = (\Gamma H(\varepsilon))^k, \quad V_{ss} = (\Gamma B(\varepsilon))^s \tag{14}$$

и

$$V_{k+s,s} = \sum_{j_k=0}^{s} \cdots \sum_{j_1=0}^{s-j_k-\ldots-j_2} \prod_{a=0}^{k-1} ((\Gamma B(\varepsilon))^{j_{k-a}} \Gamma H(\varepsilon)) (\Gamma B(\varepsilon))^{s-j_1-\ldots-j_k}. \tag{15}$$

Из формул (14), (15), учитывая представления (1) и формулу перемножения степенных рядов, приходим к утверждениям (11)—(13) леммы, что и доказывает ее справедливость.

Лемма 2. *Оператор* $F(\varepsilon, \mu)$ *имеет вид*

$$F(\varepsilon, \mu) = \sum_{\nu \geqslant 1} \varepsilon^\nu L_{\nu 0} + \sum_{s \geqslant 1} \mu^s L_{0s} + \sum_{\nu \geqslant 1} \varepsilon^\nu \sum_{s \geqslant 1} \mu^s L_{\nu s}, \tag{16}$$

где

$$L_{\nu 0} = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i_{k-1}=1}^{\nu-k+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{\nu-1-i_{k-1}-\ldots-i_2} \prod_{a=1}^{k-1} (H_{i_{k-a}} \Gamma) H_{\nu-i_1-\ldots-i_{k-1}}; \tag{17}$$

$$L_{0s} = \Gamma^{s-1}; \tag{18}$$

$$L_{\nu s} = \sum_{s-1=0}^{\nu} \cdots \sum_{i_1=0}^{\nu-i_{s-1}-\ldots-i_2} \prod_{b=1}^{s-1} (B_{i_{s-b}} \Gamma) B_{\nu-i_1-\ldots-i_{s-1}} + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i_{k+s-1}=0}^{\nu-k} \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_1=0}^{\nu-k-i_{k+s-1}-\ldots-i_2} \sum_{j_k=0}^{s} \cdots \sum_{j_1=0}^{s-j_k-\ldots-j_2} \prod_{b=1}^{j_k} (B_{i_{k+s-b}} \Gamma) H_{1+i_{k+s-1-j_k}} \times$$

$$\times \prod_{a=1}^{k-1} \left(\prod_{b=1}^{j_{k-a}} (\Gamma B_{i_{k+s-a-b-j_k-\ldots-j_{k-a+1}}}) \Gamma H_{1+i_{k+s-a-1-j_k-\ldots-j_{k-a}}} \right) \times$$

$$\times \prod_{b=1}^{s-j_1-\ldots-j_k} (\Gamma B_{i_{s-j_1-\ldots-j_k-b}}). \tag{19}$$

Доказательство леммы 2 непосредственно следует после подстановки выражений (11)—(13) в формулу (10) с учетом значения $B_0 = I$ и изменения порядка суммирования.

Теорема 1. *Собственные значения* $\mu(\varepsilon)$ *операторного пучка* $A(\varepsilon) - \lambda B(\varepsilon)$, *удовлетворяющие условию* $\mu(0) = 0$, *являются малыми решениями уравнения разветвления*

$$\mu^n + \sum_{\nu \geqslant m} \varepsilon^\nu l_{\nu 0} + \sum_{\nu \geqslant 1} \varepsilon^\nu \sum_{s \geqslant 1} \mu^s l_{\nu s} = 0, \tag{20}$$

а собственные функции $y(\varepsilon)$ *пучка имеют вид*

$$y(\varepsilon) = \sum_{\nu \geqslant 0} \varepsilon^\nu \sum_{s \geqslant 0} \mu^s Y_{\nu s}, \quad Y_{\nu s} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \Gamma L_{\nu s} \varphi_j, \tag{21}$$

где

$$l_{\nu s} = \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_m=\nu \\ s_1+\ldots+s_m=s}} \det \| \langle L_{\nu_j s_j}\varphi_j, \psi_i\rangle \|_{i,j=\overline{1,m}} \tag{22}$$

и операторы $L_{\nu s}$ *находятся по формулам* (17)—(19).

Доказательство. Подставив выражение (16) в (7), получаем $a_{ij}(\varepsilon, \mu) = \sum_{\nu\geqslant 0} \varepsilon^{\nu} \sum_{s\geqslant 0} \mu^{s} \langle L_{\nu s}\varphi_j, \psi_i\rangle$, причем с учетом условия (2) и формулы (18)

$$\langle L_{0s}\varphi_j, \psi_i\rangle = \delta_{ij}\delta_{s,n_j}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad s \geqslant 0. \tag{23}$$

Таким образом, по линейному свойству определителя уравнение (4) действительно принимает вид (20) с коэффициентами (22). Кроме того, так как $n_1 + \ldots + n_m = n$, то из (22) и (23) следует $l_{0s} = \delta_{n,s}$, что нашло отражение в первом слагаемом левой части равенства (20).

