УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ И КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ*

For Faber domains in the closure $\overline{G}$ the complex plains $\mathbb{C}$, we find estimates of best uniform polynomial approximations of functions, which are continuous in $\overline{G}$, defined by the Cauchy type integral and have densities with certain differential properties.

Order exact estimates for Kolmogorov's widths of classes of such functions in corresponding functional spaces are found.

Знайдені оцінки найкращих рівномірних в замиканні $\overline{G}$ фаберових областей комплексної площини $\mathbb{C}$ поліноміальних наближень неперервних в $\overline{G}$ функцій, що визначаються інтегралами типу Коші, щільності яких мають певні узагальнені диференціальні властивості.

Встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів таких функцій у відповідних функціональних просторах.

Введение. Определения и обозначения. В [1] определены классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ функций, суммируемых на границе области $G \subset \mathbb{C}$, ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой (з.с.ж.к.) Γ, а также их аналитические аналоги — классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$ — множества функций, представимых в области G интегралами типа Коши вдоль Γ с плотностями из $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$.

Исходным пунктом здесь явилась классификация 2π-периодических суммируемых функций, произведенная А. И. Степанцом (см., например, [2]) и базирующаяся на введенном им понятии $(\psi;\beta)$-производной.

Конструктивное построение классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ состоит в установлении взаимно однозначного соответствия между некоторыми множествами 2π-периодических суммируемых функций и подмножествами функций, суммируемых на Γ. Это изначально предполагает, что классифицируемое множество функций $f(\cdot)$, определенных на Γ, удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|\,|d\zeta| = \int_{|w|=1} |f(\Psi(w))|\,|\Psi'(w)|\,|dw| < \infty, \tag{1}$$

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|\,|\Psi'(\zeta)|\,|d\zeta| = \int_{|w|=1} |f(\Psi(w))|\,|dw| < \infty. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ — функция, конформно и однолистно отображающая внешность области $\overline{G}$ — замыкания G — на внешность единичного круга $\overline{D} = \{z: |z| \le 1\}$ с условиями

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \alpha > 0; \quad \Phi(\infty) = \infty,$$

$\Psi(\cdot)$ — функция, обратная к $\Phi(\cdot)$.

В дальнейшем множество функций, которые удовлетворяют условиям (1) и (2), будем обозначать через $\tilde{L}(\Gamma)$, а удовлетворяющих только условию (1) — через $L(\Gamma)$.

Если $f \in \tilde{L}(\Gamma)$, то функция $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$ (такое обозначение для суперпозиции функций $f(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ и e^{it} сохраняется до конца работы) разлагается в ряд Фурье

---

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$S(F) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(F)\, e^{ikt},$$

где $c_k(F) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\, e^{-ikt}\, dt$ — ее коэффициенты Фурье.

Предположим, что для данной фиксированной последовательности положительных действительных чисел $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ и числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z},\\ k \neq 0}} e^{(i\beta\pi/2)\cdot \operatorname{sgn} k}\, \frac{c_k(F)}{\psi(|k|)}\, e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π-периодической функции. Обозначим эту функцию через $F_\beta^\psi(t)$. Функция $F_\beta^\psi(\cdot)$ называется $(\psi;\beta)$-производной функции $F(\cdot)$ (см. [2]). Функцию $\mu(\zeta)$, определенную на Γ (не обязательно принадлежащую $L(\Gamma)$), для которой почти всюду $\mu(\Psi(e^{it})) = F_\beta^\psi(t)$, назовем $(\psi;\beta)$-производной функции $f(\zeta)$ и обозначим через $f_\beta^\psi(\zeta)$.

Через $L_\beta^\psi \mathfrak{N}(\Gamma)$ обозначим подмножество функций из $\tilde{L}(\Gamma)$, для которых $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}(\Gamma)$, где $\mathfrak{N}(\Gamma)$ — некоторое подмножество функций, определенных на Γ и удовлетворяющих условию (2). Наконец, если $\mathcal{K}f(z) \overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, $f \in L(\Gamma)$, $z \in G$, то полагаем

$$L_\beta^\psi \mathfrak{N}(G) = \{\mathcal{K}f\colon\ f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}(\Gamma)\}.$$

В работе [1] при определенных ограничениях на последовательность $\{\psi(k),$ $k \in \mathbb{N}\}$, определяющую класс $L_\beta^\psi \mathfrak{N}(\Gamma)$, а точнее говоря, на некоторую непрерывную положительную на полуоси функцию $\psi(v)$, следом которой на множестве $\mathbb{N}$ является эта последовательность, получены поточечные оценки отклонений от функций из классов $L_\beta^\psi \mathfrak{N}(G)$ их частных сумм Фабера в области G (подобного рода результаты получены также в [3]).

Там же (т. е. в [1]) в случае, когда область G фаберова, а функции из класса $L_\beta^\psi \mathfrak{N}(G)$ непрерывны на $\overline{G}$, найдены равномерные в $\overline{G}$ оценки их отклонений от частных сумм Фабера, выраженные в терминах аппроксимативных величин $(\psi;\beta)$-производных приближаемых функций, а также последовательности $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$.

