УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ РАЗНОСТЬЮ НЕЗАВИСИМЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

For a semicontinuous difference of two independent renewal processes, we find generating function for time of intersections of a level.

Для напівнеперервної різниці двох незалежних процесів відновлення знайдено твірну функцію часу досягнення межі.

Зафиксируем вероятностное пространство (Ω, F, P) и введем на нем независимые случайные блуждания

$$\{\eta_n;\ n\geq 0\},\quad \eta_0=0,\quad \eta_1=\eta;$$
$$\{\xi_n,\ \kappa_n;\ n\geq 0\},\quad \xi_0=\kappa_0=0,\quad \xi_1=\xi,\quad \kappa_1=\kappa,$$

такие, что $\eta,\ \xi,\ \kappa$ — положительные и целочисленные: $P[(\eta,\xi,\kappa)\in N_+^3]=1$, $N_+=\{1,2,\dots\}$. Для каждого $n\in N=\{0,1,\dots\}$ положим

$$\alpha_n=\max\{k\geq 0:\ \xi_k\leq n\},\quad \beta_n=\max\{k\geq 0:\ \eta_k\leq n\},\quad \delta_n=\kappa_{\alpha_n}-\beta_n.$$

Случайная последовательность $\delta_0,\ \delta_1,\dots$ начинает эволюцию из состояния 0, принимает значения из множества $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ и является полунепрерывной снизу разностью независимых процессов восстановления с дискретным временем.

Пусть $k\in N$ и $\tau_k=\inf\{n>0:\ \delta_n>k\}$ — момент первого перескока последовательностью $\delta_n,\ n\geq 0$, уровня $k\geq 0$. Цель настоящей работы — определение производящей функции

$$\mathrm{M}[t^{\tau_k},\ \tau_k<\infty],\quad k\geq 0.$$

Введем на вероятностном пространстве (Ω, F, P) следующие элементы:

1) $\{\sigma_k,\ T_k;\ k\in N\}$ — случайная последовательность, определяемая равенствами

$$\sigma_k=\min\{n\geq 0:\ \kappa_n\geq k\},\quad T_k=\kappa_{\sigma_k}-k;$$

2) $\{\zeta_t;\ t\in[0,1)\}$ — неубывающий целочисленный случайный процесс с производящей функцией

$$\mathrm{M}[u^{\zeta_t}]=\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[(u^{\eta_{\kappa_n}}-1)t^{\xi_n};\ \eta_{\kappa_n}>\xi_n]\right\},\quad |u|\leq 1.$$

Отметим, что распределение случайной величины $\zeta=\lim\limits_{t\to 1}\zeta_t$ совпадает с распределением $\sup\limits_{n\geq 0}\{\eta_{\kappa_n}-\xi_n\}$. Будем считать также, что случайный элемент ζ_t не зависит от случайных блужданий $\{\eta_n;\ n\geq 0\}$, $\{\xi_n,\ \kappa_n;\ n\geq 0\}$.

Теорема. *Пусть* $k\in N$ *и* $t\in[0,1)$. *Тогда*

$$\mathrm{M}[t^{\tau_k},\ \tau_k<\infty]=\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}].\tag{1}$$

Следствие. *Пусть* $\kappa \equiv 1$. *Тогда*

$$P[\sigma_k = k,\ T_k = 0] = 1, \quad k \in N;$$

$$M[u^{\zeta_t}] = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[(u^{\eta_n - \xi_n} - 1)t^{\xi_n};\ \eta_n > \xi_n]\right\}$$

и

$$M[t^{\tau_k},\ \tau_k < \infty] = M[t^{\xi_k};\ \zeta_t > \xi_k]. \tag{2}$$

Доказательство. Для обоснования сформулированной теоремы нам понадобится ряд вспомогательных построений и результатов. Пусть $n \in N$ и

$$\eta(n) = n - \eta_{\beta_n}, \quad \xi(n) = n - \xi_{\alpha_n}, \quad X_n = (\delta_n, \eta(n), \xi(n)).$$

Случайная последовательность $\{X_n;\ n \ge 0\}$ стартует из состояния $(0, 0, 0)$ и принимает значения из множества $Z \times N^2$. Легко проверить, что она является цепью Маркова, однородной по времени и по первой компоненте и имеет такие переходные вероятности за один шаг:

$$
\begin{gathered}
P[(k,i,j) \to (k, i+1, j+1)] = P[\eta > i+1,\ \xi > j+1 / \eta > i,\ \xi > j],\\
P[(k,i,j) \to (k-1, 0, j+1)] = P[\eta = i+1,\ \xi > j+1 / \eta > i,\ \xi > j],\\
P[(k,i,j) \to (k+r, i+1, 0)] = P[\eta > i+1,\ \xi = j+1,\ \kappa = r / \eta > i,\ \xi > j],\\
P[(k,i,j) \to (k+r-1, 0, 0)] = P[\eta = i+1,\ \xi = j+1,\ \kappa = r / \eta > i,\ \xi > j],
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $(k, r) \in Z \times N_+$, а (i, j) принимают такие значения, для которых $P[\eta > i,\ \xi > j] > 0$.