Формула (21) вытекает из (8) после подстановки в нее выражения (16). Теорема доказана.

Остановимся на одном полезном свойстве коэффициентов уравнения (20). Для этого дополнительно предположим, что φ_j и ψ_i, $i, j = \overline{1, m}$, уже перенумерованы так, что

$$n_1 = \ldots = n_{q_1} > n_{q_1+1} = \ldots = n_{q_2} > \ldots > n_{q_{r-1}+1} = \ldots = n_{q_r}, \quad q_r = m. \tag{24}$$

Отметим, что ситуацию $n_1 = \ldots = n_m$ можно рассматривать как частный случай такого представления при $r = 1$ и $q_0 = 0$.

Лемма 3. *Для того чтобы при* $\nu < m$ *коэффициент* $l_{\nu s}$ *был отличен от нуля, необходимо выполнение условия*

$$s \geqslant \sum_{j=\nu+1}^{m} n_j. \tag{25}$$

Доказательство. Так как $\nu < m$, где m — число столбцов у матриц $\|\langle L_{\nu_j s_j}\varphi_j, \psi_i\rangle\|_{i,j=\overline{1,m}}$, то в силу формулы (22) в вычислении коэффициента $l_{\nu s}$ будут участвовать матрицы C_l, у которых l столбцов ($m - \nu \leqslant l \leqslant m - 1$) с номерами $m_1, \ldots, m_l$ ($m_i \neq m_j$; $1 \leqslant m_j \leqslant m$) имеют вид colom $(\langle L_{0s_{m_j}}\varphi_{m_j}, \psi_1\rangle, \ldots, \langle L_{0s_{m_j}}\varphi_{m_j}, \psi_m\rangle)$, где $j = \overline{1, l}$.

Если $l_{\nu s} \neq 0$, то $\det C_{l_0} \neq 0$ хотя бы для одной из матриц C_{l_0}. Тогда согласно равенству (23) отсюда следует единственная возможность: $s_{m_l} = n_{m_l}$ $\forall l = 1, \ldots l$. Но так как по формуле (22) $s = s_1 + \ldots + s_m$, где $s_i \geqslant 0$, то $s \geqslant s_{m_1} + \ldots + s_{m_l}$.

Учитывая произвольность чисел l_0 ($m - \nu \leqslant l_0 \leqslant m - 1$); $m_1, \ldots, m_l$ ($m_i \neq m_j$, $1 \leqslant m_j \leqslant m$) и условие упорядоченности (24), приходим к неравенству (25), что и доказывает справедливость леммы 3.

2. Метод диаграммы Ньютона. Для нахождения решений уравнения разветвления (20) может быть эффективно применен метод диаграммы Ньютона (см., напр., [2, § 2]). При построении диаграммы (а нас интересует ее убывающий участок) по оси абсцисс будем откладывать показатель s степени μ, а по оси ординат — показатель ν степени ε слагаемого. В точке с координатами $(s; \nu)$ учитывается значение коэффициента $l_{\nu s}$.

Анализ уравнения (20) показывает, что длина убывающего участка его диаграммы Ньютона равна n и, следовательно, это уравнение имеет n малых решений $\mu^{(1)}(\varepsilon), \ldots, \mu^{(n)}(\varepsilon)$. Если при этом $\mu^{(i)}(\varepsilon)$ — простой корень уравнения разветвления, то $\dim\ker \Lambda(\varepsilon, \mu^{(i)}(\varepsilon)) = 1$ $\forall \varepsilon$ (см. [2, теорема 32.7]) и ему по формуле (5) отвечает единственный (с точностью до числового множителя) собственный вектор $y^{(i)}(\varepsilon)$.

Построенный по коэффициентам $l_{\nu s}$ убывающий участок диаграммы в каждом конкретном случае позволяет полностью определить все значения первого слагаемого в разложении функции $\mu(\varepsilon)$ в ряд Пюизо

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon^{k_0}\mu_0 + \varepsilon^{k_1}\mu_1 + \varepsilon^{k_2}\mu_2 + \ldots, \quad k_0 < k_1 < k_2 < \ldots . \tag{26}$$

Здесь k_0 находится как тангенс угла наклона одного из звеньев ломаной Ньютона с отрицательным направлением оси $0s$, а μ_0 — корень соответствующего этому участку определяющего уравнения.