Анализ предыдущих исследований (проведенных в работе [1]) показывает, что аппарат приближения периодических функций из классов $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ хорошо сочетается с известными фактами из теории граничных свойств интегралов типа Коши и теории конформных отображений. Это побуждает к рассмотрению на классах $L_\beta^\psi \mathfrak{N}(G)$ других классических задач теории приближения аналитических функций, аналогичных решенным на классах $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

К таким задачам относятся, в частности, задача об оценке величин наилучшего равномерного в $\overline{G}$ приближения функций заданного класса алгебраическими полиномами фиксированной степени, а также об оценке точной верхней грани таких величин по всему классу функций.

Решение этой задачи на классах $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$ (в смысле указания оценок сверху) при довольно общих предположениях о поведении последовательности $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ излагается в следующем пункте.

При несколько более жестких ограничениях на последовательность $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ в работе найдены также порядковые оценки колмогоровских поперечников классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$ в пространстве $\mathcal{A}(\overline{G})$-функций, аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$. Их сравнение с упомянутыми оценками сверху наилучших приближений показывает, что в этом случае последние также являются точными по порядку.

В работе используются принятые в [1] обозначения и определения. Для удобства приведем некоторые из них.

Через $L_p(0;2\pi)$, $1\le p\le\infty$, обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $\varphi(\cdot)$, для которых конечны величины

$$\|\varphi\|_p \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty;\\ ess\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)|, & p=\infty;\end{cases}$$

$$L(0;2\pi)\overset{\mathrm{df}}{=}L_1(0;2\pi),\ M\overset{\mathrm{df}}{=}L_\infty(0;2\pi);$$

$\tilde{L}_p(\Gamma)$, $1\le p<\infty$, — подпространство функций $f\in L(\Gamma)$, для которых

$$\|f\|_{\tilde{L}_p(\Gamma)}=\|f\|_{\Gamma,p}\overset{\mathrm{df}}{=}\left(\int\limits_\Gamma|f(\zeta)|^p|\Phi'(\zeta)||d\zeta|\right)^{1/p}<\infty;$$

$C(0;2\pi)$ — пространство 2π-периодических непрерывных функций $\varphi(\cdot)$ с нормой

$$\|\varphi\|_C=\max_{t\in[0;2\pi]}|\varphi(t)|;$$

$M(\Gamma)=\tilde{L}_\infty(\Gamma)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на Γ функций $f(\cdot)$ с нормой

$$\|f\|_{M(\Gamma)}=\operatorname{ess\,sup}_{z\in\Gamma}|f(z)|;$$

$C(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций на Γ с нормой

$$\|f\|_{C(\Gamma)}=\max_{z\in\Gamma}|f(z)|.$$

Для $\varphi\in L(0;2\pi)$ через $\tilde{\varphi}(\cdot)$ обозначим функцию, тригонометрически сопряженную (см., например, [4, с. 88]), а через $\hat{\varphi}(\cdot)$ — функцию, определяемую соотношением $\hat{\varphi}(t)=\frac{1}{2}c_0(f)+\frac{1}{2}[\varphi(t)+i\tilde{\varphi}(t)]$, где $c_0(\varphi)=$ $=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt$. Понятно, что $\tilde{\varphi}(\cdot)$ определяется однозначно всюду на $\mathbb{R}$, за исключением, быть может, множества точек лебеговой меры нуль, на котором ее можно доопределять произвольным образом. Множество функций $f\in$ $\in M(\Gamma)$ таких, что $\hat{F}\in C(0;2\pi)$, $F\in M$, обозначим через $\tilde{C}(\Gamma)$ ($\tilde{M}(\Gamma)$).

В формулировках утверждений $E_n(\varphi)_X = \inf\limits_{\{T_n\}} \|\varphi(\cdot) - T_n(\cdot)\|_X$, $n \in \mathbb{N}$, — величина наилучшего приближения функции $\varphi \in X$ по норме пространства X полиномами (тригонометрическими степени не выше $n-1$ в комплексной записи, если $X \subset L(0;2\pi)$, и алгебраическими степени не выше $n-1$ — в остальных случаях). Полагаем $E_n(\varphi)_C \overset{\mathrm{df}}{=} E_n(\varphi)_{C(0;2\pi)}$ и $E_n(\mathfrak{M})_X \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}} E_n(\varphi)_X$, где $\mathfrak{M}$ — некоторый класс из X.

Через C и K обозначаются постоянные (возможно различные в разных местах). В определенных случаях их зависимость от каких-либо параметров оговаривается.

Запись $\alpha(n) \asymp \beta(n)$ означает, что $\exists\, c_1, c_2 > 0$, что $\forall\, n \ge n_0$: $c_1 \le \alpha(n)/\beta(n) \le c_2$.

1. Оценки наилучшего приближения. Перед формулировкой и доказательством результатов изложим схему построения полиномов, приближающих в $\overline{G}$ рассматриваемые функции с точностью, по порядку совпадающей на всем классе с точной верхней гранью величин наилучших приближений этих функций.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ — произвольная числовая матрица ($\lambda_k^{(n)} = 0$, $k \ge n$ и $\lambda_0^{(n)} = 1$), с помощью которой каждой функции $\mathcal{K}f(\cdot)$, $f \in L(\Gamma)$, согласно ее разложению в ряд Фабера (см. [1]), ставится в соответствие последовательность полиномов

$$U_n(f;z;\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k(f)\, F_k(z), \tag{3}$$

где $a_k(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|w|=1} f(\Psi(w))\, w^{-k-1} dw$, а $F_k(z)$, $z \in G$, — многочлен Фабера порядка k для области G.

