УДК 517.944

Н. Г. Хома (Тернопіл. акад. народ. госп-ва),
П. В. Цинайко (Тернопіл. пед. ін-т)

ГЛАДКИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

A boundary-value periodic problem for quasi-linear equation $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t]$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$, $u(x+w, t) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi]$ is studied. Conditions are found under which the theorem on the uniqueness of smooth solution is true.

Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t]$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$, $u(x+w, t) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi]$. Знаходяться умови, за яких справедлива теорема єдиності гладкого розв'язку.

Встановимо умови існування гладкого розв'язку такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t], \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < \pi, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x+w, t) = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \pi]. \tag{3}$$

Позначимо через C_π простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$; через G_x — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ разом з похідною по x; а через $\mathbf{B}$ такий простір функцій двох змінних x і t:

$$\mathbf{B} = \{u: u(x, t) = -u(-x, t) = u(x+w, t) = u(x+w/2, \pi - t)\},$$

$$w = 2\pi(2p-1)/(2s-1), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2p-1, 2s-1) = 1,$$

де вираз $(k, m) = 1$ означає, що k і m — взаємно прості числа.

Припустимо, що заданий в рівнянні (1) оператор F, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C_\pi^1 \cap \mathbf{B}$) функцію $u(x, t)$ в скалярну неперервну функцію, наприклад, $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$. Для простоти доведення теореми існування і єдиності гладкого розв'язку задачі (1) – (3) будемо розглядати лише залежність його від функції u і її похідної u_t, хоча аналогічний результат можна одержати і у випадку $F = F[u, u_t, u_x]$.

Сформулюємо і доведемо теорему, необхідну для доведення наступних тверджень.

Теорема 1. *Для кожної функції* $g \in \mathbf{B} \cap C_\pi$ *справедлива рівність*

$$g(x+w/2, \pi - t) = g(x+\pi, \pi - t) = g(x, t). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $g \in \mathbf{B} \cap C_\pi$, де $(2p-1, 2s-1) = 1$, p — конкретне ціле число, s — натуральне число. Звідси випливає, що g — $2\pi/(2s-1)$-періодична функція. Запишемо значення функції $g(x+w/2, \pi - t)$ таким чином:

$$g(x+w/2, \pi - t) = g(x + \pi(2p-1)/(2s-1) - \pi + \pi, \pi - t) =$$

$$= g(x + 2\pi p/(2s-1) - 2\pi s/(2s-1) + \pi, \pi - t). \tag{5}$$

Враховуючи, що g є $2\pi/(2s-1)$-періодичною функцією, переконуємося у справедливості рівності (4), що треба було довести.

Для лінійного неоднорідного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < \pi, \tag{6}$$

в конкретно визначеному просторі функцій $\mathbf{B}$ справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо* $g \in G_x \cap \mathbf{B}$, *то функція вигляду*

$$u(x, t) = (Pg)(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi -$$

$$- \frac{1}{4}\int_t^\pi d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi \equiv \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\tau)\,d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi, \tag{7}$$

де $Q(\tau) = 1$, *коли* $0 \le \tau \le t$, $Q(\tau) = -1$, *коли* $t < \tau \le \pi$, *є єдиною функцією з простору* $C_\pi^{2,2} \cap \mathbf{B}$, *яка задовольняє умови* (6), (2), (3).

Доведення. Безпосередньо перевіркою переконуємося, що функція $u(x, t) = (Pg)(x, t)$ задовольняє рівняння (6) і умову (3). Використовуючи теорему 1, покажемо, що $(Pg)(x, 0) = (Pg)(x, \pi) = 0$. Покладаючи $x = 0$ у рівності (7), одержуємо

$$u(x, 0) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{x-\tau}^{x+\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi.$$

Знайдемо похідну $u'(x, 0)$. Маємо

$$u'(x, 0) = \frac{1}{4}\int_0^\pi g(x+\tau, \tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(x-\tau, \tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Проводячи заміну змінної $\tau = \pi - y$ у першому інтегралі рівності (8) і враховуючи, що $g(\pi + x, \pi - t) = g(x, t)$, записуємо

$$u'(x, 0) = -\frac{1}{4}\int_\pi^0 g(x+\pi-y, \pi-y)\,dy - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(x-\tau, \tau)\,d\tau = 0,$$

а це означає, що $u(x, 0) = (Pg)(x, 0) = \mathrm{const}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки функція $g(x, t)$ непарна по x, то

$$u(0, 0) = (Pg)(0, 0) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{-\tau}^{\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi = 0.$$

Отже, отримуємо, що $(Pg)(x, 0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Проводячи аналогічні міркування, одержуємо, що $(Pg)(x, \pi) = 0$, тобто функція $u(x, t) = (Pg)(x, t)$ задовольняє умову (2).