Для иллюстрации рассмотрим несколько частных случаев.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (20) *таковы, что*

$$l_{q_k, \sum\limits_{j=q_k+1}^{m} n_j} \neq 0, \quad k = \overline{1, r-1}; \quad l_{m,0} \neq 0. \tag{27}$$

Тогда убывающий участок диаграммы Ньютона этого уравнения совпадает с ломаной $[P_0, P_1, \ldots, P_r]$, *последовательно соединяющей точки* $P_0, \ldots, P_r$, *где* $P_0 = (0; q_r)$, $P_r = (n; 0)$ *и* $P_k = \left(\sum\limits_{j=q_{r-k}+1}^{m} n_j; q_{r-k} \right)$, $k = \overline{1, r-1}$.

Доказательство. Пусть $\Delta_j = q_j - q_{j-1}$. Тогда координаты точки P_k с учетом (24) имеют вид: $P_k = \left(\sum\limits_{j=r-k+1}^{r} \Delta_j n_{q_j}, q_{r-k} \right)$.

Обозначим через α_{ik} тангенс угла наклона отрезка $[P_i, P_k]$ с отрицательным направлением оси $0s$. Непосредственно проверяется, что $\alpha_{ik} = \sum\limits_{j=r-k+1}^{r-i} \Delta_j / \sum\limits_{j=r-k+1}^{r-i} \Delta_j n_{q_j}$ при каждом фиксированном $i = 0, \ldots, r-1$ и, в частности, $\alpha_{i,i+1} = 1/n_{q_{r-i}}$. Поэтому, воспользовавшись положительностью чисел Δ_j и условием (24), получаем: $\alpha_{ik} < \alpha_{i,i+1}\ \forall k = \overline{i+1, r}$. Это означает, что при каждом фиксированном $i = \overline{0, r-1}$ точки P_k, $k \geqslant i+2$, лежат выше прямой с коэффициентом наклона $\alpha_{i,i+1}$, проходящей через P_i и P_{i+1}. Кроме того, из (24) видим, что число $\alpha_{i,i+1}$ монотонно убывает с возрастанием i, откуда следует выпуклость ломаной $[P_0, P_1, \ldots, P_r]$. Осталось заметить, что в силу леммы 3 и условия (27) на плоскости $s0\nu$ ниже указанной ломаной точек нет. Теорема доказана.

Отметим, что так как построенная в теореме 2 ломаная состоит из r звеньев, то тем самым для исходной степени разложения k_0 функции $\mu(\varepsilon)$ в ряд (26) получено r различных значений $1/n_{q_j}$, $j = \overline{1, r}$, что совпадает с результатом работы [3], установленным другим способом.

3. Метод неопределенных коэффициентов. Для нахождения следующих членов разложения (26) следует поступить согласно общей теории метода диаграммы Ньютона. Однако в случае, когда μ_0 является простым корнем определяющего уравнения, отвечающего звену ломаной Ньютона с коэффициентом наклона $k_0 = p/q$, функцию $\mu(\varepsilon)$ удобнее находить методом неопределенных коэффициентов

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{j \geqslant 0} \gamma^{p+j} \mu_j, \quad \gamma = \varepsilon^{1/q}. \tag{28}$$

Нетрудно видеть, что при этом

$$\mu^s = \sum_{i \geqslant sp} \gamma^i \sum_{i_{s-1}=0}^{i-sp} \cdots \sum_{i_1=0}^{i-sp-i_{s-1}-\ldots-i_2} \prod_{a=1}^{s-1} (\mu_{i_{s-a}})\, \mu_{i-sp-i_1-\ldots-i_{s-1}}. \tag{29}$$

Поэтому, подставляя выражения (28), (29) в уравнение (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях γ, получаем уравнения

$$\sum_{k=0}^{i-p-q} \sum_{s=1}^{[(i-k-q)/p]} \sum_{i_{s-1}=0}^{i-sp-k-q} \cdots \sum_{i_1=0}^{i-sp-k-q-i_{s-1}-\ldots-i_2} \prod_{a=1}^{s-1} (\mu_{i_{s-a}}) \times$$
$$\times \mu_{i-sp-k-q-i_1-\ldots-i_{s-1}} \delta_{k/q,[k/q]} l_{1+k/q,s} + \delta_{i/q,[i/q]} l_{i/q,0} +$$
$$+ \sum_{i_{n-1}=0}^{i-np} \cdots \sum_{i_1=0}^{i-np-i_{n-1}-\ldots-i_2} \prod_{a=1}^{n-1} (\mu_{i_{n-a}})\, \mu_{i-np-i_1-\ldots-i_{n-1}} = 0, \quad i \geqslant \min(q, np), \tag{30}$$

откуда могут быть последовательно найдены все коэффициенты μ_j ряда (28).

