УДК 517.98

Ю. С. Мишура, А. С. Лаврентьев (Киев. ун-т)

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЯДЕР

We solve the problem of construction of two-parameter family of kernels $(V_{\bar{p}},\ p \in R_+^2)$ which corresponds to either multiplicative or coordinatewise two-parameter semigroup. The construction is carried out on the basis of "initial family of kernels".

Розв'язано задачу побудови двопараметричної сім'ї ядер $(V_{\bar{p}},\ p \in R_+^2)$, що відповідає мультиплікативній або покоординатній двопараметричній півгрупі, за „початковою сім'єю ядер".

Пусть (E, E) — измеримое пространство. Напомним, что ядром на (E, E) называется отображение $V = V(x, A)\colon E \times \mathrm{E} \to R_+ = [0, \infty]$, удовлетворяющее условиям:

1) для любого фиксированного $A \in \mathrm{E}$ отображение $V(\cdot, A)\colon E \to R_+$ E-измеримо;

2) для любого фиксированного $x \in E$ $V(x, \cdot)$ — мера на E.

Ядро V называется собственным, если $E = \bigcup_n E_n$ и $V(\cdot, E_n)$ — ограниченные функции. Если же $V(x, E) \le 1$ для всех $x \in E$, то ядро V называется субмарковским. Далее рассматриваем только собственные ядра.

Напомним также определения, связанные с полугруппами ядер и резольвентами. Семейство ядер $\{T_t, t \in R_+\}$ называется полугруппой, если $T_{t+s} = T_t T_s$ для всех s, $t \in R_+$. Семейство ядер $\{V_p, p > 0\}$ называется резольвентой, если $V_p V_q = V_q V_p$ и $V_p - V_q = (q-p) V_p V_q$, p, $q > 0$. Ядро V_0, определяемое своим действием на положительную измеримую функцию f как

$$V_0 f = \sup_p V_p f = \lim_{p \to 0} V_p f \qquad \left(V_p f = \int f(y) V_p(x, dy)\right),$$

имеет [1] следующие свойства: $V_0 V_p = V_p V_0$, $V_0 - V_p = p V_0 V_p$, $p > 0$. В частности, семейство ядер

$$V_p(x, A) = \int_0^\infty \exp(-pt) T_t(x, A)\, dt, \qquad p \ge 0,$$

где T_t — измеримая полугруппа, является резольвентой (полугруппы T_t); ядро V_0 называется потенциалом (полугруппы T_t).

Классическая задача продолжения для ядер рассмотрена в [1, 2].

Ядро V удовлетворяет полному принципу максимума (ППМ), если для любого $a \ge 0$ и любых неотрицательных измеримых функций f и g из неравенства $a + Vf(x) \ge Vg(x)$ для любого x такого, что $g(x) > 0$, следует, что $a + f(x) \ge g(x)$ для любого $x \in E$.

Основной результат сформулируем так: пусть V — ядро, удовлетворяющее ППМ, причем $V1$ — ограниченная функция. Тогда существует субмарковская резольвента $(V_p,\ p > 0)$ такая, что $V_0 = V$. Если, кроме того, резольвента $(V_p,\ p > 0)$ сильно непрерывна, т. е. $\lim_{p \to \infty} p V_p = I$ (единичное ядро), то существует единственная непрерывная субмарковская полугруппа ядер $(T_t,\ t \ge 0)$, резольвентой которой является $(V_p,\ p > 0)$.

Поставим теперь аналогичную задачу о продолжении для двупараметрического случая. Пусть на некотором „начальном" подмножестве $A \subset R_+^2$ задано семейство ядер $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} = (p_1, p_2) \in A)$. Требуется построить семейство ядер $(\tilde{V}_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ так, чтобы $\tilde{V}_{\overline{p}} = V_{\overline{p}}$, $\overline{p} \in A$ и $(\tilde{V}_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ было резольвентой некоторой двупараметрической полугруппы. Дадим соответствующие определения. Обозначим $\partial R_+^2 = \{(0, t), t \ge 0\} \cup \{(s, 0), s \ge 0\}$.