Определим последовательность $\{\lambda_n(v)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $[0,1]$ функций таких, что $\lambda_n(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots$, и положим

$$\tau_n(v) = \tau_n(v;\Lambda;\psi) = \begin{cases} (1-\lambda_n(v))\,\psi(1), & 0 \le v \le 1/n; \\ (1-\lambda_n(v))\,\psi(nv), & 1/n \le v \le 1; \\ \psi(nv), & v \ge 1, \end{cases}$$

где $\psi(v)$ — функция, непрерывная и положительная при всех $v \ge 1$.

Тогда

$$\tau_n(k/n) = \begin{cases} (1-\lambda_k^{(n)})\,\psi(k), & 1 \le k \le n-1; \\ \psi(k), & k \ge n. \end{cases}$$

Далее, рассмотрим преобразование

$$\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t;\Lambda;\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tau_n(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{4}$$

В теореме 1 из [1] утверждается, что если функция $\hat{\tau}_n(t)$ суммируема на $\mathbb{R}$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t)|\, dt < \infty, \tag{5}$$

а функция $f \in L^{\psi}_{\beta} M(\Gamma)$, $\beta \in \mathbb{R}$, то в каждой точке $z \in G$ выполняется равенство

$$\mathcal{K} f(z) - U_n(f; z; \Lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_n(t) \int\limits_{\Gamma} \frac{f^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)\, e^{it/n}))}{\zeta - z}\, d\zeta\, dt. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение другую бесконечную треугольную матрицу $\mathrm{M} = \{\mu_k^{(n)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ ($\mu_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$), элементы которой — произвольные действительные числа.

Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$q_n(\zeta) = q_n(f; \zeta; \mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^{(n)} a_k(f)\, \Phi^k(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Понятно, что $q_n \in L^{\psi}_{\beta} M(\Gamma)$, $n \in \mathbb{N}$, для произвольного задания положительной последовательности $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ и при любом $\beta \in \mathbb{R}$.

Поэтому, считая выполненным условие (5), согласно формуле (6) для каждого $z \in G$ имеем

$$\mathcal{K} q_n(z) - U_n(q_n; z; \Lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t; \Lambda; \beta)\, Q_n(f^{\psi}_{\beta}; z; t/n; \mathrm{M})\, dt, \tag{7}$$

где

$$Q_n(f^{\psi}_{\beta}; z; t; \mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{[q_n]^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)\, e^{it}))}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^{(n)} e^{i\beta\pi/2} \frac{a_k(f)}{\psi(k)} F_k(z)\, e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^{(n)} a_k(f^{\psi}_{\beta})\, F_k(z)\, e^{ikt}.$$

Вычитая (7) из (6), получаем равенство

$$\mathcal{K} f(z) - V_n(f; z; \Lambda; \mathrm{M}) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t; \Lambda; \beta) \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)\, e^{it/n}))}{\zeta - z}\, d\zeta - Q_n(f^{\psi}_{\beta}; z; t/n; \mathrm{M}) \right] dt, \tag{8}$$

в котором в силу легко проверяемых равенств

$$\mathcal{K} q_n(z) = U_n(f; z; \mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^{(n)} a_k(f)\, F_k(z)$$

и

$$U_n(q_n; z; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \mu_k^{(n)} a_k(f)\, F_k(z),$$

$V_n(f; z; \Lambda; \mathrm{M})$ является алгебраическим полиномом степени не выше $n-1$ по переменной z вида

$$V_n(f; z; \Lambda; \mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k^{(n)} a_k(f) F_k(z), \tag{9}$$

где $\nu_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} + \mu_k^{(n)} - \lambda_k^{(n)} \mu_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Итак, полином вида (9) при определенном выборе матриц Λ и M — искомый.

Для сокращения дальнейших записей положим

$$R_n(f_\beta^\psi : z; t; \mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_\beta^\psi(\Psi(\Phi(\zeta) e^{it}))}{\zeta - z} d\zeta - Q_n(f_\beta^\psi; z; t; \mathrm{M}),$$

$$\Delta_{n,\infty}(f_\beta^\psi; z; \mathrm{M}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(f_\beta^\psi; z; t; \mathrm{M})|,$$

$$\Omega_n(f_\beta^\psi) = \inf_{\mathrm{M}} \sup_{z \in G} \Delta_{n,\infty}(f_\beta^\psi; z; \mathrm{M})$$

и, наконец,

$$\rho_n(\mathcal{K}f; z; \Lambda; \mathrm{M}) = \mathcal{K}f(z) - V_n(f; z; \Lambda; \mathrm{M}).$$

В качестве матрицы Λ возьмем матрицу Λ_a, которая порождается последовательностью функций $\lambda_n(v) = \lambda_n(a; v)$, определенных соотношением (10) из [1].

Тогда в принятых обозначениях (а также используемых в [1]) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — область, ограниченная з.с.ж.к. Γ и $f \in L_\beta^\psi M(\Gamma)$. Тогда для любого $z \in G$ в каждом из случаев*

i) $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = a = 0$;

ii) $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $a \in (0; 1)$;

iii) $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $a = a(n) = (1 - \mu^{-1}(n))_+$

справедливо неравенство

$$|\rho_n(\mathcal{K}f; z; \Lambda_a; \mathrm{M})| \le K \psi(n) \Delta_{n,\infty}(f_\beta^\psi; z; \mathrm{M}), \tag{10}$$

где K — абсолютная постоянная.

