УДК 517.98

М. Ф. Городній, В. М. Романенко (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

АПРОКСИМАЦІЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ РОЗВ'ЯЗКАМИ ВІДПОВІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ *

We investigate a problem of approximation of a bounded solution of difference analog for differential equation

$$x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_{m-1} x'(t) = A x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

by solutions of the corresponding boundary value problems. Here, A is an unbounded operator in the Banach space B, $\{A_1, \ldots, A_{m-1}\} \subset L(B)$, and $f\colon \mathbb{R} \to B$ is a fixed function.

Досліджено питання про апроксимацію обмеженого розв'язку різницевого аналога диференціального рівняння

$$x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_{m-1} x'(t) = A x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

розв'язками відповідних крайових задач. Тут A — необмежений оператор в банаховому просторі B, $\{A_1, \ldots, A_{m-1}\} \subset L(B)$, $f\colon \mathbb{R} \to B$ — фіксована функція.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$; $L(B)$ — банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють із B в B; $\{A_k\colon 1 \le k \le m-1\}$ — набір операторів з $L(B)$; A — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення D та резольвентною множиною $\rho(A)$; I — одиничний, 0 — нульовий оператори в B. Різницевим аналогом диференціального рівняння

$$x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_{m-1} x'(t) = A x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

є рівняння

$$\Delta^{(m)} x_n + A_1 \Delta^{(m-1)} x_n + \ldots + A_{m-1} \Delta^{(1)} x_n = A x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Тут $f\colon \mathbb{R} \to B$ — фіксована функція, $\{y_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ — послідовність елементів B,

$$\Delta^{(1)} x_n := x_{n+1} - x_{n-1},$$

$$\Delta^{(k+1)} x_n := \Delta^{(k)} x_{n+1} - \Delta^{(k)} x_{n-1}, \quad k \ge 1.$$

Відомо [1], що різницеве рівняння (1) має для довільної обмеженої за нормою в B послідовності $\{y_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, що задовольняє умову

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| + \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A x_n\| < +\infty, \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли виконується таке припущення.

Припущення 1. *Для довільного* z, $|z| = 1$, *обернений оператор до оператора*

* Частково підтримана Міжнародною соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU071022.

$$\Phi(z) := (z - z^{-1})^m I + A_1 (z - z^{-1})^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(z - z^{-1}) - A$$

існує та належить $L(B)$.

Мета цієї роботи — вивчити питання про можливість наближення обмеженого розв'язку рівняння (1) розв'язками відповідних крайових різницевих задач.

Допоміжні твердження. Внаслідок теореми 1 із [1] при виконанні включення $[-2; 2] \subset \rho(A)$ різницеве рівняння

$$x_{n+1} + x_{n-1} = A x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

має для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, що задовольняє умову (2), причому існує залежна тільки від оператора A стала $C > 0$ така, що для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ та відповідного їй розв'язку $\{x_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (3) справджується нерівність

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| \le C \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|.$$

Рівнянню (3) відповідає набір крайових різницевих задач вигляду

$$\begin{gathered} u_{n+1} + u_{n-1} = A u_n + y_n, \quad -p+1 \le n \le q-1, \\ u_{-p} = a, \quad u_q = b. \end{gathered} \tag{4}$$

Тут a, b — фіксовані елементи простору B, p, q — натуральні числа. Покладемо

$$\Lambda := \left\{ 2\cos\frac{j\pi}{k} \,\middle|\, 1 \le j \le k-1, \ k \ge 2 \right\}.$$

Теорема 1. *Для того щоб для довільних* $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{a, b, y_{-p+1}, \ldots, y_{q-1}\} \subset B$ *різницева крайова задача* (4) *мала єдиний розв'язок* $\{u_n \colon -p \le n \le q\}$, *необхідно і достатньо, щоб* $\Lambda \subset \rho(A)$.