***Определение* 1.** *Семейство ядер* $(T_{\bar{t}},\ \bar{t} \in R_+^2)$ *называется:*

1) *мультипликативной полугруппой, если* $T_{\bar{0}} = I$ *и* $T_{\bar{s}} T_{\bar{t}} = T_{\bar{s}+\bar{t}}$ *для всех* $\bar{s}$, $\bar{t} \in R_+^2$;

2) *покоординатной полугруппой, если* $T_{\bar{t}} = I$, $t \in \partial R_+^2$ *и* $T_{(s_1, t_2)} T_{\bar{s}} = T_{(s_1, s_2 + t_2)}$, $T_{(t_1, s_2)} T_{\bar{s}} = T_{(t_1 + s_1, s_2)}$ *для всех* s_1, s_2, t_1, $t_2 \ge 0$.

***Замечание* 1.** В монографии [3] показано, что мультипликативная полугруппа $T_{\bar{t}}$ распадается в произведение двух однопараметрических полугрупп; $T_{\bar{t}} = T_{t_1}^1 T_{t_2}^2$, где $T_{t_1}^1 = T_{(t_1, 0)}$, $T_{t_2}^2 = T_{(0, t_2)}$. В [4] показано, что покоординатная C_0-полугруппа представима в виде $T_{\bar{t}} = \tilde{T}_{t_1 t_2}$, где $(\tilde{T}_t,\ t \ge 0)$ — обычная C_0-полугруппа.

***Определение* 2.** *Семейство ядер* $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ *называется резольвентой двупараметрической полугруппы ядер* $(T_{\bar{t}},\ \bar{t} \in R_+^2)$, *если*

$$V_{\overline{p}}(x, A) = \int\limits_{R_+^2} \exp(-p_1 t_1 - p_2 t_2) T_{\bar{t}}(x, A)\, d\bar{t} \qquad (d\bar{t} = dt_1\, dt_2,\ x \in E,\ A \in \mathrm{E}).$$

***Замечание* 2.** а) Если полугруппа $(T_{\bar{t}},\ \bar{t} \in R_+^2)$ мультипликативна, то ее резольвента в силу замечания 1 представима в виде композиции $V_{\overline{p}} = V_{p_1}^1 V_{p_2}^2$, где

$$V_{p_i}^i(x, A) = \int\limits_{R_+} \exp(-p_i t_i) T_{t_i}^i(x, A)\, dt_i .$$

В этом случае согласно [1] ядра V_0^i, $i = 1, 2$, удовлетворяют ППМ.

б) Если полугруппа $(T_{\bar{t}},\ \bar{t} \in R_+^2)$ — покоординатная C_0-полугруппа, то с учетом замечания 1

$$V_{\overline{p}}(x, A) = \int\limits_{R_+^2} \exp(-p_1 t_1 - p_2 t_2) \tilde{T}_{t_1 t_2}(x, A)\, d\bar{t} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \exp(-p_1 t_1) \frac{1}{t_1} \left(\int\limits_0^\infty \exp(-p_2 t_2 / t_1) \tilde{T}_{t_2}\, dt_2 \right) dt_1 =$$

$$= \int\limits_0^\infty \exp(-p_1 t_1) \frac{1}{t_1} \tilde{V}_{p_2 / t_1}\, dt_1 = \int\limits_0^\infty \exp(-p_2 t_2) \frac{1}{t_2} \tilde{V}_{p_1 / t_2}\, dt_2 ,$$

где $V_{\overline{p}}$ — резольвента полугруппы $\tilde{T}_t$. Очевидно, в этом случае

$$V_{(0, p_2)} = V_{(p_1, 0)} = V_{\bar{0}} = +\infty \quad \text{для всех} \quad p_1 > 0,\ p_2 > 0 .$$

Учитывая замечания 2, дадим следующее определение резольвенты.

***Определение* 3.** 1) *Семейство ядер* $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ *называется мультипликативной резольвентой, если* $V_{\overline{p}}$ *представимо в виде композиции двух резольвент* $V_{\overline{p}} = V_{p_1}^1 V_{p_2}^2 = V_{p_2}^2 V_{p_1}^1$. *Если резольвенты* V_p^i *— субмарковские, то* $V_{\overline{p}}$ *называется субмарковской резольвентой, если* V_p^i *сильно непрерывны, то* $V_{\overline{p}}$ *называется сильно непрерывной.*

2) *Семейство ядер* $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ *называется покоординатной резольвентой, если*

$$V_{\overline{p}} = \int_0^\infty \exp(-p_1 t_1) \frac{1}{t_1} \tilde{V}_{p_2/t_1}\, dt_1 = \int_0^\infty \exp(-p_2 t_2) \frac{1}{t_2} \tilde{V}_{p_1/t_2}\, dt_2,$$

где $(\tilde{V}_p,\ p > 0)$ *— резольвента*

Лемма 1. *Пусть ядро* V *удовлетворяет ППМ и* $V1$ *— ограниченная функция. Тогда существует (не единственная) субмарковская мультипликативная резольвента* $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ *такая, что* $V_{\overline{0}} = V$.

