УДК 512.6, 512.548

Ф. М. Сохацький, (Київ. ун-т)

ПРО ІЗОТОПИ ГРУП. III

In the article the normal congruences of a group isotope are described. An homomorphism and isomorphism criteria are established. Methods of up to isomorphism description are selected. A criterion for a subset to be a subquasigroup are found. The subquasigroups in some class of group isotopes are described. The results are applied to the study of the left distributive quasigroups.

Встановлено критерій гомоморфізму, описано нормальні конгруентності ізотопів груп. Знайдено критерій ізоморфізму, виділено методи опису ізотопів з точністю до ізоморфізму. Виділено підмножини, які є підквазігрупами групового ізотопу. Описано підквазігрупи деяких класів групових ізотопів. Одержані результати застосовано до вивчення ліводистрибутивних квазігруп.

Ця стаття є заключною частиною роботи (див. [20, 21]) автора по дослідженню ізотопів груп. Нумерація теорем, лем, формул і т. д. суцільна в усіх трьох статтях.

6. Гомоморфізми та конгруенції. Оскільки клас всіх ізотопів груп є многовидом, то гомоморфний образ групового ізотопу є також груповим ізотопом. Вияснимо, за яких умов відображення φ множини Q буде гомоморфізмом групового ізотопу $(G; g)$ в $(Q; f)$, канонічні розклади яких позначимо через

$$g(x, y) = b \cdot \beta_1 x_1 \cdot \beta_2 x_2, \quad f(x, y) = a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \tag{40}$$

Нейтральні елементи груп $(G; \cdot)$ та $(Q; +)$ позначимо відповідно через e, 0. Нагадаємо, що $\beta_1 e = \beta_2 e = e$ та $\alpha_1 0 = \alpha_2 0 = 0$.

Вияснимо спочатку цю ситуацію для гомотопії.

Теорема 12. *Для того щоб трійка відображень* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ *множини* G *в множину* Q *була гомотопією (ізотопією) групового ізотопу* $(G; g)$ *в груповий ізотоп* $(Q; f)$ *з канонічними розкладами* (40), *необхідно і достатньо, щоб існував гомоморфізм (ізоморфізм)* θ *групи* $(G; \cdot)$ *в групу* $(Q; +)$ *і елементи* $c_1, c_2, c \in Q$ *такі, що* $\varphi = R_c\theta$, $\theta\beta_1(x) = c - \alpha_2 c_2 - \alpha_1 c_1 + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2 c_2 - c$, $\theta\beta_2(x) = c - \alpha_2 c_2 + \alpha_2\varphi_2(x) - c$, $\theta b = a + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + c$ *для всіх* x *із* G.

Доведення. Згідно з лемою 1 з гомотопності даної трійки відображень випливає лінійність відображення φ, тобто $\varphi = R_c\theta$ для деякого елемента c із Q та гомоморфізму θ групи $(G; \circ)$ в групу $(Q; +)$, який буде ізоморфізмом, коли принаймні одне з відображень φ, φ_1, φ_2 бієктивне. Отже, гомотопність між зазначеними ізотопами виражається співвідношеннями

$$\theta b + \theta\beta_1(x) + \theta\beta_2(y) + c = a + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(y),$$

з якого при $x = y = e$, $y = e$ та $x = e$ випливають необхідні рівності. Навпаки, нехай виконуються співвідношення теореми, тоді

$$\begin{aligned}\varphi g(x, y) &= \theta(b \cdot \beta_1 x \cdot \beta_2 y) + c = \theta b + \theta\beta_1 x + \theta\beta_2 y + c = \\ &= (a + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 - c) + (c - \alpha_2 c_2 - \alpha_1 c_1 + \alpha_1\varphi_1 x + \alpha_2 c_2 - c) + \\ &+ (c - \alpha_2 c_2 + \alpha_2\varphi_2 y - c) + c = a + \alpha_1\varphi_1 x + \alpha_2\varphi_2 y = f(\varphi_1 x, \varphi_2 y).\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Поняття гомотопії та ізотопії в певній мірі втрачає інтерес для групових ізотопів, що випливає з наступних чотирьох наслідків.