Зафиксируем (i, j) и обозначим через $\{X_n(i,j);\ n \ge 0\} = \{\delta_n(i,j),\ \eta_n(i,j),\ \xi_n(i,j);\ n \ge 0\}$ цепь Маркова с начальным распределением $(0, i, j)$, эволюционирующую в фазовом пространстве $Z \times N^2$ и имеющую переходные вероятности (3). Пусть $k \in N$ и $\tau_k^{ij} = \inf(n > 0:\ \delta_n(i,j) > k\}$. Ясно, что $\tau_k = \tau_k^{00}$. Положим

$$\varphi_k^{ij}(t) = P[\eta > i,\ \xi > j]\, M[t^{\tau_k^{ij}};\ \tau_k^{ij} < \infty].$$

Согласно переходным вероятностям (3), эти функции связаны соотношением

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\varphi_k^{ij}(t) = {}& \varphi_k^{i+1j+1}(t) + P[\eta = i+1]\,\varphi_{k+1}^{0j+1}(t) + \\
&+ \sum_{r=1}^{k} P[\xi = j+1,\ \kappa = r]\,\varphi_{k-r}^{i+10}(t) + \\
&+ \sum_{r=1}^{k+1} P[\eta = i+1,\ \xi = j+1,\ \kappa = r]\,\varphi_{k-r+1}^{00}(t) + \\
&+ P[\eta > i+1,\ \xi = j+1,\ \kappa > k] + P[\eta = i+1,\ \xi = j+1,\ \kappa > k+1].
\end{aligned}
$$

Поэтому если положить

$$\Phi_\theta^t(u, v) = \sum_{k,i,j \ge 0} \theta^k u^i v^j \varphi_k^{ij}(t), \quad t \in [0, 1), \quad |\theta|,\ |u|,\ |v| < 1,$$

то из предыдущего соотношения получим

$$\left(\frac{uv}{t}-1\right)\Phi_\theta^t(u,v) = -\Phi_\theta^t(u,0)\left(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]\right) - \Phi_\theta^t(0,v)\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right) +$$

$$+ \Phi_\theta^t(0,0)\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)\left(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]\right) -$$

$$-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\,\hat{\Phi}_0^t(0,v) + \frac{u-\mathrm{M}[u^\eta]}{1-u}\times\frac{\mathrm{M}[v^\xi]-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]}{1-\theta} +$$

$$+ \mathrm{M}[u^\eta]\frac{\mathrm{M}[v^\xi]-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]}{1-\theta}, \tag{4}$$

где

$$\hat{\Phi}_0^t(0,v) = \Phi_0^t(0,v) - \Phi_0^t(0,0).$$

Введем следующие обозначения:

$$A_\theta(u,v) = \left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)^{-1}\left(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]\right)^{-1},$$

$$A(u,v) = \left(1-\mathrm{M}[v^\xi u^{\eta_\kappa}]\right)^{-1}, \quad |\theta| = 1, \quad |u|,\ |v| < 1,$$

$$a_\theta^0(u,v) = 1 + a_\theta(u,v) = \sum_{k\ge 0}\theta^k\mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k}}\theta^{\eta_{\tau_k}}],$$

$$A_\theta^+(u,v) = A(u,v)\,a_\theta(u,v), \qquad A_\theta^-(u,v) = A(u,v)\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)^{-1}.$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$A_\theta(u,v) = A_\theta^+(u,v) + A_\theta^-(u,v), \tag{5}$$

$$\left(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]\right)^{-1} = A(u,v)\left\{a_\theta^0(u,v) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\,a_\theta(u,v)\right\}. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* $uv = t\in[0,1)$ *и* $|u|,\ |v|\in[t,1]$. *Тогда*

$$A(u,v) = E(u,t)F(v,t),$$

где

$$E(u,t) = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[t^{\xi_n}u^{\eta_{\kappa_n}-\xi_n};\ \eta_{\kappa_n}\ge\xi_n]\right\}, \quad |u|\le 1,$$

$$F(v,t) = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[t^{\eta_{\kappa_n}}v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n>\eta_{\kappa_n}]\right\}, \quad |v|\le 1.$$

Доказательство этих лемм приведено в [1].