Доказательство. Ядро V представимо в виде композиции $V = V \cdot I$. При этом ядро I удовлетворяет ППМ и допускает продолжение до субмарковской резольвенты $V_{p_2}^2 = (1/(p_2+1))I$. Обозначая через $V_{p_1}^1$ субмарковскую резольвенту — продолжение ядра V, получаем мультипликативную резольвенту $V_{\overline{p}} = (1/(1+p_2))V_{p_1}^1 = (1/(1+p_2))I \cdot V_{p_1}^1$ такую, что $V_{\overline{0}} = V$.

Кроме того, для любого $p > 0$ ядро V представимо в виде композиции $V = (I + pV)V_p^1$, где V_p^1 — продолжение ядра V. При этом ядро $1 + pV$ согласно [1] допускает представление

$$1 + pV = \sum_{n=0}^{\infty} (pV_p)^n,$$

т. е. является (в терминах [1]) ядром потенциала и, значит, удовлетворяет ППМ. Следовательно, по ядру $I + pV$ можно построить субмарковскую резольвенту $\hat{V}_{p_2}^2$ по формуле $[I(1+p_2) + p_2 pV]\hat{V}_{p_2}^2 = (I + pV)$.

Далее, ядро V_p^1 также удовлетворяет ППМ и, значит, допускает продолжение до субмарковской резольвенты $\hat{V}_{p_1}^1 = V_{p+p_1}^1$. Полагая $\hat{V}_{\overline{p}} = \hat{V}_{p_1}^1 \hat{V}_{p_2}^2$, вновь получаем такую субмарковскую мультипликативную резольвенту $\hat{V}_{\overline{p}}$, что $\hat{V}_{\overline{0}} = \hat{V}_0^1 \hat{V}_0^2 = (1 + pV)V_p = V$.

При этом, например,

$$\hat{V}_{p_1,0} - V_{p_1,0} = V_{p+p_1}^1 (I + pV) - V_{p_1}^1 = -pV_{p+p_1}^1 V_{p_1+p}^1 + V_{p+p_1}^1 V =$$
$$= p p_1 V_{p+p_1}^1 V_p^1 V \neq 0,$$

если ядро V ненулевое. Лемма доказана.

Итак, в силу леммы 1 мультипликативное продолжение „из точки", вообще говоря, не единственно. Рассмотрим задачу продолжения „с оси". Будем говорить, что ядро V удовлетворяет условию (А), если из $Vf = 0$ следует $f = 0$. Например, если ядро V удовлетворяет ППМ, $V1$ — ограниченная функция и резольвента V_p, построенная по ядру V, сильно непрерывна, то ядро V удовлетворяет условию (А). В самом деле, тогда из $Vf = 0$ следует, что для любого $p > 0$ $V_p f = Vf - p\,V_p V f = 0$, откуда $p\,V_p f = 0$ и при $p \to \infty$ получаем $f = 0$.

Лемма 2. *Пусть $(U_p,\ p \geq 0)$ — семейство ядер, для которых существует субмарковская мультипликативная резольвента $(V_{\overline{p}} = V^1_{p_1} V^2_{p_2},\ \overline{p} \in R^2_+)$ такая, что $U_{(p,0)} = U_p$.*

Тогда резольвента $V_{\overline{p}}$ единственна в классе таких ядер, что $V^1_{p_1}$ — сильно непрерывна, а V^2_0 удовлетворяет условию (А).

Если ядро U_0 также удовлетворяет условию (А), то резольвента $V_{\overline{p}}$ единственна в классе таких ядер, что V^1_0 или V^2_0 удовлетворяет условию (А).