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, то согласно лемме 4.1 из [2], с учетом вложения $\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset F_0$, преобразование $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t; \Lambda_a; \beta)$ вида (4) функции $\tau_n(v; \Lambda_a; \beta)$ является суммируемым на $\mathbb{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Если же $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то аналогичное заключение справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$, по крайней мере, при $\beta = 0$.

Положим

$$\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t; \Lambda_a; \beta)| \, dt.$$

Тогда, исходя из соотношения (8), получаем

$$|\rho_n(\mathcal{K}f; z; \Lambda_a; \mathrm{M})| \le \mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \Delta_{n,\infty}(f_\beta^\psi; z; \mathrm{M}).$$

Необходимо показать, что в каждом из случаев i)–iii) величина $\mathcal{A}(\hat{\tau}_n)$ допускает оценку

$$\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le K\psi(n), \tag{11}$$

где K — постоянная, зависящая, возможно, только от $\psi(\cdot)$.

В [2, с. 58] показано, что

$$\hat{\tau}_n(t; \Lambda_a; \beta) = J_1(\psi; t; a) + J_2(\psi; t),$$

где

$$J_1(\psi; t; a) = J_1(\psi; \beta; t; a) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left\{\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{2\sin\{[(1+a)t + \beta\pi]/2\}\sin[(1-a)t/2]}{(1-a)t^2}\right\} =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left[\frac{(1-a)t - \sin(1-a)t}{(1-a)t^2}\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \cos(1-a)t}{(1-a)t^2}\cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right] \tag{12}$$

и

$$J_2(\psi; t) = J_2(\psi; t; \beta) =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi}\,\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{n}{\pi t}\int_1^\infty \psi'(nv)\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\psi(n)}{\pi}\,\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{n}{\pi}J_3(\psi; \beta; t). \tag{13}$$

Докажем вначале неравенство (11) в случае i).

Согласно выражениям (12) и (13)

$$\hat{\tau}_n(t; \Lambda_0; 0) = -\frac{2\psi(n)}{\pi}\,\frac{\sin^2(t/2)}{t^2} - \frac{n}{\pi}J_3(\psi; t),$$

а значит,

$$\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le \frac{4\psi(n)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,dt + \frac{2n}{\pi}\int_0^\infty |J_3(\psi; t)|\,dt,$$

откуда, используя оценку (10.7) из [2, с. 133], находим $\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le K\psi(n)$.

Пусть теперь выполнено условие ii). Для определенности будем полагать $a = 1/2$ (в других случаях доказательство аналогично).

Имеем

$$\hat{\tau}_n(t; \Lambda_{1/2}; \beta) = J_1(\psi; \beta; t; 1/2) + J_2(\psi; t),$$

где в соответствии с (12)

$$J_1(\psi; \beta; t; 1/2) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{4\sin((3t + 2\beta\pi)/4)\sin(t/4)}{t^2}\right),$$

или после несложных преобразований

$$J_1(\psi; \beta; t; 1/2) = \frac{2\psi(n)}{\pi}\left(\frac{t/2 - \sin(t/2)}{t^2}\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \cos(t/2)}{t^2}\cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right),$$

а $J_2(\psi; t)$ — то же, что и в (13).

Тогда

$$\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) = \int_{-1/n}^{1/n} |\hat{\tau}_n(t; \Lambda_{1/2}; \beta)|\, dt + \int_{|t| \ge 1/n} |\hat{\tau}_n(t; \Lambda_{1/2}; \beta)|\, dt \overset{\text{df}}{=} I_1 + I_2. \quad (14)$$

В свою очередь,

$$I_1 \le \int_{-1/n}^{1/n} |J_1(\psi; \beta; t; 1/2)|\, dt + \int_{-1/n}^{1/n} |J_2(\psi; 1/2; t)|\, dt \overset{\text{df}}{=} I_1^{(1)} + I_1^{(2)}, \quad (15)$$

$$I_2 \le \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{|t| \ge 1/n} \left| \frac{\sin((3t + 2\beta\pi)/4) \sin(t/4)}{t^2} \right| dt + \int_{|t| \ge 1/n} |J_3(\psi; t)|\, dt =$$

$$= I_2^{(1)} + I_2^{(2)}. \quad (16)$$

Оценим $I_1^{(1)}$:

$$I_1^{(1)} \le \frac{4\psi(n)}{\pi} \left[\int_0^{1/n} \frac{t/2 - \sin(t/2)}{t^2}\, dt + \int_0^{1/n} \frac{1 - \cos(t/2)}{t^2}\, dt \right] \le K\psi(n). \quad (17)$$

Аналогично

$$I_2^{(1)} \le \frac{4\psi(n)}{\pi} \int_{|t| \ge 1/n} \frac{dt}{t} \le K\psi(n). \quad (18)$$

Промежуточные оценки интегралов $I_1^{(2)}$ и $I_2^{(2)}$ устанавливаются с помощью рассуждений, аналогичных использованным в [2, с. 106–108] при получении неравенств (6.49′) и (6.59′). Т. е.

$$I_1^{(2)} \le K \left(\psi(n) + \int_n^{\infty} \frac{\psi(n + t)}{t}\, dt \right), \quad (19)$$

$$I_2^{(2)} \le K \left(\psi(n) + \int_{1/n}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n + 1/t)}{t}\, dt \right). \quad (20)$$

Покажем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(n + t)}{t}\, dt = O(1)\psi(n),$$

$$\int_{1/n}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n + 1/t)}{t}\, dt = O(1)\psi(n), \quad (21)$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n.