Отметим, что в случае (28) собственная функция $y(\varepsilon)$, согласно формулам (21) и (29), также представляется в виде степенного ряда по параметру γ, причем

$$y(\varepsilon) = \sum_{i\geqslant p} \gamma^i \sum_{s=1}^{[i/p]} \sum_{k=0}^{i-sp} \sum_{i_{s-1}=0}^{i-sp-k} \cdots \sum_{i_1=0}^{i-sp-k-i_{s-1}-\ldots-i_2} \delta_{k/q,[k/q]} \prod_{a=1}^{s-1} (\mu_{i_{s-a}}) \times$$
$$\times \mu_{i-sp-k-i_1-\ldots-i_{s-1}} Y_{k/q,s} + \sum_{i\geqslant 0} \gamma^i \delta_{i/q,[i/q]} Y_{i/q,0}. \qquad (31)$$

Непосредственным следствием методов диаграммы Ньютона и неопределенных коэффициентов является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 все r определяющих уравнений, отвечающих звеньям ломаной $[P_0, \ldots, P_r]$, не имеют кратных корней. Тогда операторный пучок $A(\varepsilon) - \lambda B(\varepsilon)$ имеет n различных собственных значений*

$$\mu^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^{(1+i)/n_{q_k}} \mu_j^{(i)}, \quad i = \overline{1, \Delta_k n_{q_k}}; \quad k = \overline{1, r}, \qquad (32)$$

каждому из которых соответствует, по формуле (31), единственный собственный вектор $y^{(i)}(\varepsilon)$, представимый, как и $\mu^{(i)}(\varepsilon)$, в виде сходящегося ряда по степеням параметра $\varepsilon^{1/n_{q_k}}$.

Так как уравнения (30) носят рекуррентный характер, то в каждом конкретном случае в зависимости от соотношения между числами m, n, p и q удается указать явную формулу для коэффициентов μ_i ряда (28). Для примера рассмотрим простейшую ситуацию, когда убывающий участок диаграммы Ньютона уравнения (20) состоит из отрезка, соединяющего точки $(0; m)$ и $(n; 0)$.

Пусть $l_{\nu s} = 0$ при $s \leqslant a_\nu$, где $a_\nu = n(m-\nu)/m$, $\nu = \overline{1, m-1}$. В этом случае $k_0 = m/n$ и определяющее уравнение $x^n + l_{m0} = 0$ имеет n простых корней $\mu_0^{(i)} = [-l_{m0}]_i^{1/n}$, $i = \overline{1, n}$. По каждому из них в силу (30) после замены $p = m$, $q = n$ и $j = i - mn$ получаем для последующих коэффициентов ряда (28) рекуррентную формулу $\mu_j^{(i)} = h_{j-1}^{(i)}/n(\mu_0^{(i)})^{n-1}$, где $h_{j-1}^{(i)}$ имеет вид

$$h_{j-1}^{(i)} = -\Bigg[\sum_{k=0}^{j+nm-n-m} \sum_{s=1+a_{1+k/n}}^{[(j+nm-n-k)/m]} \sum_{i_{s-1}=0}^{j+(n-s)m-n-k} \cdots$$
$$\cdots \sum_{i_1=0}^{j+(n-s)m-n-k-i_{s-1}-\ldots-i_2} \delta_{k/n,[k/n]} \prod_{a=1}^{s-1} (\mu_{i_{s-a}}^{(i)}) \mu_{j+(n-s)m-n-k-i_1-\ldots-i_{s-1}}^{(i)} l_{1+k/n,s} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i_{n-k-1}=1}^{j-1} \sum_{i_{n-k-2}=0}^{j-i_{n-k-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{j-i_{n-k-1}-\ldots-i_2} (\mu_0^{(i)})^k \prod_{a=1}^{n-k-1} (\mu_{i_{n-k-a}}^{(i)}) \mu_{j-i_1-\ldots-i_{n-k-1}}^{(i)} +$$
$$+ \delta_{j/n,[j/n]} l_{m+j/n,0} \Bigg]$$

и однозначно определяется по коэффициентам $l_{\nu s}$ и функциям $\mu_0^{(i)}, \ldots, \mu_{j-1}^{(i)}$.

1. *Плоткин Я. Д., Турбин А. Ф.* Обращение возмущенных на спектре нормально разрешимых операторов.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 4, с. 477—486.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1960, 15, вып. 3, с. 3—80.

Воронеж. гос. ун-т

Поступила 04.01.83