УДК 517.956

Г. І. Берегова, В. М. Кирилич (Львів. держ. ун-т ім. І. Франка)

ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

The problem with unknown boundaries are considered for a semilinear hyperbolic system of first order equations in the case where a line of determination of initial conditions degenerates into a point. Integral boundary conditions are determined. The theorem on existence and uniqueness of a classical solution of the problem is proved for small t.

Розглядається задача з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку у випадку виродження в точку лінії задання початкових умов, задаються інтегральні граничні умови. Доводиться теорема існування та єдиності класичного розв'язку задачі для малих t.

Для параболічних та еліптичних рівнянь задачі Стефана вивчаються давно. Детальний аналіз цієї проблематики наведено в роботі І. І. Данилюка [1].

Багато математичних моделей проблем газо- та гідродинаміки, теплопровідності зводяться до розв'язання задач з невідомими границями для гіперболічних рівнянь та систем [2–9].

В даній статті розглядається задача з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку у випадку виродження в точку лінії задання початкових умов, задаються нелокальні (інтегральні) граничні умови. При дослідженні коректної розв'язності задачі використовується методика робіт [2, 10].

Деякі варіанти гіперболічних задач Стефана розглядались в роботах [2–9].

1. Формулювання задачі. В області $G_t := \{(x, t)\colon t \in \mathbb{R}_+,\ a_1(t) \le x \le a_2(t),\ a_1(0) = a_2(0) = 0\}$, де функції $a_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ $(k = 1, 2)$ є наперед невідомими, розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t; u), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Припускаємо, що виконуються умови

$$\lambda_i(0,0) - a_l'(0) > 0, \qquad i = \overline{1, p}, \tag{2}$$

$$\lambda_i(0,0) - a_l'(0) < 0, \qquad i = \overline{p+1, n}, \quad l = 1, 2. \tag{3}$$

Звідси, зокрема, випливає, що жодна з характеристик, які виходять з точки $(0, 0)$, не потрапляє до області G_t.

Розглянемо наступну задачу: для деякого $\varepsilon > 0$ знайти функції $a_1(t)$, $a_2(t) \in C^1([0, \varepsilon])$ і у відповідній області $G_\varepsilon := \{(x, t)\colon t \in [0, \varepsilon],\ a_1(t) \le x \le a_2(t),\ a_1(0) = a_2(0) = 0\}$, — розв'язок $u_i(x, t) \in C^1(G_\varepsilon)$ $(i = \overline{1, n})$ системи (1) так, щоб для всіх $t \in [0, \varepsilon]$ задовольнялись умови

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \alpha_{ki}(y,t)u_i(y,t)\,dy = H_k(t), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{4}$$

де $\alpha_{ki}(y, t)$, $H_k(t)$ — задані функції, причому $H_k(0) = 0$; а також додаткові умови на невідомі границі

$$a_k'(t) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \gamma_{ik}^r(a(\tau),\tau)u_i(a_r(\tau),\tau)\,d\tau + h_k(a(t),t), \qquad k = 1, 2, \tag{5}$$

де $\gamma_{ik}^r(a(t), t) = \gamma_{ik}^r(a_1(t), a_2(t), t)$, $h_k(a(t), t) = h_k(a_1(t), a_2(t), t)$ — визначені функції, причому $h_1(0, 0) \neq h_2(0, 0)$, $|h_k(0, 0)| < 1$.

2. Допоміжні твердження. Нехай для кожного $k = 1, 2$

$$\alpha^k(t) = [\alpha_{lj}^k(t)]_{l,j=1}^n,$$

де

$$\alpha_{lj}^k(t) = \alpha_{lj}(a_k(t), t), \qquad l = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p};$$

$$\alpha_{lj}^k(t) = \alpha_{lj}(a_{3-k}(t), t), \qquad l = \overline{1, n}, \quad j = \overline{p+1, n}.$$

Припускаємо, що

$$\det \alpha^1(t) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Крім того, припустимо, що виконуються умови:

1) для деякого $\varepsilon_0 > 0$ $\lambda_i(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0])$ і задовольняють (2), (3);

2) $f_i(x, t; u) \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0] \times \mathbb{R}^n)$;

3) функції $\alpha_{ki}(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0])$, $H_k(t) \in C^2([0, \varepsilon_0])$;

4) $\gamma_{ik}^r(z, t) \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon_0])$, $h_k(z, t) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon_0])$ і задовольняють умову Ліпшиця по першій змінній зі сталими L_γ, L_h відповідно.