Наслідок 24. *Всі гомотопії (ізотопії)* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ *групового ізотопу* $(G; g)$ *в груповий ізотоп* $(Q; f)$ *(див.* (40)) *описуються рівностями*

$$\varphi_1 x = \alpha_1^{-1}(-a + \theta\beta_1 x - t), \quad \varphi_2 x = \alpha_2^{-1}(t + \theta\beta_2 x + c), \quad \varphi x = \theta x + c,$$

© Ф. М. СОХАЦЬКИЙ, 1996

де θ — *гомоморфізм (ізоморфізм) групи* $(G;\cdot)$ *в групу* $(Q;+)$, c, t — *елементи групи* $(Q;+)$.

Наслідок 25. *Будь-яка гомотопія (ізотопія) групових ізотопів розкладається в композицію гомоморфізму (ізоморфізму) та ізотопії. Точніше, при позначеннях наслідку* 24 *виконується рівність*

$$(\varphi_1;\varphi_2,\varphi)=(\alpha_1^{-1}L_a^{-1},\alpha_2^{-1},\varepsilon)(R_t^{-1}R_c^{-1},L_t,\varepsilon)(R_c\theta,R_c\theta,R_c\theta)(\lambda_b\beta_1,\beta_2,\varepsilon),\quad(40)$$

де $L_a x=a+x$, $R_c y=y+c$, $\lambda_b=bx$.

Наслідок 26. *Гомотопія (ізотопія) одного групового ізотопу в інший існує точно тоді, коли існує гомоморфізм (ізоморфізм) між групами, яким вони ізотопні.*

Наслідок 27. *Ізотопне замикання гомоморфно замкненого класу груп буде гомотопно замкненим класом квазігруп.*

Із теореми 12 отримуємо критерій гомоморфності довільного відображення ізотопів груп. Критерій ізоморфності ізотопів груп незалежно одержав також В. І. Ізбаш [16]. В загальному вигляді ми тут наведемо його лише для канонічних розкладів, з якого, проте, легко отримати загальний випадок.

Наслідок 28. *Для того щоб відображення* φ *множини* G *в множину* Q *було гомоморфізмом (ізоморфізмом) групового ізотопу* $(G;g)$ *в груповий ізотоп* $(Q;f)$ *(див.* (40)), *необхідно і достатньо, щоб для серії співвідношень* а) $\varphi=R_c\theta$, $\theta b=a+\alpha_1 c+\alpha_2 c-c$,

$$\theta\beta_1 x = c-\alpha_2 c-\alpha_1 c+\alpha_1(\theta x+c)+\alpha_2 c-c,\quad \theta\beta_2 x = c-\alpha_2 c+\alpha_2(\theta x+c)-c$$

існували гомоморфізм (ізоморфізм) θ *групи* $(G;\cdot)$ *в групу* $(Q;+)$ *і елемент* c *із* Q, *які перетворюють їх в істинні висловлення. Те ж саме вірне й для такої серії співвідношень:* б) $\varphi=L_c\theta$, $\theta b=-c+a+\alpha_1 c+\alpha_2 c$,

$$\theta\beta_1 x = -\alpha_2 c-\alpha_1 c+\alpha_1(c+\theta x)+\alpha_2 c,\quad \theta\beta_2 x = -\alpha_2 c+\alpha_2(c+\theta x).\quad(41)$$

Доведення. Пункт а) цього твердження випливає із теореми 12 при $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, а п. б) — із п. а) з точністю до позначення гомоморфізму, а саме після заміни θ на $I_c^{-1}\theta$, де $I_c=-c+x+c$.

Знайдемо опис всіх нормальних конгруенцій групового ізотопу, тобто конгруенцій сигнатури трьох операцій $(\cdot,/,\backslash)$.

Теорема 13. *Відношення* π *є нормальною конгруенцією групового ізотопу* $(G;g)$ *із канонічним розкладом* (40) *тоді і тільки тоді, коли* π *є конгруенцією групи* $(G;\cdot)$ *і для будь-якого* x *виконуються рівності*

$$\beta_1(x\cdot H)=(\beta_1 x)\cdot H,\quad \beta_2(x\cdot H)=(\beta_2 x)\cdot H,\quad(42)$$

де $H=\pi(e)$ — *нормальна підгрупа групи* $(G;\cdot)$, *яка визначає* π.