Доказательство. Пусть

$$U_p = V^1_p V^2_0 = \tilde{V}^1_p \tilde{V}^2_0 = V^2_0 V^1_p = \tilde{V}^2_0 \tilde{V}^1_p. \tag{1}$$

Если резольвенты V^1_p и $\tilde{V}^1_p$ сильно непрерывны, то из $p\,V^1_p V^2_0 = p\,\tilde{V}^1_p \tilde{V}^2_0$ при $p \to \infty$ получаем $V^2_0 = \tilde{V}^2_0$. Таким образом, из (1) $V^2_0 (V^1_p - \tilde{V}^1_p) = 0$, и в силу условия (А) $V^1_p = \tilde{V}^1_p$.

Если же ядро U_0 удовлетворяет условию (А), то из (1) и представления $U_0 = V^1_0 V^2_0 = \tilde{V}^1_0 \tilde{V}^2_0$ получаем $U_p - U_0 = -p(V^1_0 - V^1_p) V^2_0 = -p\,V^1_p V^1_0 V^2_0 = -p\,V^1_p U_0$; аналогично, $U_p - U_0 = -p\,\tilde{V}^1_p U_0$; т. е. $\tilde{V}^1_p U_0 = V^1_p U_0$, т. е. в силу коммутации, $U_0(\tilde{V}^1_p - V^1_p) = 0$, откуда $\tilde{V}^1_p = V^1_p$, $p \geq 0$, $V^1_0(V^2_0 - \tilde{V}^2_0) = 0$ и $V^2_0 = \tilde{V}^2_0$. Лемма доказана.

Замечание 3. Пусть $(U_p,\ p \geq 0)$ — семейство ядер, для которого существует мультипликативная субмарковская резольвента $(V_{\overline{p}} = V^1_{p_1} V^2_{p_2},\ \overline{p} \in R^2_+)$ такая, что $V_{(p,0)} = U_p$, причем V^1_p сильно непрерывная резольвента. Тогда

$$\lim_{p \to \infty} p\,U_p = \lim_{p \to \infty} p\,V^1_p V^2_0 = V^2_0,$$

причем ядро V^2_0 удовлетворяет ППМ.

Пусть U — некоторое собственное ядро. Обозначим через $R(U) = \{V\colon V$ — собственное ядро, $V = U \cdot W$, W — собственное ядро$\}$ — „область значений" ядра U. Если ядро U удовлетворяет условию (А) и $V \in R(U)$, то ядро W определяется единственным образом.

Лемма 3. *Пусть $(U_p,\ p \geq 0)$ — семейство ядер, удовлетворяющих условиям (В):*

1) *ядра U_p и U_q коммутируют между собой;*

2) *ядро $W := \lim\limits_{p \to \infty} p\,U_p$ существует, удовлетворяет ППМ, коммутирует с U_p и $W1$ — ограниченная функция;*

3) *для любых $p, q \geq 0$ $W(U_p - U_q) = (q - p)\,U_p U_q$;*

4) *ядро W удовлетворяет условию (А) и $U_p \in R(W)$, $p \geq 0$.*

Тогда существует субмарковская резольвента $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R^2_+)$ такая, что $U_{(p,0)} = U_p$, причем резольвента V^1_p сильно непрерывна.

Замечание 4. Необходимость условий (В) для существования указанной резольвенты очевидна.

Доказательство. В силу условий (B), 2), 4) для любого $p \geq 0$ $U_p = WV_p^1$, где V_p^1 — некоторое собственное ядро. Теперь в силу условий 2) и 3) $W^2(V_p^1 - V_q^1) = (q-p)U_p U_q = (q-p)U_p W V_q^1$. В силу условия 1)

$$U_p W V_q^1 = U_p U_q = U_q U_p = W V_q^1 U_p. \tag{2}$$

Следовательно, $W^2(V_p^1 - V_q^1) = W[(q-p)V_q^1 U_p]$ и в силу 4)

$$W(V_p^1 - V_q^1) = (q-p)V_q^1 W V_p. \tag{3}$$

Поскольку

$$U_p W = U_p \lim_{r\to\infty} rU_r = \lim_{r\to\infty} rU_r U_p = WU_p,$$

то из (2) $WU_p V_q^1 = WV_q^1 U_p$, откуда $U_p V_q^1 = V_q^1 U_p$. Тогда $WV_q^1 = V_q^1 W$ и из (3) имеем

$$(V_q^1 - V_p^1) = (q-p)V_q^1 V_p^1.$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to\infty} pV_p^1 W = \lim_{p\to\infty} pU_p = W,$$