Продолжим анализ функционального уравнения (4). Умножая его на $A_\theta(u,v)$ и полагая $uv = t$, получаем

$$\frac{\Phi_\theta^t(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]} + \frac{\Phi_\theta^t(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]} - \Phi_\theta^t(0,0) + \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]A_\theta(u,v)\,\hat{\Phi}_0^t(0,v) =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u} \times \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}] - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{1-\theta} A_{\theta}(u, v) -$$

$$- \mathrm{M}[v^{\xi}] \frac{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-\theta} A_{\theta}(u, v) + \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])}, \tag{7}$$

$$|\theta| = 1, \quad uv = t.$$

Пусть $[f(\theta)]_+$ — правильная часть ряда Лорана, соответствующая функции $f(\theta)$. Непосредственно проверяется, что

$$\left[\frac{\Phi_{\theta}^{t}(u, 0)}{1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]}\right]_+ = \frac{\Phi_{\theta}^{t}(u, 0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\Phi_{\eta(u)}^{t}(u, 0)}{1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]}, \quad \eta(u) = \mathrm{M}[u^{\eta}],$$

$$\left[\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} A_{\theta}(u, v)\right]_+ = \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} A(u, v)\, a_{\theta}(u, v) +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\right)^{-1} A(u, v) \left(\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}] \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1 - u^{\eta_{\kappa}})]}{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}\right),$$

$$\left[\frac{1}{\theta} A_{\theta}(u, v)\right]_+ = \frac{1}{\theta} A(u, v)\, a_{\theta}(u, v),$$

$$\left[\frac{1}{1-\theta} A_{\theta}(u, v)\right]_+ = \frac{1}{1-\theta} A(u, v)\, a_{\theta}(u, v) + \frac{1}{1-\theta}(1 - \mathrm{M}[u^{\eta}])^{-1} A(u, v).$$

Сравнивая теперь правильные части лорановских рядов, соответствующие правой и левой частям уравнения (7), получаем

$$\frac{\Phi_{\theta}^{t}(u, 0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\Phi_{\eta(u)}^{t}(u, 0)}{1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]} + \frac{\Phi_{\theta}^{t}(0, v)}{1 - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} -$$

$$- \Phi_{\theta}^{t}(0, 0) + A(u, v) \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\, a_{\theta}(u, v)\, \hat{\Phi}_{0}^{t}(0, v) =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u} \left(1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\right)^{-1} A(u, v) \left(\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}] \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1 - u^{\eta_{\kappa}})]}{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}\right) + \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])} +$$

$$+ \frac{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u} \times \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} A(u, v)\, a_{\theta}(u, v) -$$

$$- \mathrm{M}[v^{\xi}] \frac{1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-\theta} A(u, v)\, a_{\theta}(u, v) - \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\theta} A(u, v). \tag{8}$$

Из равенства (6) следует

$$A(u, v) \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\, a_{\theta}(u, v)\Big|_{\theta=0} = A(u, v) - 1.$$

Полагая теперь в уравнении (8) $\theta = 0$, получаем

$$\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,0) + A(u,v)\,\hat{\Phi}^{t}_{0}(0,v) =$$
$$= \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}] - \mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\kappa}}]}{1-u}A(u,v) - \mathrm{M}[v^{\xi}]\,A(u,v). \tag{9}$$

Вычитая из равенства (8) равенство (9), умноженное на $a^{0}_{\theta}(u,v)$, имеем

$$-a^{0}_{\theta}(u,v)\,\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,v) + \frac{\Phi^{t}_{\theta}(u,0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\,\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]} + \frac{\Phi^{t}_{\theta}(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} -$$
$$- \Phi^{t}_{\theta}(0,0) - A(u,v)\left\{a^{0}_{\theta}(u,v) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\,a_{\theta}(u,v)\right\}\hat{\Phi}^{t}_{0}(0,v) =$$
$$= \frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\times\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta}A(u,v)\,a_{\theta}(u,v) +$$
$$+ \frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\right)^{-1}A(u,v)\left(\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} -\right.$$
$$\left.- \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-u^{\eta_{\kappa}})]}{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}\right) - \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\theta}A(u,v) + \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])} -$$
$$- \mathrm{M}[v^{\xi}]\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-\theta}A(u,v)\,a_{\theta}(u,v) +$$
$$+ \mathrm{M}[v^{\xi}]\,A(u,v)\,a_{\theta}(u,v) - \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}] - \mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\kappa}}]}{1-u}A(u,v)\,[a_{\theta}(u,v)+1].$$