З (2), (3), (4) випливає, що $\lambda_i(0, 0) \neq h_k(0, 0)$ $(i = \overline{1, n},\ k = 1, 2)$. Продиференціюємо (4) по t і покладемо $t = 0$. Тоді, враховуючи (5), отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ki}(0, 0)(h_2(0, 0) - h_1(0, 0))u_i(0, 0) = H_k'(0), \qquad k = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Оскільки виконується умова (6), то система (7) має єдиний розв'язок $u_i(0, 0)$.

Введемо також допоміжні функції

$$u_i(a_1(t), t) = \mu_i(t), \qquad i = \overline{1, p}, \tag{8}$$

$$u_i(a_2(t), t) = \nu_i(t), \qquad i = \overline{p+1, n}. \tag{9}$$

3. Існування та єдиність розв'язку. Має місце наступне твердження.

Теорема. *Якщо виконуються всі вищезгадані припущення, то існує таке* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *що задача* (1)–(5) *має єдиний розв'язок* $u_i(x, t) \in C^1(G_\varepsilon)$, $a_1(t)$, $a_2(t) \in C^1([0, \varepsilon])$.

Схема доведення. Нехай $[C[0, \varepsilon_0]]^2$ — простір неперервних на $[0, \varepsilon_0]$ вектор-функцій. В $[C[0, \varepsilon_0]]^2$ введемо множину

$$Q_{\varepsilon_0} := \{a(t) = (a_1(t), a_2(t)) : a(t) \in [C^1[0, \varepsilon_0]]^2,$$
$$|a_k(t)| \leq 2\varepsilon_0,\ 0 \leq t \leq \varepsilon_0,\ k = 1, 2\}$$

з метрикою

$$\rho(a^1(t), a^2(t)) = \sum_{k=1}^2 \max_t |a_k^1(t) - a_k^2(t)|.$$

Для кожної фіксованої вектор-функції $a(t) \in Q_{\varepsilon_0}$ маємо задачу (1)–(4).

Нехай $\varphi_i(\tau; x, t)$ — розв'язок задачі Коші $d\xi / d\tau = \lambda_i(\xi, \tau)$, $\varphi_i(t; \xi, \tau) = x$, $i = \overline{1, n}$. Очевидно, що для малих t

$$h_k(a(t), t) \neq \lambda_i(a_k(t), t), \quad k = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Інтегруючи (1) вздовж характеристик, приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x, t) = \omega_i(x, t) + \int\limits_{t_i(x, t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau; u)\, d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad (x, t) \in G_t, \tag{11}$$

де

$$t_i(x, t) := \min\{\tau\colon (\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \in G_t\},$$

$$\omega_i(x, t) = \begin{cases} \mu_i(t_i(x, t)) & \text{при } \varphi_i(t_i(x, t); x, t) = a_1(t_i(x, t)) \text{ або } x = t = 0, \\ \nu_i(t_i(x, t)) & \text{при } \varphi_i(t_i(x, t); x, t) = a_2(t_i(x, t)) \text{ або } x = t = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Підставимо (11) в (4) і проведемо деякі перетворення: в однократних інтегралах лівих частин отриманих рівностей від змінної інтегрування x перейдемо до змінної τ шляхом заміни $\tau = t_i(x, t)$; в подвійних інтегралах поміняємо порядок інтегрування і зробимо заміну змінних $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$. Після цього всі рівності диференціюємо по t. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p} \alpha_{pi}(a_1(t), t)(\lambda_i(a_1(t), t) - a_1'(t))\mu_i(t) - \\
&- \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_{pi}(a_2(t), t)(\lambda_i(a_2(t), t) - a_2'(t))\nu_i(t) = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \alpha_{pi}(a_2(t), t)(\lambda_i(a_2(t), t) - a_2'(t))\mu_i(t_i(a_2(t), t)) - \\
&- \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_{pi}(a_1(t), t)(\lambda_i(a_1(t), t) - a_1'(t))\nu_i(t_i(a_1(t), t)) - \\
&- \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{t_i(a_2(t), t)}^{t} R_{ik}^{-}(\tau, t)\mu_i(\tau)\, d\tau + \sum_{i=p+1}^{n} \int\limits_{t_i(a_1(t), t)}^{t} R_{ik}^{+}(\tau, t)\nu_i(\tau)\, d\tau + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \int\limits_{\psi_i(t)}^{t} d\tau \int\limits_{\chi_i^1(\tau, t)}^{\chi_i^2(\tau, t)} Q_{ik}(\xi, \tau, t) f_i(\xi, \tau, u)\, d\xi + H_k'(t), \quad k = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\psi_i(t) = \begin{cases} t_i(a_2(t), t), & i = \overline{1, p}, \\ t_i(a_1(t), t), & i = \overline{p+1, n}, \end{cases}$$