Теорема 2. *Якщо* $[-2; 2] \subset \rho(A)$, *то знайдуться такі залежні тільки від оператора* A *сталі* $L > 0$, $R > 1$, *що для довільної обмеженої в* B *послідовності* $\{y_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, *відповідного їй єдиного розв'язку* $\{x_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ *різницевого рівняння* (3), *довільних* $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{a, b\} \subset B$ *та відповідного* $\{a, b, y_{-p+1}, \ldots, y_{q-1}\}$ *єдиного розв'язку* $\{u_n \colon -p \le n \le q\}$ *крайової задачі* (4), *довільного* k, $1 \le k \le p+q-1$, *справджується нерівність*

$$\|x_{-p+k} - u_{-p+k}\| \le L\left(\frac{C_1 + \|a\|}{R^k} + \frac{C_1 + \|b\|}{R^{p+q-k}} \right),$$

де

$$C_1 := C \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|.$$

Доведення теорем 1, 2 проводиться тим же способом, що і доведення аналогічних тверджень в [2], з урахуванням деяких фактів з операторного числення для замкненого оператора (див. [3]). Додатково треба зауважити, що, поклавши, як і в [2],

$$\varphi_1(\lambda) = 1, \quad \varphi_2(\lambda) = \lambda,$$

$$\varphi_{k+1}(\lambda) = \lambda\,\varphi_k(\lambda) - \varphi_{k-1}(\lambda), \quad k \geq 2,$$

можна стверджувати, що при $k \geq 2$ оператор $\varphi_k(A)$ має неперервний обернений оператор

$$\varphi_k^{-1}(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \varphi_k^{-1}(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda .$$

Тут $R(\lambda, A)$ — резольвента оператора A, ∂K — границя в $\mathbb{C}$ множини

$$K := \left\{ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\alpha^2}{4+\delta^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} > 1 \right\};$$

число $\delta > 0$, що використовується в означенні множини K, вибирається таким, щоб виконувалось включення $\mathbb{C} \setminus K \subset \rho(A)$. Існування оператора $\varphi_k^{-1}(A)$ випливає з того, що $\varphi_k^{-1}(\lambda)$ — аналітична на K функція з нулем порядку $k-1$ на нескінченності. Також при фіксованих $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ оператор

$$\varphi_n(\lambda)\, \varphi_{n+m}^{-1}(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \varphi_n(\lambda)\, \varphi_{n+m}^{-1}(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda$$

визначений та належить $L(B)$, причому

$$\|\varphi_n(\lambda)\, \varphi_{n+m}^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{1}{2\pi} l(\partial K) \sup_{\lambda \in \partial K} \|R(\lambda, A)\| \sup_{\lambda \subset K \cup \partial K} |\varphi_n(\lambda)\, \varphi_{n+m}^{-1}(\lambda)|,$$

де $l(\partial K)$ — довжина ∂K.

Апроксимація обмеженого розв'язку рівняння (1). Спочатку зауважимо, що різницеве рівняння (1) еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{gathered} x_{n+1} - x_{n-1} = v_{1,n}, \\ v_{1,n+1} - v_{1,n-1} = v_{2,n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{m-2,n+1} - v_{m-2,n-1} = v_{m-1,n}, \\ v_{m-1,n+1} - v_{m-1,n-1} = A x_n - A_1 v_{m-1,n} - \dots - A_{m-1} v_{1,n} + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{5}$$

Позначимо через B^m декартів добуток m екземплярів простору B; B^m — банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\bar{z}\|_m := \max_{1 \leq k \leq m} \|z_k\|, \quad \bar{z} = (z_1, \dots, z_m) \in B^m.$$

З урахуванням правил матричного числення система (5) записується в цьому просторі таким чином:

$$\bar{z}_{n+1} - \bar{z}_{n-1} = H \bar{z}_n + \bar{y}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$\bar{z}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{m-1,n} \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_n = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & I \\ A & -A_{m-1} & \dots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причому на незаповнених місцях матриці H знаходяться нульові оператори. Матриця H визначає в просторі B^m оператор, який теж позначатимемо буквою H. Внаслідок замкнености A цей оператор замкнений.