Тепер покажемо, що оператор P переводить простір $\mathbf{B}$ сам у себе. Для цього перевіримо виконання умови $(Pg)(x + w/2, \pi - t) = (Pg)(x, t)$, або, виходячи з теореми 1, виконання умови $(Pg)(x + \pi, \pi - t) = (Pg)(x, t)$. На основі визначення (7) оператора P маємо

$$(Pg)(x+\pi, \pi-t) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi-t} d\tau \int_{x+t+\tau}^{x+2\pi-t-\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{\pi-t}^{\pi} d\tau \int_{x+t+\tau}^{x+2\pi-t-\tau} g(\xi, \tau)\,d\xi.$$

Проводячи спочатку заміну змінної $\tau = \pi - y$, а потім $\xi = z + \pi$ в останній рівності, одержуємо

$$(Pg)(x+\pi, \pi - t) = \frac{1}{4}\int_t^{\pi} dy \int_{x+t-y}^{x-t+y} g(\pi + z, \pi - y)\,dz -$$

$$- \frac{1}{4}\int_0^{t} dy \int_{x+t-y}^{x-t+y} g(\pi + z, \pi - y)\,dz = \frac{1}{4}\int_0^{t} dy \int_{x-t+y}^{x+t-y} g(z, y)\,dz -$$

$$- \frac{1}{4}\int_t^{\pi} dy \int_{x-t+y}^{x+t-y} g(z, y)\,dz = (Pg)(x, t).$$

Аналогічно перевіряється виконання умови $(Pg)(-x, t) = -(Pg)(x, t)$.

Для доведення єдиності неперервного (класичного) розв'язку крайової періодичної задачі (6), (2), (3) потрібно показати, що однорідна крайова періодична задача

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, \quad u^0(x, 0) = u^0(x, \pi) = 0, \tag{9}$$

$$u^0(x+w, t) = u^0(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \pi], \tag{10}$$

в просторі функцій $\mathbf{B}$ має лише тривіальний розв'язок.

З (9) випливає, що

$$u^0(x, t) = s(x+t) - s(x-t) \tag{11}$$

для довільної функції $s \in C^2(\mathbb{R})$, періодичної з періодом 2π.

Згідно з (10) маємо, що $s(x+w) = s(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $w = 2\pi r/m$, $(r, m) = 1$, де $r = 2p - 1$, $m = 2q - 1$, то одержуємо, що функція s періодична навіть з періодом $2\pi/m$, тобто

$$s(x + 2\pi/m) = s(x). \tag{12}$$

Нехай тепер $u^0 \in \mathbf{B}$. Тоді із $u^0 \in \mathbf{B}$ випливає, що $u^0(x + w/2, \pi - t) = u^0(x, t)$ або, враховуючи (11), маємо

$$s(x + w/2 + \pi - t) - s(x + w/2 - \pi + t) = s(x+t) - s(x-t).$$

Звідси одержуємо, що

$$s(x + \pi + w/2 - t) + s(x - t) = s(x - \pi + w/2 + t) + s(x + t),$$

або

$$s(x + \pi + w/2 - t) + s(x - t) = s(x + \pi + w/2 + t) + s(x + t).$$

Остання рівність можлива лише за умови

$$s(x + \pi + w/2) + s(x) = 0. \tag{13}$$

Підставляючи у вираз (13) $x + k(\pi + w/2)$ замість x, одержуємо

$$s(x + (k+1)(\pi + w/2)) + s(x + k(\pi + w/2)) = 0. \tag{14}$$

Помноживши рівність (14) на $(-1)^k$ і просумувавши по $k = \overline{0, r-1}$, знаходимо

$$\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\left(s(x+(k+1)(\pi+w/2))+s(x+k(\pi+w/2))\right) = 0,$$

що рівносильно

$$(-1)^{r-1}s(x+r(\pi+w/2)) + s(x) = 0. \tag{15}$$

Оскільки $w=2\pi r/m$, r і m — непарні і $\pi r = wm/2$, то

$$s(x+r(\pi+w/2)) = s(x+(r+m)w/2) = s(x).$$

Звідси на основі (15) отримуємо, що при $u^0 \in \mathbf{B}$ $s \equiv 0$, а це означає, що розв'язок задачі (9), (10) — тривіальний, тобто $u^0(x,t) \equiv 0$. Отже, розв'язок задачі (6), (2), (3) єдиний.