$$\chi_i^1(\tau, t) = \begin{cases} a_1(\tau), & i = \overline{1, p}, \\ \varphi_i(\tau; a_1(t), t), & i = \overline{p+1, n}, \end{cases}$$

$$\chi_i^2(\tau, t) = \begin{cases} \varphi_i(\tau; a_2(t), t), & i = \overline{1, p}, \\ a_2(\tau), & i = \overline{p+1, n}, \end{cases}$$

$R_{ik}^{\pm}$, Q_{ik} — відомі величини, побудовані з коефіцієнтів та вільних членів систем (1), (4) [10].

Для знаходження функцій μ_i, ν_i перепишемо систему (13) в операторній формі

$$A\sigma(t) = [B(P\sigma)](t) + (K\sigma)(t) + (Lu)(t) + H'(t), \tag{14}$$

де $\sigma(t) = \mathrm{col}\,(\mu_1(t), \ldots, \mu_p(t), \nu_{p+1}(t), \ldots, \nu_n(t))$;

$$A(t) = \alpha^1(t)\Lambda_1(t), \quad B(t) = \alpha^2(t)\Lambda_2(t),$$

$$\Lambda_l(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(a_l(t), t) - a_l'(t), \ldots, \lambda_p(a_l(t), t) - a_l'(t),$$

$$-(\lambda_{p+1}(a_{3-l}(t), t) - a_{3-l}'(t)), \ldots, -(\lambda_n(a_{3-l}(t), t) - a_{3-l}'(t))\}, \quad l = 1, 2;$$

K — лінійний матричний інтегральний оператор типу Вольтерра з неперервно диференційовними ядрами; L — нелінійний матричний інтегральний оператор типу Вольтерра, елементи якого мають неперервно диференційовні ядра, що діють на вектор-функцію f з компонентами $f_i(x, t; u)$; H' — n-вимірний вектор-стовпчик з компонентами $H_k'(t)$; P — оператор зсуву, який діє за формулами:

$$(P\sigma)(t) = \mu_i(t_i(a_2(t), t)), \quad i = \overline{1, p},$$

$$(P\sigma)(t) = \nu_i(t_i(a_1(t), t)), \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Оскільки $0 \le t_i(a_l(t), t) \le t$, $l = 1, 2$, $i = \overline{1, n}$, то оператор P переводить елементи простору $[C[0, \varepsilon_0]]^n$ в елементи цього ж простору. Зокрема, з того, що виконуються нерівності

$$\max_t |(P\sigma)_l(t)| \le \max_t |\sigma_l(t)|, \quad l = \overline{1, n},$$

які при $\sigma_l(t) \equiv \mathrm{const}$ перетворюються в рівності, випливає, що норма оператора P дорівнює 1.

З умов (2), (3) та (6) отримаємо, що для малих t $\det A(t) \ne 0$, тому (14) перепишемо у вигляді

$$\sigma(t) = [A^{-1}B(P\sigma)](t) + [A^{-1}K\sigma](t) + [A^{-1}Lu](t) + [A^{-1}H'](t)$$

і позначимо $[M\sigma](t) = [A^{-1}B(P\sigma)](t)$. Оскільки $\alpha^1(0) = \alpha^2(0)$, $P(0) = I$, $|\Lambda_1(0)\Lambda_2(0)| < 1$, то $|M(0)| < 1$ і тому для деякого $\beta_1 \in (0, \varepsilon_0]$ $|M(t)| < 1$ при $t \in [0, \beta_1]$. Отже, існує $(I - M)^{-1}$. Тоді

$$\sigma(t) = [(I - M)^{-1}A^{-1}(K\sigma + H')](t) + [(I - M)^{-1}A^{-1}Lu](t).$$