Доведення. Нехай π — конгруенція групового ізотопу $(G;g)$ і φ — відповідний гомоморфізм, наприклад, на групоїд $(Q;f)$, який згідно з наслідком 21 є груповим ізотопом, канонічний розклад якого позначимо рівністю (40). Тоді за наслідком 24 $\varphi=R_c\theta$ для деякого гомоморфізму θ групи $(G;\cdot)$ в групу $(Q;+)$ і елемента c із Q, і тому рівності $\varphi x=\varphi y$ та $\theta x=\theta y$ рівносильні. Зокрема, це означає, що π є конгруенцією групи $(G;\cdot)$, яка визначається нормальною підгрупою

$$H=\operatorname{Ker}\theta=\{x\mid\theta x=\theta e\}=\{x\mid\varphi x=\{x\mid\varphi x=\varphi e\}=\operatorname{Ker}\varphi=\pi(e).$$

Нормальність конгруенції π означає, що в рівності

$$g(x\cdot H,y\cdot H)=z\cdot H$$

будь-які два із трьох класів xH, yH, zH однозначно визначають третій. Інакше кажучи, в рівності

$$g(x \cdot h_1, y \cdot h_2) = z \cdot h_3$$

будь-які два елементи із трьох h_1, h_2, h_3, що лежать в множині H, однозначно визначають третій елемент, який також лежить в множині H. Зокрема, при $h_1 = h_3 = e$ одержуємо

$$z = g(x, y \cdot c), \quad c \in H,$$

для всіх x, y із Q і для деякого елемента c із H. Тоді остання рівність запишеться у вигляді

$$g(x \cdot h_1, y \cdot h_2) = g(x, y \cdot c) \cdot h_3.$$

Оскільки $g(x, y) = b \cdot \beta_1(x) \cdot \beta_2(y)$, то

$$\beta_1(xh_1) \cdot \beta_2(yh_2) = \beta_1(x) \cdot \beta_2(yc) \cdot h_3. \tag{43}$$

Якщо в цій рівності покласти $y = c^{-1}$ та $h_2 = c$, то отримаємо залежність

$$\beta_1(xh_1) = \beta_1(x) \cdot \delta(h_1) \tag{44}$$

для всіх $x \in Q$, $h_1 \in H$ та для деякої перестановки δ множини H. Зокрема, при $x = e$ маємо $\beta_1 = \delta$. Отже, для всіх $x \in Q$, $h \in H$

$$\beta_1(x \cdot h) = \beta_1(x) \cdot \beta_1(h),$$

і, крім того, $\beta_1(H) = H$. Враховуючи ці залежності, рівність (43) запишемо у вигляді

$$\beta_1(h_1) \cdot \beta_2(yh_2) = \beta_2(yc) \cdot h_3,$$

яка при $y = c^{-1}$ та $h_1 = e$ дає залежність

$$\beta_2(c^{-1}h_2) = \gamma_1(h_2)$$

для всіх $h_2 \in H$ і для деякої перестановки γ_1 множини H, тобто $\beta_2(h) = \gamma_1(ch)$. Це означає, що $\beta_2(H) = H$.

Навпаки, нехай H — нормальна підгрупа групи G, для якої істинні співвідношення (42). Вони, зокрема, означають, що перетворення β_1, β_2 на множині G/H визначають підстановки, тому залежність

$$h(xH \cdot yH) = bH \cdot \beta_1(xH) \cdot \beta_2(yH)$$

визначає ізотоп $(G/H; h)$ групи G/H. З урахуванням рівності (42) та нормальності підгрупи H остання залежність означає виконання рівностей

$$h(xH \cdot yH) = (b \cdot \beta_1 x \cdot \beta_2 y)H = g(x, y)H,$$

які, в свою чергу, свідчать про те, що натуральний гомоморфізм групи G на G/H є також гомоморфізмом групового ізотопу $(G; g)$ на груповий ізотоп $(G/H; h)$. Теорема доведена.