У подальшому використовується таке припущення.

Припущення 2. *Оператори $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ попарно комутують, а також*

$$\forall\ 1 \le k \le m-1:\ A_k\colon B \to D, \quad A A_k = A_k A \quad \text{на} \quad D.$$

Справедлива така лема.

Лема 1. *Якщо виконуються припущення 1 і 2, то рівняння (6) має для довільної обмеженої в B^m послідовності $\{\bar{y}_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{\bar{z}_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$.*

Зауваження. З еквівалентності рівняння (1) та системи (5) випливає існування обмеженого розв'язку рівняння (6) тільки для послідовностей $\{\bar{y}_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ вигляду (7).

Доведення. Нехай E — одиничний оператор в B^m. Внаслідок теореми 1 з [1] досить довести, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, оператор $\Psi(\lambda) := H - (\lambda - \lambda^{-1})E$ має в B^m неперервний обернений оператор. З урахуванням припущення 2 визначник матриці, відповідної $\Psi(\lambda)$, знайдений за правилами матричного числення, дорівнює $(-1)^m \Phi(\lambda)$. Тому при виконанні припущення 1 для цієї матриці можна побудувати обернену, яка і задає оператор $\Psi^{-1}(\lambda)$.

Лему 1 доведено.

Різницевому рівнянню (6) відповідає набір крайових різницевих задач вигляду

$$\begin{gathered} \bar{w}_{n+1} - \bar{w}_{n-1} = H\bar{w}_n + \bar{y}_n, \quad -p+1 \le n \le q-1, \\ \bar{w}_{-p} = \bar{a}, \quad \bar{w}_q = \bar{b}, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\{\bar{a}, \bar{b}\} \subset B^m$, $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$ — фіксовані. Оскільки рівняння (6) еквівалентне рівнянню

$$i^{n+1}\bar{z}_{n+1} + i^{n-1}\bar{z}_{n-1} = iH(i^n\bar{z}_n) + i^{n+1}\bar{y}_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і умова

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1:\ \exists\, \Psi^{-1}(\lambda)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\rho(iH) \supset [-2; 2]$, то внаслідок теореми 1 справедливе таке твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються припущення 1 і 2, то для довільних $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}_{-p+1}, \ldots, \bar{y}_{q+1}\} \subset B^m$ крайова задача (8) має єдиний розв'язок $\{\bar{w}_n\colon -p \le n \le q\}$.*

Наступна теорема стверджує, що перші координати розв'язків крайових задач (8) апроксимують при $p, q \to \infty$ обмежений розв'язок різницевого рівняння (1), а також містить оцінку швидкості апроксимації.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення 1 і 2. Тоді знайдуться такі залежні тільки від операторів $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ сталі $L > 0$, $R > 1$, що для довільної обмеженої послідовності $\{y_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, відповідного їй єдиного розв'язку $\{x_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1), довільних $\{p, q\} \subset \mathbb{N}$, $\{\bar{a}, \bar{b}\} \subset B^m$, єдиного* *розв'язку* $\{\bar{w}_n = (w_1^{(n)}, \ldots, w_m^{(n)}) \colon -p \le n \le q\}$ *крайової задачі* (8), *що відповідає еквівалентному* (1) *різницевому рівнянню* (6), *довільного* k, $1 \le k \le p + q - 1$, *виконується нерівність*

$$\|x_{-p+k} - w_1^{(-p+k)}\| \le L\left(\frac{C_2 + \|\bar{a}\|_m}{R^k} + \frac{C_2 + \|\bar{b}\|_m}{R^{p+q-k}}\right),$$

де стала $C_2 \ge 0$ *залежить від* A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$.

Теорема 3 є наслідком теореми 2.

1. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 41–46.
2. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 4. – С. 17–22.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.

Одержано 28.01.98,
після доопрацювання – 06.05.99