З того, що K — інтегральний оператор типу Вольтерра, випливає, що його норма при досить малому $\beta_1 > 0$ теж як завгодно мала. Отже,

$$\sigma(t) = [L_0 Lu](t) + [L_0 H'](t), \tag{15}$$

$$L_0 = (I - (I - M)^{-1}A^{-1}K)^{-1}(I - M)^{-1}A^{-1}..$$

З іншого боку, система рівнянь (11) має вигляд

$$u(x, t) = [Q\sigma](x, t) + [L_1 u](x, t), \tag{16}$$

де Q — оператор зсуву, аналогічний до оператора P, а L_1 — нелінійний інтегральний оператор типу Вольтерра. Підставимо (15) в (16). Отримаємо

$$u(x, t) = [QL_0 H'](x, t) + [QL_0 Lu](x, t) + [L_1 u](x, t). \tag{17}$$

Отже, маємо рівняння, яке відповідає системі (11), але вже не містить функцій μ_i та ν_i.

Виберемо C таке, що $|\sigma(0)| < C$. Тоді для достатньо малого $\beta_2 \in (0, \varepsilon_0]$ оператор Bu, який визначається правою частиною формули (17), відображає кулю $S_{\beta_2} = \{u : \|u\| \leq C\}$ в себе. Дійсно, візьмемо β_2 настільки малим, щоб $|QL_0L + L_1| + |Q(I - (I - M)^{-1}K)^{-1}| \leq 1$ (це можливо тому, що L, L_1, K — оператори типу Вольтерра, $\|Q\| = 1$). Тоді

$$\|Bu\| \leq |QL_0L + L_1|C + |Q(I - (I - M)^{-1}K)^{-1}|C \leq C.$$

Отже, $BS_{\beta_2} \subset S_{\beta_2}$.

Оскільки функції $f_i(x, t; u)$ $(i = \overline{1, n})$ в $(\mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0] \times \mathbb{R}^n)$ задовольняють умову Ліпшиця по u, а L та L_1 вольтеррівські, то для достатньо малого $\beta_3 \in (0, \varepsilon_0]$ оператор B задовольняє по u умову Ліпшиця з як завгодно малою константою, тобто є стиском. Тому за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка. Отже, для кожної вектор-функції $a(t) \in Q_{\varepsilon_1}$, де $\varepsilon_1 = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, ми знайшли єдиний неперервний розв'язок $u(x, t)$.

Доведемо існування неперервно диференційовного розв'язку. Для цього формально продиференціюємо (11) по x і t, позначимо $v_i^1(x, t) = \dfrac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}$, $v_i^2(x, t) = \dfrac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}$ $(i = \overline{1, n})$ і запишемо результат в операторній формі

$$\begin{aligned} v^1(x, t) &= [QT^1\sigma'](x, t) + \Psi^1(x, t, u) + [F^1u](x, t) + [N^1v^1](x, t), \\ v^2(x, t) &= [QT^2\sigma'](x, t) + \Psi^2(x, t, u) + [F^2u](x, t) + [N^2v^2](x, t), \end{aligned} \tag{18}$$

де T^i — діагональні матриці з обмеженими елементами, Ψ^i — величини, побудовані з відомих неперервних вектор-функцій, F^i, N^i — нелінійні інтегральні оператори типу Вольтерра.

Продиференціювавши (формально) (13) і враховуючи те, що при достатньо малому $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ справедливі нерівності [11]

$$0 < \frac{dt_i(a_2(t), t)}{dt} < 1, \quad i = \overline{1, p},$$

$$0 < \frac{dt_i(a_1(t), t)}{dt} < 1, \quad i = \overline{p+1, n}, \qquad t \in [0, \varepsilon_2],$$

знайдемо функції $\mu_i'(t)$, $\nu_i'(t)$ і підставимо результат в (18).

Отримана система операторних рівнянь відносно $v^1(x, t)$ та $v^2(x, t)$ подібна до (17). Тому шляхом аналогічних міркувань можна переконатись, що в області G_{ε_2} існують єдині неперервні функції $v^1(x, t)$ та $v^2(x, t)$.

Отже, для кожної вектор-функції $a(t) \in Q_{\varepsilon_3}$, де $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, ми знайшли відповідний класичний розв'язок задачі (1)–(4) в області G_{ε_3}. Позначимо цей розв'язок через $U(x, t; a)$. Залишається лише із всієї множини припустимих вектор-функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконуються умови (5).