Зауваження 6. Користуючись наведеним тут методом міркування, можна показати, що кожна конгруенція групи $(G; \cdot)$, нормальна підгрупа якої задовольняє умови

$$\beta_1(xH) \subseteq (\beta_1 x)H \quad \text{та} \quad \beta_2(xH) \subseteq (\beta_2 x)H,$$

є конгруенцією групового ізотопу $(G; g)$ з канонічним розкладом (40), але невідомо чи всі конгруенції так визначаються.

Наслідок 29. *Інваріантні стосовно β_1 та β_2 нормальні підгрупи групи $(G; \cdot)$ і тільки вони визначають нормальні конгруенції лінійного ізотопу $(G; g)$ групи $(G; \cdot)$ з канонічним розкладом* (40).

7. Ізоморфізми та автоморфізми. Критерій ізоморфізму групових ізотопів міститься у наслідку 28. Тут ми розглянемо деякі методи опису групових ізотопів, які з нього випливають, а також наведемо ряд результатів, що стосуються автоморфізмів групових ізотопів.

Лема 12. *Із ізоморфізму групових ізотопів випливає ізоморфізм відповідних груп. І навпаки, ізоморфізм груп означає існування взаємно однозначної відповідності між множинами їх ізотопів, при якій відповідні ізотопи ізоморфні.*

Доведення. Справедливість першої частини цього твердження випливає з наслідку 24, а друга забезпечується відповідністю P, що визначається рівністю

$$P(g)(x, y) = \varphi g(\varphi^{-1} x, \varphi^{-1} y),$$

де φ — ізоморфізм між зазначеними групами, а g — ізотоп першої з них.

З цієї леми, зокрема, випливає, що з точністю до ізоморфізму досить описати ізотопи неізоморфних груп. Тому надалі розглядатимемо ізотопи однієї і тієї ж групи, яку позначатимемо через $(Q; +)$, а її ізотопи — через

$$f(x, y) = a + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad g(x, y) = b + \beta_1 x + \beta_2 y, \tag{45}$$

де $\alpha_1 0 = \alpha_2 0 = \beta_1 0 = \beta_2 0 = 0$. Тоді легко бачити, що з п. б) наслідку 28 випливає такий результат.

Наслідок 30. *Для того щоб існував гомоморфізм (ізоморфізм) лінійного ізотопу $(Q; g)$ в лінійний ізотоп $(Q; f)$, необхідно і досить існування ендоморфізму (автоморфізму) θ групи $(Q; +)$ і елемента c із Q таких, що*

$$\theta b = -\alpha_2^{-1} c + a + \alpha_1 \alpha_2^{-1} c + c, \quad \theta\beta_1 = I_c \alpha_1 \theta, \quad \theta\beta_2 = \alpha_2 \theta.$$

З результатів про канонічні розклади випливає, що кожний ізотоп $(Q; g)$ групи $(Q; +)$ взаємно однозначно визначається трійкою (b, β_1, β_2) та співвідношенням (41), де $b \in Q$, а β_1, β_2 — унітарні підстановки, тобто такі, що задовольняють умову $\beta_1 0 = \beta_2 0 = 0$. Якщо множину всіх унітарних підстановок позначити через S_0, то зазначені трійки — це точно елементи множини $M = Q \times S_0 \times S_0$. Отже, з теореми 12 випливає, що неізоморфними будуть точно ті ізотопи групи $(Q; +)$, які визначаються елементами різних орбіт при дії групи L лінійних перетворень групи $(Q; +)$ на множині M. При цьому дія визначається п. а) або п. б) наслідку 28. Оскільки група лінійних перетворень групи $(Q; +)$ є її голоморфом:

$$L \simeq \mathrm{Hol}(Q; +) \simeq (Q; +) \leftthreetimes \mathrm{Aut}(Q; +),$$

то дія групи L на множині M розпадається на послідовне виконання дій двох груп $(Q; +)$ та $\mathrm{Aut}(Q; +)$. До того ж комутують відповідні відношення еквівалентності на множині M. Звідси випливає перший метод опису ізотопів з точністю до ізоморфізму.