значит,

$$\lim_{p\to\infty} pV_p^1 = I.$$

Продолжим W до субмарковской резольвенты V_p^2 и положим $V_{\overline{p}} = V_{p_1}^1 V_{p_2}^2$. Остается доказать, что ядра $V_{p_1}^1$ и $V_{p_2}^2$ коммутируют. Но для любых $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$

$$(1+p_2W)V_{p_1}^1 V_{p_2}^2 = V_{p_1}^1(1+p_2W)V_{p_2}^2 = V_{p_1}^1 W = WV_p^1 =$$
$$= (1+p_2W)V_{p_2}^2 V_{p_1}^1,$$

откуда в силу теоремы 8 [1, с. 252] $V_{p_1}^1 V_{p_2}^2 = V_{p_2}^2 V_{p_1}^1$. Лемма доказана.

Объединяя результаты лемм 2 и 3, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $(U_p,\ p \geq 0)$ *— семейство ядер, удовлетворяющих условию* (B). *Тогда существует единственная субмарковская резольвента* $(V_{\overline{p}} = V_{p_1}^1 V_{p_2}^2,\ \overline{p} \in R_+^2)$ *такая, что* $V_{(p,0)} = U_p$ *и* $V_{p_1}^1$ *— сильно непрерывная резольвента.*

***Замечание* 5.** Пусть $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R_+^2)$ — „продолжение" семейства ядер $(U_p,\ p \geq 0)$ с оси Ox на R_+^2, построенное согласно теореме 1. Пусть $Z_q = V_{(0,q)} = V_0 W_q$, где $(1 + q\cdot W)W_q = W$.

Тогда $(1 + q\cdot W)Z_q = V_{\overline{0}} W = Z_{\overline{0}} = U_0 = (1 + pV_0)U_p$.

Теорема 2. *Пусть* $(U_p,\ p \geq 0)$ *и* $(Z_q,\ q \geq 0)$ *— семейства ядер, удовлетворяющих условию* (B) *и*

$$(1 + qW_0)Z_q = (1 + pV_0)U_p = U_{\overline{0}} = Z_{\overline{0}},$$

где

$$W_0 = \lim_{p\to\infty} pU_p, \qquad V_0 = \lim_{q\to\infty} qZ_q.$$

Тогда существует единственная сильно непрерывная субмарковская резольвента $(V_{\overline{p}} = V^1_{p_1} V^2_{p_2},\ \overline{p} \in R^2_+)$ *такая, что* $V_{(p,0)} = U_p,\ U_{(0,q)} = Z_q$.

Доказательство. Согласно теореме 1 существует единственная субмарковская резольвента $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R^2_+)$ такая, что $V_{(p,0)} = U_p$. Покажем, что $U_{(0,q)} = Z_q$. Но $V_{(0,q)} = V_0 W_q$, где $(I + q W_0) W_q = W_0$. Следовательно, $(1 + q W_0) V_{(0,q)} = V_0 W_0 = U_0$, откуда $U_{(0,q)} = Z_q$, так как в силу свойств ядра W_0, определяемых условием (B), 2) и теоремы 8 из [1, с. 252], из соотношения $(1 + q W_0) Z = U_0$ ядро Z определяется однозначно. Остается показать, что резольвента $V^2_q = W_q$ сильно непрерывна. Но из только что доказанного соотношения $V_0 W_q = Z_q$ следует, что

$$V_0 \lim_{q \to \infty} q W_q = \lim_{q \to \infty} q Z_q = V_0,$$

и, поскольку V_0 удовлетворяет условию (A),

$$\lim_{q \to \infty} q W_q = I.$$

Теорема доказана.

Замечание 6. Очевидно, при выполнении условий теоремы 2 $V_{\overline{p}}$ является резольвентой двупараметрической мультипликативной полугруппы ядер.

Рассмотрим теперь задачу продолжения „с оси" для покоординатной резольвенты. Учитывая замечание 2, сформулируем эту задачу следующим образом.

Пусть дано семейство ядер $(U_p,\ p \geq 0)$ и зафиксировано число $\varepsilon > 0$. Требуется построить покоординатную резольвенту $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R^2_+)$ так, чтобы $V_{(p,\varepsilon)} = U_p,\ p > 0$.