Если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, то, как показано в [2, с. 96], для любого $n \in \mathbb{N}$

$$A_1 \overset{\text{df}}{=} \int_{\eta(n) - n}^{\infty} \frac{\psi(n + t)}{t}\, dt = \int_{\eta(n)}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t - n}\, dt \le K\psi(n),$$

$$A_2 \overset{\text{df}}{=} \int_{1/(\eta(n) - n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n + 1/t)}{t}\, dt = \int_n^{\eta(n)} \frac{\psi(n) - \psi(t)}{t - n}\, dt \le K\psi(n),$$

где, напомним, $\eta(n) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$. Поэтому для каждого $\psi \in \mathfrak{M}_c$

$$\int_n^{\infty} \frac{\psi(n+t)}{t}\,dt = A_1 + \int_n^{\eta(n)-n} \frac{\psi(n+t)}{t}\,dt \le$$

$$\le K\psi(n) + \psi(n)\left|\ln \frac{n}{\eta(n)-n}\right| \le K\psi(n)$$

(в случае, когда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $0 < \eta(n) - n \le n$, оценка тривиальна) и

$$\int_{1/n}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t}\,dt = A_2 + \int_{1/n}^{1/(\eta(n)-n)} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t}\,dt \le$$

$$\le K\psi(n) + \psi(n)\left|\ln \frac{\eta(n)-n}{n}\right| \le K\psi(n)$$

(если $\eta(n) - n \ge n$ для некоторого n, то оценка тривиальна).

Таким образом, соотношения (21) действительно выполняются. Сопоставив их с (19) и (20), получим

$$I_1^{(2)} \le K\psi(n), \quad I_2^{(2)} \le K\psi(n). \tag{22}$$

Из соотношений (14)–(17) и (22) находим, что для каждого $\psi \in \mathfrak{M}_c$ (при $a \in (0;1)$) $\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le K\psi(n)$.

Остается доказать справедливость оценки (11) в случае iii).

Заметим, что если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то последовательность $\mu(\psi; n)$ монотонно и неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Поэтому $a(n)$ не убывая стремится к единице, а значит, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $0 < a(n) < 1$ (не ограничивая общности считаем, что $\mu(\psi; n) \ge 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$).

Положим

$$I_1 = \int_{|t| \le 1/(\eta(n)-n)} |J_1(\psi; \beta; t; a)|\,dt,$$

$$I_2 = \int_{|t| \le 1/(\eta(n)-n)} |J_2(\psi; t)|\,dt,$$

$$I_3 = \frac{2\psi(n)}{\pi(1-a)} \int_{|t| \ge 1/(\eta(n)-n)} \frac{\sin((1-a)t + \beta\pi/2)\sin((1-a)t/2)}{t^2}\,dt,$$

$$I_4 = \int_{|t| \le 1/(\eta(n)-n)} |J_3(\psi; t)|\,dt.$$

Тогда

$$\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le \sum_{i=1}^{4} I_i. \tag{23}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (23):

$$I_1 \le \frac{2\psi(n)}{\pi(1-a)} \int_0^{1/(\eta(n)-n)} \frac{(1-a)t - \sin(1-a)t + 1 - \cos(1-a)t}{t}\,dt \le$$

$$\le K\psi(n).$$

Далее,

$$I_3 \le \frac{4\psi(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \ge 1/(\eta(n)-n)} \frac{dt}{t^2} \le K\psi(n).$$

Как и при установлении оценок величин $I_1^{(2)}$ и $I_2^{(2)}$ в предыдущем случае, находим

$$I_2 \le K\psi(n) \quad \text{и} \quad I_4 \le K\psi(n).$$

Отсюда заключаем, что в случае iii) $\mathcal{A}(\hat{\tau}_n) \le K\psi(n)$.

Этим завершается доказательство теоремы.

Неравенство (10) остается в силе и для верхних граней обеих его частей сначала по $z \in G$, а затем нижних граней по множеству матриц M, т. е. при условиях теоремы 1

$$\inf_{\mathrm{M}} \sup_{z \in G} |\rho_n(\mathcal{K}f; z; \Lambda_a; \mathrm{M})| \le K\Omega_n(f_\beta^\psi)\,\psi(n). \tag{24}$$

Поведение величины $\Omega_n(f_\beta^\psi)$ при $n \to \infty$ зависит как от свойств функции f_β^ψ, так и от структуры области G. Если G — единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$, а $f_\beta^\psi \in \tilde{M}(|z| = 1)$, то, повторяя, фактически, доказательство леммы 2 из [1], легко убедиться в справедливости оценки

$$\Omega_n(f_\beta^\psi) \le K E_n(\hat{F}_\beta^\psi)_M. \tag{25}$$

При этом инфимум величине $\Omega_n(f_\beta^\psi)$ доставляет матрица M^*, элементами которой (по n-й строке) являются коэффициенты полинома степени n наилучшего равномерного приближения функции $\hat{F}_\beta^\psi(\cdot)$.