Для кожного $i = \overline{1, n}$ залежність $U_i(a(t), t; a)$ в метриці рівномірного відхилення від a як елемента $[C[0, \varepsilon_4]]^2$, $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_0]$ задовольняє умову Ліпшиця: $\exists L_u \geq 0$, $\forall a^1, a^2 \in Q_{\varepsilon_4}$:

$$\max_{0 \leq t \leq \varepsilon_4} |U_i(a_r^1(t), t; a^1) - U_i(a_r^2(t), t; a^2)| \leq$$

$$\leq L_u \max_{0 \leq t \leq \varepsilon_4} |a^1(t) - a^2(t)|, \qquad r = 1, 2. \tag{19}$$

Щоб перевірити співвідношення (19), зауважимо, що з (17) та (18) можна одержати апріорні оцінки для розв'язку та його похідних через задані функції, з яких, зокрема, випливає, що

$$|U_i(x,t;a)| \le U_0 \text{ — const}, \quad |U'_{ix}(x,t;a)| \le U_1 \text{ — const},$$
$$|U'_{it}(x,t;a)| \le U_2 \text{ — const} \quad (i=\overline{1,n}, \quad (x,t)\in \overline{G}_{\varepsilon_4}, \quad a \in Q_{\varepsilon_4}).$$

Оскільки всі оператори в (17) та (18), які розглядаються на функціях U_i і на слідах цих функцій на лініях $x = a_r(t)$ $(r = 1, 2)$, задовольняють по $a(t)$ умову Ліпшиця, то залежність розв'язку рівнянь типу Вольтерра (17), (18) від функціонального параметру a задовольняє умову Ліпшиця, звідки і випливає (19).

Виберемо $\varepsilon_4 > 0$ настільки малим, щоб виконувались умови

$$\varepsilon_4 < \min\left\{\frac{1}{n\Gamma U_0}, \frac{1}{2nL_u + 2nU_0L_\gamma}, \frac{1}{2L_h+1}\right\}.$$

Тут Γ — стала, яка обмежує неперервну функцію $\gamma^r_{ki}(x,t)$.

Розглянемо на Q_{ε_4} оператор $D\colon a \to Da$, який діє за формулою

$$(Da)_k(t) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \gamma^r_{ik}(a(\eta),\eta)\,U_i(a_r(\eta),\eta;a)\,d\eta \; +$$
$$+ \int_0^t h_k(a(\tau),\tau)\,d\tau, \qquad k=1,2.$$

Оператор D відображає Q_{ε_4} в себе і в метриці $[C[0,\varepsilon_4]]^2$ є стиском. Тому з теореми Банаха випливає існування та єдиність нерухомої точки оператора, тобто $a(t)$. Далі беремо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ і за відомою вже вектор-функцією $a(t)$ вибираємо відповідний єдиний розв'язок $u(x,t) = U(x,t;a)$ з області G_ε.

Теорему доведено.

1. *Данилюк И. И.* Задача Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **4**, № 5. – С. 133–185.
2. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 497–501.
3. *Тахиров Ж. О.* Двухфазная задача с неизвестными границами для гиперболической системы уравнений первого порядка // Узб. мат. журн. – 1991. – № 6. – С. 48–56.
4. *Летавин М. И.* О корректности постановки одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 8. – С. 1395–1402.
5. *Schaeffer D. G., Shearer M.* Un loading near a shear band: A free boundary problem for the wave equation // Commun. Part. Differ. Equat. – 1993. – № 7–8. – P. 1271–1298.
6. *Wang Jun Yu, Jiang Lie Lu, Xian Rui.* A free boundary problem for one-dimensional equations of a viscous gas // Chinese Ann. Math. Ser. B. – 1993. – **14**, № 4. – P. 411–418.
7. *Джураев Т. Д., Тахиров Ж. О.* Гиперболическая задача Стефана // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 5. – С. 821–831.
8. *Ou B.* Global solutions to a free boundary problem // Commun. Part. Differ. Equat. – 1994. – № 3–4. – 369 p.
9. *Ta-tsien Li.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. – New York, 1994. – 315 p.
10. *Мельник З. О., Кирилич В. М.* Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 722–727.
11. *Мельник З. О.* Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 6. – С. 1096–1104.

Одержано 22.04.96