Метод 1. Спочатку слід описати орбіти дії однієї з груп $(Q; +)$ або $\mathrm{Aut}(Q; +)$, а потім об'єднати орбіти, які містять елементи однієї орбіти при дії іншої групи. Набір представників всіх різних класів цього розбиття визначає всі попарно неізоморфні ізотопи даної групи. Зазначимо, що з наслідку 28 випливає, що дії зазначених груп визначаються наступними співвідношеннями. Дія групи $\mathrm{Aut}(Q; +)$:

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2, a) = (\theta^{-1}\alpha_1\theta, \theta^{-1}\alpha_2\theta, \theta^{-1}a).$$

Дія групи $(Q;+)$ визначається будь-яким із співвідношень:

$$c(\alpha_1, \alpha_2, a) = (L_{c-\alpha_2 c-\alpha_1 c}R_{\alpha_2 c-c}\alpha_1 R_c, L_{c-\alpha_2 c}R_{-c}\alpha_2, a+\alpha_1 c+\alpha_2 - c),$$

$$c(\alpha_1, \alpha_2, a) = (L_{-\alpha_2 c-\alpha_1 c}R_{\alpha_2 c}\alpha_2 L_c, L_{-\alpha_2 c}\alpha_2 L_c, -c+a+\alpha_1 c+\alpha_2 c).$$

Зрозуміло, що при описі лінійних ізотопів комутативної групи отримуємо

$$c(\alpha_1, \alpha_2, a) = (\alpha_1, \alpha_2, a+(\alpha_1+\alpha_2-\varepsilon)(c)).$$

Інший метод опису ізотопів групи вимагає введення деяких понять та доведення ряду властивостей.

Означення 5. *Дві пари унітарних підстановок* (α_1, α_2), (β_1, β_2) *групи* $(Q;+)$ *назвемо ізорівними, якщо для деяких елементів* a, b *із* Q *ізотопи* $(Q;f)$ *та* $(Q;g)$, *що визначені рівностями* (45), *ізоморфні.*

Легко бачити, що введене відношення є еквівалентністю на множині $S_0 \times S_0$, а наслідок 28 дає критерій ізорівності:

зазначені в означенні пари ізорівні точно тоді, коли для деякого c із Q виконуються рівності (41). Інколи ці умови значно спрощуються. Розглянемо наступний приклад.

***Приклад* 1.** Безпосередньо із означень випливає, що в лінійних ізотопах груп унітарні підстановки канонічного розкладу є автоморфізмами групи цього розкладу. З точністю до перепозначень з п. б) наслідку 28 маємо: ізорівність пар автоморфізмів (α_1, α_2) та (β_1, β_2) рівносильна наявності елемента c та автоморфізму θ групи $(Q;+)$, для яких виконуються рівності

$$\theta\beta_1 = I_c\alpha_1\theta, \quad \theta\beta_2 = \alpha_2\theta,$$

де $I_c(x) = -c+x+c$. Тому відношення ізорівності пар автоморфізмів групи $(Q;+)$ співпадає з відношенням еквівалентності, що визначає дія спряженням групи $\mathrm{Aut}(Q;+)$ на множині $\mathrm{aut}(Q;+)\times \mathrm{Aut}(Q;+)$, де $\mathrm{aut}(Q;+)$ — група зовнішних автоморфізмів групи $(Q;+)$.

Важливість введеного поняття пояснює такий результат.

Лема 13. *Між множинами ізотопів, які визначені ізорівними парами унітарних підстановок, існує взаємно однозначна відповідність, при якій відповідні ізотопи ізоморфні.*

Доведення. Ізорівність пар (α_1, α_2) та (β_1, β_2) групи $(Q;+)$ означає згідно з наслідком 28 існування елемента c та автоморфізму θ таких, що виконуються співвідношення (41). Визначимо відображення P_1 множини $M_1 = \{(t, \alpha_1, \alpha_2) \mid t\in Q\}$ в множину $M_2 = \{(u, \beta_1, \beta_2) \mid u \in Q\}$ і P_2 множини M_2 в M_1 рівностями

$$P_1(t, \alpha_1, \alpha_2) = (\theta^{-1}(t+\alpha_1 c+\alpha_2 c-c), \beta_1, \beta_2),$$

$$P_2(u, \beta_1, \beta_2) = (\theta(u+\beta_1(-\theta^{-1}c)+\beta_2(-\theta^{-1}c)+\theta^{-1}c), \alpha_1, \alpha_2).$$

Ізоморфізм ізотопів, які визначені трійками (t, α_1, α_2) та (u, β_1, β_2), випливає із наслідку 28, а співвідношення (41) забезпечують виконання рівностей

$$P_2P_1(t, \alpha_1, \alpha_2) = (t, \alpha_1, \alpha_2), \quad P_1P_2(u, \beta_1, \beta_2) = (u, \beta_1, \beta_2).$$

Отже, відображення P_1 є шуканою бієкцією.