Далее будем рассматривать ограниченные ядра (в том числе ядра $(U_p,\ p > 0)$ предполагаются ограниченными). Пусть B — множество ограниченных измеримых функций, рассматриваемое как банахово пространство с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Сужение отображения $f \to Vf$ на B есть ограниченный оператор, который вновь будем обозначать через V.

Лемма 4. *Пусть* $(U_p,\ p \geq 0)$ *— такое семейство ядер, что существует покоординатная субмарковская резольвента* $(V_{\overline{p}},\ \overline{p} \in R^2_+)$ *и* $V_{(p,\varepsilon)} = U_p,\ p > 0$. *Тогда*

$$\frac{p^n}{n!} \| U_p^{(n)} \| \leq (p\varepsilon)^{-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Из определения покоординатной резольвенты и условия леммы следует

$$V_{(p,\varepsilon)} = U_p = \int_0^\infty \exp(-p_1 t_1) \frac{1}{t_1} \tilde{V}_{\varepsilon/t_1}\, dt_1.$$

Следовательно, U_p является преобразованием Лапласа функции $t^{-1} \tilde{V}_{\varepsilon/t_1}$, где $\tilde{V}_{\varepsilon/t_1}$ — субмарковская резольвента, для которой $\|t^{-1} \tilde{V}_{\varepsilon/t_1}\| \leq (1/t_1)/(\varepsilon/t_1) = 1/\varepsilon$.

Таким образом, U_p — преобразованием Лапласа функции ограниченной постоянной $(1/\varepsilon)$, откуда в силу известного критерия следует (4). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть ядра* $(U_p,\ p>0)$ *удовлетворяют условиям* (C):

1) $U_p \in C^{\infty}(0,\infty)$;

2) $\left\| \dfrac{d^{m+n}(\lambda^m U_p)}{dp^{m+n}} \right\| \le \dfrac{M\,m!\,n!}{\lambda^{n+1}}$ *для всех* $p>0,\ m,n \in N \bigcup \{0\}$.

Тогда

$$U_p = \int\limits_{R_+} e^{-pt}\varphi_t\,dt,$$

где ядро $\varphi_t \in C^{\infty}(0,\infty)$, *и*

$$\|\varphi_t^{(n)}\| \le \frac{M\,n!}{t^n}, \qquad t \ge 0, \quad n \in N \bigcup \{0\}, \tag{5}$$

причем

$$\varphi_t = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} U_p^{(n)}\big|_{p=n/t}. \tag{6}$$

Доказательство. Существование φ_t и неравенство (5) являются непосредственным следствием теоремы 5 из [5]; формула (6) — это известная формула Пост – Уиддера, применимая, в частности, и к функциям φ_t, удовлетворяющим неравенству (5). Лемма доказана.

Пусть выполнены условия леммы 5. Обозначим $\tilde{V}_p = (\varepsilon/p)\,\varphi_{(\varepsilon/p)}$, где функция φ определена соотношением (6).

Теорема 3. *Пусть ядра* $(U_p,\ p\ge 0)$ *удовлетворяют условиям* (C), *а ядра* $(\tilde{V}_p,\ p>0)$ *удовлетворяют условиям* (D):

1) $\tilde{V}_p - \tilde{V}_q = (q-p)\tilde{V}_p\tilde{V}_q,\ p,q \ge 0$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty} p\tilde{V}_p = I$.

Тогда существует покоординатная резольвента $(V_{\overline{p}},\ \overline{p}\in R_+^2)$ *такая, что* $V_{(p_1,\varepsilon)} = U_0$ *и* $V_{\overline{p}}$ *являются резольвентой сжимающей покоординатной* C_0-*полугруппы.*

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из леммы 5 и теоремы Хилле – Иосиды [1, с. 259].

Замечание 7. Необходимость условий (D) для существования покоординатной сжимающей C_0-полугруппы, резольвентой которой является $\tilde{V}_p$, очевидна.

1. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
2. *Хант Дж. А.* Марковские процессы и потенциалы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 276 с.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
4. *Mishura Yu., Tomilov Yu.* Two-parameter semigroups evolutions and their applications to Markov and diffusion fields on the plane // J. Appl. Math. and Stoch. Analysis. – 1996. – № 3. – P. 281–302.
5. *Sova M.* The Laplace transform of analytic vector-valued functions (real conditions) // Casopis pro pestovani matem. – 1979. – **104**, № 2. – P. 188–199.

Одержано 07.12.95