Теорему 2 доведено.

По аналогії з лінійною задачею (6), (2), (3) і записом її розв'язку (7) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь [1]:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left(PF[u,u_t]\right)(x,t), \\ u_t(x,t) &= \left(PF[u,u_t]\right)_t(x,t), \\ u_x(x,t) &= \left(PF[u,u_t]\right)_x(x,t). \end{aligned} \tag{16}$$

Означення. *Неперервний розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi \cap \mathbf{B}$ *системи інтегральних рівнянь* (16) *будемо називати гладким розв'язком крайової* w*-періодичної задачі* (1) – (3).

Якщо ввести таке позначення норми функції $g(x,t)$:

$$\|g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|;\ x\in\mathbb{R},\ 0\le t\le\pi\},$$

то, використовуючи інтегральне зображення (7) розв'язку $u=Pg$ лінійної задачі (6), (2), (3), на основі теореми 2 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай* $g\in C_\pi\cap\mathbf{B}$. *Тоді лінійна задача* (6), (2), (3) *має єдиний гладкий розв'язок* $u=Pg\in\mathbf{B}\cap C_\pi^{1,1}$, *для якого справедливі оцінки*

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{C_\pi} &\le \frac{\pi^2}{4}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \\ \|u_t(x,t)\|_{C_\pi} &\le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \\ \|u_x(x,t)\|_{C_\pi} &\le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}. \end{aligned} \tag{17}$$

Доведення. Оскільки $g\in C_\pi\cap\mathbf{B}$, то за теоремою 2 задача (6), (2), (3) має єдиний неперервно диференційований розв'язок.

Перейдемо до встановлення оцінок (17). На основі (7) маємо

$$4|(Pg)(x,t)| \le \left|\int_0^\pi |Q(\tau)|d\tau\left|\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|g(\xi,\tau)|d\xi\right|\right| \le$$

$$\le \|g(x,t)\|_{C_\pi}\left|\int_0^\pi d\tau\left|\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}d\xi\right|\right| = 2\|g(x,t)\|_{C_\pi}\left|\int_0^\pi|t-\tau|d\tau\right| =$$

$$= \|g(x,t)\|_{C_\pi}\left(2t^2+\pi^2-2\pi t\right) \le \pi^2\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

Звідси отримуємо першу оцінку (17). Аналогічно одержується друга і третя оцінки (17) для похідних u_t і u_x, що і доводить теорему 3.

Сформулюємо тепер подібне твердження для нелінійної задачі (1) – (3).

Теорема 4. *Нехай скалярна функція* $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ *задовольняє такі умови*:

1) $f \in C\left(\mathbb{R} \times [0, \pi] \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty\right)$;

2) $0 < \|F[0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'', u_t''](x, t) - F[u', u_t'](x, t)| \le N_1 |u'' - u'| + N_2 |u_t'' - u_t'|$;

4) $F[0, 0](x, t) \in \mathbf{B}$;

5) *для всіх* $u \in \mathbf{B} \cap C_\pi^1$ *функція* $F[u, u_t](x, t) \in \mathbf{B} \cap C_\pi$.

Тоді за умови

$$\frac{\pi^2}{4} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2 < 1$$

задача (1) – (3) *має единий гладкий розв'язок* $u(x, t) \in \mathbf{B} \cap C_\pi^1$.

Зауваження. Замість вимоги, щоб скалярна функція $f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ була визначена для значень $0 \le t \le \pi$ і всіх (x, u, u_t), достатньо припустити, щоб F була визначена для $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le \pi$, $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le 2L/\pi$, де L задовольняє нерівність

$$\frac{\pi^2 \Gamma}{4} < L\left(1 - \left(\frac{\pi^2}{4} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2\right)\right)$$

або просто

$$\frac{\pi^2}{4} M \le L,$$

якщо $M = \|F[u, u_t](x, t)\|_{C_\pi}$ для всіх $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le 2L/\pi$.

Доведення теореми 4 і зауваження аналогічне доведенню теореми 3 і зауваженню роботи [2].

1. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
2. *Хома Н. Г.* Існування гладкого розв'язку однієї крайової задачі // Там же. – № 12. – С. 1717–1719.

Одержано 09.04.97