Таким образом, в случае единичного круга, если $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(|z| = 1)$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$ или $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(|z| = 1)$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то функция $\mathcal{K}f(\cdot)$ (аналитическая в D) является в силу соотношений (24) и (25) непрерывной в $\overline{D}$ и

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{D})} \le K\psi(n)\,E_n(\hat{F}_\beta^\psi)_M. \tag{26}$$

Если область G — фаберова (определение см. в [1]), то аналогичного типа оценку величины $E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{G})}$ (при условии, что $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$ или $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$), возможно с другой константой K в правой части, можно получить, не прибегая непосредственно к оценке величины $\Omega_n(f_\beta^\psi)$ при $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть* $G \in \mathcal{F}_C$ *(см. [1]),* $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *или* $f \in L_\beta^\psi \tilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда*

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{G})} \le CK\psi(n)\,E_n(\hat{F}_\beta^\psi)_M,$$

где K *— постоянная, та же, что и в* (26), *а* C *— постоянная, зависящая от области* G *(в случае единичного круга* $C = 1$*).*

Установим несколько элементарных утверждений, необходимых при доказательстве теоремы 2.

Лемма 1. *Пусть* G *— область в* $\mathbb{C}$, *ограниченная з.с.ж.к.* Γ; $\Psi'(e^{it}) \in$

$\in L_p(0;2\pi)$, $f \in \tilde{L}_s(\Gamma)$, $1 \le p, s \le \infty$, $1/p + 1/s = 1$ *и* $c_k(F) = 0$ *при* $k \in \in N \cup \{0\}$. *Тогда для любого* $z \in G$

$$\mathcal{K}f(z) \equiv 0. \tag{27}$$

Доказательство. Полагая $\zeta = \Psi(e^{it})$, для каждого $z \in G$ имеем

$$\mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - k}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\Psi(e^{it}))}{\Psi(e^{it}) - z}\Psi'(e^{it})\,e^{it}dt \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,K(t;z)\,dt,$$

где

$$K(t;z) = \frac{\Psi'(e^{it})\,e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z}.$$

Поскольку $\Psi'(e^{it}) \in L_p(0;2\pi)$, то, очевидно, для каждого $z \in G$ $K(\cdot;z) \in L_p(0;2\pi)$, $1 \le p \le \infty$, и, принимая во внимание, что $F \in L_s(0;2\pi)$, $1/p + 1/s = 1$, согласно теореме 8.7 из [4, с. 255] для каждого $z \in G$ получаем

$$\mathcal{K}f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F)\,c_{-k}(K(\cdot;z)). \tag{28}$$

Но (см., например, [5, с. 362])

$$c_k(K(\cdot;z)) = \begin{cases} 0, & k < 0; \\ F_k(z), & k \ge 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathcal{K}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(F)\,F_k(z). \tag{29}$$

Равенства (28) и (29) надо понимать в том смысле, что ряды в их правых частях суммируются $(C;1)$-методом (при $p \ne 1, \infty$ просто сходятся) к значениям $\mathcal{K}f(z)$. Но поскольку $c_k(F) = 0$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то равенство (27) является непосредственным следствием (29).

Обозначим через $\tilde{\tilde{L}}_s(\Gamma)$, $1 \le s \le \infty$, подмножество функций $f(\cdot)$ из $\tilde{L}_s(\Gamma)$ таких, что $\tilde{F} \in L_s(0;2\pi)$, где, напомним, $\tilde{F}(\cdot)$ — функция, тригонометрически сопряженная к $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$.

Понятно, что при $1 < s < \infty$ $\tilde{\tilde{L}}_s(\Gamma) = \tilde{L}_s(\Gamma)$.

Лемма 2. *Пусть* G *— область в* $\mathbb{C}$, *ограниченная з.с.ж.к.* Γ; $\Psi'(e^{it}) \in \in L_p(0;2\pi)$, $f \in \tilde{\tilde{L}}_s(\Gamma)$, $1 \le p, s \le \infty$, $1/p + 1/s = 1$. *Тогда для каждого* $z \in G$

$$\mathcal{K}f(z) = \mathcal{F}_G[\mathcal{K}f_0](z),$$

где $f_0(w) = f(\Psi(w))$, *а* $\mathcal{F}_G$ *— оператор Фабера (см. [1]).*

Доказательство. Если $f \in \tilde{\tilde{L}}_s(\Gamma)$, то, очевидно, $f_0 \in \tilde{\tilde{L}}_s(|w| = 1)$, и в силу известных результатов почти всюду на $|w| = 1$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \mathcal{K}f_0(\tau) = \hat{f}_0(\tau_0), \quad \tau \in D, \quad \tau_0 = e^{it},$$

где

$$\hat{f}_0(e^{it}) = \frac{1}{2} c_0(F_0) + \frac{1}{2}[F_0(t) + i\tilde{F}_0(t)], \quad \text{а} \quad F_0(t) = f_0(e^{it}).$$

Поэтому по определению преобразования Фабера

$$\mathcal{F}_G[\mathcal{K}f_0](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\tilde{f}_0(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G.$$

Функция $\hat{f}_0(\Phi(\cdot)) \in L_s(\Gamma)$. Следовательно, учитывая, что коэффициенты Фурье с неотрицательными индексами функций $\hat{f}_0(e^{it})$ и $f(\Psi(e^{it}))$ в их разложениях в ряды Фурье в комплексной форме совпадают, согласно лемме 1 для любого $z \in G$ получаем

$$\mathcal{K}f(z) - \mathcal{F}_G[\mathcal{K}f_0](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - \hat{f}_0(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *з.с.ж.к.* Γ. *Тогда*

1) $L^\psi_\beta \tilde{M}(\Gamma) \subset \tilde{C}(\Gamma)$, *если* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$;

2) $L^\psi_0 \tilde{M}(\Gamma) \subset \tilde{C}(\Gamma)$, *если* $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

Доказательство. Пусть $h \in L^\psi_\beta \tilde{M}(\Gamma)$ и $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, или $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = 0$. Достаточно показать, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(H) e^{ik\sigma} \tag{30}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\hat{H} \in C(0; 2\pi)$.