Означення 6. *Нехай* (α_1, α_2) *— пара унітарних підстановок групи*

$(Q; +)$. *Елементи* a, b *із* Q *назвемо* (α_1, α_2)*-ізорівними, якщо ізотопи* $(Q; f)$ *та* $(Q; g)$ *цієї групи, що визначені рівностями*

$$f(x, y) = a + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad h(x, y) = b + \alpha_1 x + \alpha_2 y,$$

ізоморфні.

Очевидно, що введене відношення є відношенням еквівалентності на множині Q, а критерій для нього випливає із наслідку 28 при $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$. Із викладеного випливає ще один метод опису ізотопів довільної групи $(Q; +)$ з точністю до ізоморфізму.

Метод 2. Вказати повний набір попарно неізорівних пар унітарних підстановок і для кожної такої пари (α_1, α_2) вказати повний набір попарно (α_1, α_2)-неізорівних елементів групи $(Q; +)$. Одержана множина трійок (a, α_1, α_2) визначає множину всіх попарно неізоморфних ізотопів групи $(Q; +)$.

При описі з точністю до ізоморфізму T-квазігруп, тобто лінійних ізотопів абелевих груп, ситуація дещо спрощується. Відношення ізоеквівалентності пар автоморфізмів співпадає з орбітами дії спряженням групи автоморфізмів комутативної групи на своєму квадраті. Якщо через $St(\varphi, \psi)$ позначити групу автоморфізмів, що комутують з φ, ψ одночасно, то кожний клас (φ, ψ)-ізоеквівалентності має вигляд

$$St(\varphi, \psi)(c) + \mu Q,$$

де $\mu = \varphi + \psi - \varepsilon$. Звідси, зокрема, випливає, що в багатьох випадках підзадачею задачі про опис ізотопів груп з точністю до ізоморфізму є задача про пару матриць. Тому задача, яку ми розглядаємо, взагалі кажучи, є „дикою". Проте для ізотопів певних класів груп можна дати вичерпну відповідь. Наприклад, в [9] знайдено повний опис з точністю до ізоморфізму лінійних ізотопів циклічних груп.

Із наслідку 28 випливає такий результат (див. також [14, 16]).

Наслідок 31. *Перетворення* φ *буде автоморфізмом ізотопу* $(Q; f)$ *точно тоді, коли для деякого автоморфізму* θ *і елемента* $c \in Q$ *виконуються співвідношення* $\varphi = R_c\theta$, $-a + \theta a = \alpha_1 c + \alpha_2 c - c$, $\theta\alpha_1(x) = c - \alpha_2 c - \alpha_1 c + \alpha_1(\theta x + c) - \alpha_2 c - c$, $\theta\alpha_2(x) = c - \alpha_2 c + \alpha_2(\theta x + c) - c$.

8. Підквазігрупи. Вивчення підквазігруп в теорії квазігруп значно складніше, ніж підгруп в теорії груп, хоча б тому, що для квазігруп не виконується аналог теореми Лагранжа. Наприклад, в [2] побудована лупа п'ятого порядку, як має підлупу другого порядку. Проте залежність між порядком підквазігрупи і порядком квазігрупи існує. Відомо, що порядок власної підквазігрупи не більше половини порядку всієї квазігрупи. Підквазігрупи лінійних ізотопів вивчались в [15, 16].

Лема 14. *Якщо* $xy = \mu_0 x + 00 + \mu_1 x$, *то*

$$z / y = \mu_0^{-1}(z - \mu_1 y - 00), \quad x \backslash z = \mu_1^{-1}(-00 - \mu_0 x + z).$$

Доведення безпосередньо випливає із зауваження 3 вступу.