Это равенство, ввиду (6) и некоторой перегруппировки слагаемых в правой части, можно переписать следующим образом:

$$-a^{0}_{\theta}(u,v)\,\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,v) + \frac{\Phi^{t}_{\theta}(u,0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\,\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]} + \frac{\Phi^{t}_{\theta}(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} -$$
$$- \Phi^{t}_{\theta}(0,0) - \frac{\hat{\Phi}^{t}_{0}(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} =$$
$$= \frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\right)^{-1}A(u,v)\left(\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} -\right.$$
$$\left.- \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-u^{\eta_{\kappa}})]}{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}\right) +$$
$$+ \frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}a_{\theta}(u,v)\,A(u,v)\left(\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-\theta^{\kappa})]}{1-\theta} - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(1-u^{\eta_{\kappa}})]}{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}\right) +$$
$$+ \mathrm{M}[v^{\xi}]\,A(u,v)\,a^{0}_{\theta}(u,v) - \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\theta}A(u,v) -$$
$$- \mathrm{M}[v^{\xi}]\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-\theta}A(u,v)\,a_{\theta}(u,v) + \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])}. \tag{10}$$

Поскольку (см. (5))

$$A(u,v)\left[a_\theta(u,v) + \left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)^{-1}\right] = A_\theta(u,v)$$

и (см. (6))

$$\mathrm{M}[v^\xi]\,A(u,v)\,a_\theta(u,v) - \frac{\mathrm{M}[v^\xi]}{1-\theta}A(u,v) - \mathrm{M}[v^\xi]\,A(u,v)\frac{1-\mathrm{M}[u^\eta]}{1-\theta}a_\theta(u,v) =$$

$$= -\frac{\theta}{1-\theta}\mathrm{M}[v^\xi]\,A(u,v)\left\{a_\theta^0(u,v) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\,a_\theta(u,v)\right\} =$$

$$= -\frac{\theta\,\mathrm{M}[v^\xi]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa])},$$

то из (10) следует

$$-a_\theta^0(u,v)\,\Phi'_{\eta(u)}(u,v) + \frac{\Phi'_\theta(u,0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\,\Phi'_{\eta(u)}(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]} + \frac{\Phi'_\theta(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]} -$$

$$- \Phi'_\theta(0,0) - \frac{\hat{\Phi}'_0(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]} = \frac{\mathrm{M}[v^\xi(\theta^\kappa-\theta)]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa])} + L, \qquad (11)$$

где

$$L = \frac{1-\mathrm{M}[u^\eta]}{1-u}\left(\frac{\mathrm{M}[v^\xi(1-\theta^\kappa)]}{1-\theta} - \frac{\mathrm{M}[v^\xi(1-u^{\eta_\kappa})]}{1-\mathrm{M}[u^\eta]}\right)A_\theta(u,v) =$$

$$= \frac{1-\mathrm{M}[u^\eta]}{1-u}\left(\frac{1-\mathrm{M}[v^\xi\theta^\kappa]}{1-\theta} - \frac{1-\mathrm{M}[v^\xi]}{1-\theta} -\right.$$

$$\left.- \frac{1-\mathrm{M}[v^\xi u^{\eta_\kappa}]}{1-\mathrm{M}[u^\eta]} + \frac{1-\mathrm{M}[v^\xi]}{1-\mathrm{M}[u^\eta]}\right)A_\theta(u,v) =$$

$$= \frac{1-\mathrm{M}[u^\eta]}{1-u}\left(\frac{1}{(1-\theta)\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)} - \frac{1-\mathrm{M}[v^\xi]}{1-\theta}A_\theta(u,v) + \right.$$

$$\left.+ \frac{1-\mathrm{M}[v^\xi] - A^{-1}(u,v)}{1-\mathrm{M}[u^\eta]}A_\theta(u,v)\right). \qquad (12)$$

Пусть $\langle f(\theta)\rangle_+$ — часть ряда Лорана функции $f(\theta)$, которая содержит степени θ с положительными показателями. Проверяется, что

$$\left\langle \frac{1}{(1-\theta)\left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\right)}\right\rangle_+ = \frac{\theta}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[u^\eta])},$$

$$\langle A_\theta(u,v)\rangle_+ = A(u,v)\,a_\theta(u,v),$$

$$\left\langle \frac{1}{1-\theta}A_\theta(u,v)\right\rangle_+ = A(u,v)\frac{a_\theta(u,v)}{1-\theta} + A(u,v)\frac{\theta}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[u^\eta])},$$