Предположим, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} e^{(i\beta\pi/2)\cdot \operatorname{sgn} k} \psi(|k|) e^{ikt}$ — ряд Фурье некоторой функции $\mathcal{D}_{\psi,\beta}(\cdot)$ из $L(0; 2\pi)$. Это предположение выполняется, если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ или $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и $\beta = 0$ (см., например, [4, с. 100]).

Положим

$$\hat{H}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^\psi_\beta(\sigma + t) \mathcal{D}_{\psi,\beta}(t)\, dt, \tag{31}$$

где $\hat{H}^\psi_\beta \in M$ и $S[\hat{H}^\psi_\beta] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\hat{H}^\psi_\beta) e^{ikt}$ (существование функции $\hat{H}^\psi_\beta(\cdot)$, имеющей такие свойства, обеспечивается условием $h^\psi_\beta \in \tilde{M}(\Gamma)$).

Определяемая равенством (31) функция — искомая. В самом деле, $\hat{H}(\cdot)$ — непрерывна (см., например, [4, с. 68]) и в силу теоремы 1.5 из [4, с. 64]

$$c_k(\hat{H}) = c_k(H^\psi_\beta) c_k(\mathcal{D}_{\psi,\beta}) = \begin{cases} c_k(H), & k \geq 0; \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

т. е. ряд Фурье функции $\hat{H}(\cdot)$ совпадает с рядом (30). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 3 $f \in \tilde{C}(\Gamma) \subset \tilde{\tilde{L}}_\infty(\Gamma)$ и поскольку при условии, что Γ — з.с.ж.к., $\Psi'(e^{it}) \in L(0;2\pi)$, то согласно лемме 2 для каждого $z \in G$ $\mathcal{K}f(z) = \mathcal{F}_G[\mathcal{K}f_0](z)$, где $f_0(w) = f(\Psi(w))$. Функция $f_0(\cdot)$ удовлетворяет всем требованиям, обеспечивающим выполнение неравенства (26). Поэтому, принимая во внимание ограничения на область G и учитывая свойства оператора $\mathcal{F}_G$, находим, что $\mathcal{K}f \in \mathcal{A}(\overline{G})$ и $E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{G})} \le$ $\le C\,E_n(\mathcal{K}f_0)_{\mathcal{A}(\overline{D})} \le CK\,E_n(\hat{F}_\beta^\psi)_M$. Теорема доказана.

Обозначим через $\tilde{B}(\Gamma)$ компакт в $\tilde{M}(\Gamma)$, состоящий из функций $f(\cdot)$ таких, что $\|\hat{F}\|_M \le 1$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $G \in \mathcal{F}$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$ *или* $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\beta = 0$. *Тогда*

$$E_n(L_\beta^\psi \tilde{B}(G))_{\mathcal{A}(\overline{G})} \le K\psi(n),$$

где K *— постоянная, зависящая только от области* G *и функции* $\psi(\cdot)$.

Из анализа доказательства теорем 4–6 [3] следует, что изложенным там методом такие же, как и в следствии 1, оценки точных верхних граней наилучших приближений можно получить, если в качестве приближающих полиномов рассмотреть полиномы вида (3) при конкретном выборе последовательности $\{\lambda_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, определяющей матрицу Λ.

Однако использование приближающих полиномов более сложной конструкции позволило уточнить (см. теорему 2) вытекающие из теорем 4–6 [3] оценки наилучших равномерных приближений индивидуальных функций.

2. Колмогоровские поперечники. Пусть $f \in \mathcal{A}(\overline{G})$ и

$$\varphi(w) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f(\Psi(\tau))}{\tau - w}\,d\tau, \quad w \in D. \tag{32}$$

Функция $\varphi(\cdot)$, определяемая по формуле (32), называется обратным преобразованием Фабера функции $f(\cdot)$ (см., например, [6, с. 160–162]) и обозначается через $\mathcal{F}^G[f](w)$.

В [7, с. 58–59] показано, что оператор $\mathcal{F}_G$, действующий из $\mathcal{A}(\overline{D})$ в $\mathcal{A}(\overline{G})$ на множестве $\mathcal{P}_n$ алгебраических полиномов степени n, является взаимно однозначным отображением и определенный на $\mathcal{P}_n$ обратный к нему совпадает с оператором $\mathcal{F}^G$. Причем, если

$$t_n(w) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k w^k, \quad w \in D, \tag{33}$$

и

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k F_k(z), \quad z \in G, \tag{34}$$

то $\mathcal{F}_G[t_n](z) = p_n(z)$, и в соответствии с изложенным выше

$$t_n(w) = \mathcal{F}^G[p_n](w). \tag{35}$$

Если $G \in \mathcal{F}$ (т. е. область G — фаберова), то в силу неравенства (51) [1] и теоремы Банаха об обратном операторе (см., например, [8, с. 225]) справедливо неравенство

$$\| \mathcal{F}^G[p_n] \|_{C(|w|=1)} \leq C_0 \| p_n \|_{C(\Gamma)}, \tag{36}$$

где C_0 — положительная постоянная, зависящая лишь от области G.