и поэтому

$$\left[\frac{1}{1-u}(1-\mathrm{M}[v^{\xi}])\,F(v,t)\right]_{+} = \frac{1}{1-u}(1-\mathrm{M}[t^{\xi}])\,F(t,t) = \frac{1}{1-u}E^{-1}(1,t).$$

Следовательно,

$$\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,0) = \frac{1}{1-u}(1-\mathrm{M}[u^{\zeta_t}]), \tag{15}$$

где $\{\zeta_t;\ 0\le t<1\}$ — неубывающий целочисленный случайный процесс (считаем его не зависящим от случайных блужданий $\{\eta_n;\ n\ge 0\}$, $\{\xi_n\eta_n;\ n\ge 0\}$) такой, что

$$\mathrm{M}[u^{\zeta_t}] = E^{-1}(1,t)\,E(u,t).$$

Подставляя (15) в (13), получаем

$$\frac{\Phi^{t}_{\theta}(u,0)-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]\,\Phi^{t}_{\eta(u)}(u,0)}{1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]}+\frac{\Phi^{t}_{\theta}(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}-\Phi^{t}_{\theta}(0,0)-\frac{\hat{\Phi}^{t}_{0}(0,0)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}(\theta^{\kappa}-\theta)]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])}+$$

$$+\frac{1}{1-u}\left\{\frac{1}{1-\theta}-a^{0}_{\theta}(u,v)\,\mathrm{M}[u^{\zeta}_{t}]-\frac{\theta}{1-\theta}\times\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}\right\}, \tag{16}$$

$$|\theta|<1,\qquad uv=t\in[0,1),\qquad |u|,\ |v|\in[t,1].$$

Теперь имеем

$$\mathrm{M}[u^{\zeta_t}]\,a^{0}_{\theta}(u,v) = \sum_{k\ge 0}\theta^{k}\,\mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k}}u^{\zeta_t+\eta_{T_k}}] =$$

$$= \sum_{k\ge 0}\theta^{k}\,\mathrm{M}[u^{\zeta_t+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k}}t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}]+$$

$$+\sum_{k\ge 0}\theta^{k}\,\mathrm{M}[u^{\zeta_t+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k}}t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t+\eta_{T_k}\le\xi_{\sigma_k}],$$

и если $|f(u)|_+$ — правильная часть ряда Лорана (по степеням u), соответствующая функции $f(u)$, то

$$\left[\frac{1}{1-u}\mathrm{M}[u^{\zeta_t}]\,a^{0}_{\theta}(u,v)\right] = \frac{1}{1-u}\sum_{k\ge 0}\theta^{k}\,\mathrm{M}[u^{\zeta_t+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k}}t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}]+$$

$$+\frac{1}{1-u}\sum_{k\ge 0}\theta^{k}\,\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t+\eta_{T_k}\le\xi_{\sigma_k}].$$

Далее, нетрудно проверить, что

$$\frac{\theta}{1-\theta}\times\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} = \sum_{k\ge 0}\theta^{k}(1-\mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k}}])$$

и поэтому

$$\left[\frac{1}{1-u}\times\frac{\theta}{1-\theta}\times\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}\right]_{+} = \frac{1}{1-u}\sum_{k\ge 0}\theta^{k}(1-\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}}]).$$

Из приведенных соотношений и (16) следует (для $|u| \leq 1$)

$$\frac{\Phi^t_\theta(u,0) - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]\,\Phi^t_{\eta(u)}(u,0)}{1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^\eta]} = \frac{1}{1-u}\left\{\sum_{k\geq 0}\theta^k \mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}}] - \right.$$

$$- \sum_{k\geq 0}\theta^k \mathrm{M}[u^{\zeta_t + \eta_{T_k} - \xi_{\sigma_k}}\, t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}] -$$

$$\left. - \sum_{k\geq 0}\theta^k \mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t + \eta_{T_k} \leq \xi_{\sigma_k}]\right\}.$$

Полагая в этом равенстве $u = 0$, получаем

$$\Phi^t_\theta(0,0) = \sum_{k\geq 0}\theta^k \mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\ \zeta_t + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}], \tag{17}$$

а так как

$$\Phi^t_\theta(0,0) = \sum_{k\geq 0}\theta^k \mathrm{M}[t^{\tau_k^{00}},\ \tau_k^{00} < \infty],$$

то равенство (17) и завершает доказательство теоремы.

1. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О распределении максимума разности независимых процессов восстановления с дискретным временем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1426 – 1432.

Получено 27.07.98