Соотношение (36) позволяет установить аналог неравенства Бернштейна (см. лемму 4) для $(\psi;\beta)$-производных алгебраического полинома.

Обозначим через S множество функций $\psi(\cdot)$, определенных на $[0;\infty)$, не возрастающих и таких, что функции $1/\psi(\cdot)$ выпуклы вверх или вниз на $[1;\infty)$. Пусть, далее, $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ — произвольный алгебраический полином степени не выше n и

$$T_n(w) = \mathcal{F}^G[P_n](w). \tag{37}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $G \in \mathcal{F}$, $\psi \in S$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\| [T_n]_\beta^\psi \|_{C(|w|=1)} \leq \frac{C}{\psi(n)} \| P_n \|_{C(\Gamma)}, \tag{38}$$

где C *— постоянная, зависящая только от области* G.

Доказательство. Разложим $P_n(z)$ по многочленам Фабера для области G:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k = \sum_{k=0}^n a_k(P_n) F_k(z).$$

Тогда, учитывая (33) – (35), получаем $T_n(w) = \sum_{k=0}^n a_k(P_n) w^k$. Полагая $w = e^{i\theta}$ и принимая во внимание неравенство (5.3) из [9], для любого $\psi \in S$ имеем

$$\| [T_n]_\beta^\psi \|_{C(|w|=1)} \leq \frac{K}{\psi(n)} \| T_n \|_{C(|w|=1)}.$$

Для завершения доказательства достаточно сослаться на неравенство (36), в силу которого

$$\| T_n \|_{C(|w|=1)} \leq C_0 \| P_n \|_{C(\Gamma)}.$$

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{A}$ — центрально-симметричное подмножество в X и L_n — произвольное n-мерное подпространство в X.

Величина

$$d_n(\mathfrak{A}; X) = \inf_{L_n} \sup_{x \in \mathfrak{A}} \inf_{y \in L_n} \| x - y \|_X,$$

где $\| \cdot \|_X$ — норма в пространстве X, называется n-мерным поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{A}$ в пространстве X.

Теорема 3. *Пусть* $G \in \mathcal{F}$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \cap S$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$ *или* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap S$ *и* $\beta \in 0$. *Тогда*

$$d_n(L_\beta^\psi \tilde{B}(G); \mathcal{A}(\overline{G})) \asymp \psi(n).$$

Доказательство. Оценки сверху вытекают из следствия 1. Оценки снизу установим с помощью хорошо известного метода, разработанного В. М. Тихомировым [10]. В его основе лежит утверждение о том, что n-мерный поперечник по Колмогорову $(n+1)$-мерного единичного шара в линейном нормированном пространстве X равен единице.

Пусть для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$C\psi(n)U_{n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{P_n \in \mathcal{P}_n \colon \|P_n\|_{C(\Gamma)} \le C\psi(n)\}$$

— $(n+1)$-мерный шар радиуса $C\psi(n)$ (C — некоторая положительная постоянная) в пространстве $\mathcal{A}(\overline{G})$.

Покажем, что если $G \in \mathcal{F}$ и $\psi \in S$, то существует такое $C > 0$, что

$$C\psi(n)U_{n+1} \subset L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(G). \tag{39}$$

Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n$ и функция $T_n(\cdot)$ определена формулой (37). Тогда для любого $z \in G$

$$P_n(z) = \mathcal{F}_G[T_n](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{T_n(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Положим $T^0_n(\cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} T_n(\Phi(\cdot))$. Если при некотором фиксированном $C > 0$ $P_n \in$ $\in C\psi(n)U_{n+1}$, то в силу неравенства (38)

$$\|[T_n]^{\psi}_{\beta}\|_{C(|w|=1)} = \|[T^0_n]^{\psi}_{\beta}\|_{C(\Gamma)} \le C_1,$$

и если C — достаточно малое, то $\|[T^0_n]^{\psi}_{\beta}\|_{C(\Gamma)} \le 1$. Последнее означает, что $P_n \in L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(G)$ (если учесть, что $[\hat{T}_n]^{\psi}_{\beta}(\cdot) = [T_n]^{\psi}_{\beta}(\cdot)$).

Таким образом, вложение (39) действительно имеет место. Поэтому на основании предложения 10.2.4 из [11, с. 258] можно утверждать, что существует такое $C > 0$, что

$$d_n(L^{\psi}_{\beta}\tilde{B}(G); A(\overline{G})) \ge d_n(C\psi(n)U_{n+1}; A(\overline{G})) = C\psi(n).$$

Замечание. Условиям теоремы 3 удовлетворяют, например, функции $\psi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$; $\psi_2(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha \ge 1$, $r > 0$; $\psi_3(t) = \ln^{-r}(t+e)$, $r > 0$, и др.

1. *Степанец А. И., Романюк В. С.* Классы $(\varphi; \beta)$-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение линейными средними их рядов Фабера // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1556–1570.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Приближение интегралов типа Коши в жордановых областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 809–833.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
6. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
7. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области: Пер. с нем. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Мир, 1981. – 514 с.
9. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. – Киев, 1987. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
10. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 4. – С. 81–120.
11. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 13.10.94