Теорема 14. *Для того щоб підмножина* H *групового ізотопу* $(Q; \cdot)$ *з середнім* 0*-канонічним розкладом* $x \cdot y = \mu_0 x + 00 + \mu_1 x$ *була його підквазігрупою, необхідно і досить існування підгрупи* $(G; +)$ *групи* $(Q; +)$ *та елемента* a *таких, що* $aa \in H$, $H = G + a = a + G_1$,

$$\mu_0(G + a) = G + \mu_0 a, \quad \mu_1(a + G_1) = \mu_1 a + G_1,$$

де $G_1 = -a + G + a$.

Доведення. Нехай $(H; \cdot)$ — підквазігрупа квазігрупи $(Q; \cdot)$ і a — будь-який її елемент. Розглянемо a-канонічний розклад $xy = \varphi x \circ aa \circ \psi y$. За наслідком 11 справедливі такі співвідношення:

$$xy = x - a + y, \quad aa = \mu_0 a + 00 + \mu_1 a,$$

$$\varphi x = \mu_0 x - \mu_0 a + a, \quad \varphi y = a - \mu_1 a + \mu_1 y.$$

Зокрема, перша рівність означає, що підстановка R_a^{-1}, де $R_a x = x + a$, є ізоморфізмом між групами $(Q; \circ)$ та $(Q; +)$. Оскільки згідно з лемою 8 та теоремою 5 підмножина H є підгрупою групи $(Q; \circ)$, то $G = R_a^{-1} H$ є підгрупою групи $(Q; +)$, тому $H = G + a$. Знову з теореми 5 випливає, що підмножина H інваріантна щодо підстановок φ та ψ, що означає виконання рівностей

$$G + a = H = \varphi H = \mu_0 H - \mu_0 a + a, \quad G + a = H = \mu_1 H = a - \mu_1 a + \mu_1 H,$$

з яких отримуємо необхідні залежності.

Навпаки, нехай виконуються співвідношення теореми, тоді

$$H \cdot H = \mu_0 H + 00 + \mu_1 H = \mu_0 (G + a) + 00 + \mu_1 (a + G_1) =$$

$$= G + \mu_0 a + 00 + \mu_1 a + G_1 = G + aa + G_1 = G + aa - a + G + a.$$

Через те, що $a^2, a \in H = G + a$, маємо $a^2 - a \in G$, і тому $H \circ H \subseteq H$. Далі скористаємось лемою 14:

$$H / H = \mu_0^{-1} (H - \mu_1 H - 00) = \mu_0^{-1} (H - \mu_1 (a + G_1) - 00) =$$

$$= \mu_0^{-1} (H + G_1 - \mu_1 a - 00) = \mu_0^{-1} (a + G_1 + G_1 - \mu_1 a - 00) \subseteq$$

$$\subseteq \mu_0^{-1} (a + G_1 - \mu_1 a - 00) = \mu_0^{-1} (G + a - a^2 + \mu_0 a) =$$

$$= \mu_0^{-1} (G + \mu_0 a) = \mu_0^{-1} \mu_0 (G + a) = H,$$

$$H \backslash H = \mu_1^{-1} (-00 - \mu_0 H + H) = \mu_1^{-1} (-00 - \mu_0 a + G + G + a) \subseteq$$

$$\subseteq \mu_1^{-1} (\mu_1 a - a^2 + a + G_1) = \mu_1^{-1} (\mu_1 a + G_1) = \mu_0^{-1} \mu_1 (a + G_1) = H.$$

Отже, множина H замкнена відносно операцій $(\cdot, /, \backslash)$, тому кожне з рівнянь $xd = b$, $dy = b$ має розв'язки в множині, як тільки $b, d \in H$. Єдиність цих розв'язків випливає з того, що $(Q; \cdot)$ — квазігрупа. Теорема доведена.

Наслідок 32. *Підмножина H групового ізотопу є його підквазігрупою тоді і тільки тоді, коли вона є підгрупою деякої групи канонічного розкладу і інваріантна відносно коефіцієнтів лівого (правого) канонічного розкладу над цією групою.*

Доведення. Нехай $(H; \cdot)$ — підквазігрупа і a — будь-який її елемент. Тоді з леми 8 випливає, що $(H; \cdot)$ є підгрупою групи $(Q; +)$ a-канонічного розкладу, і за теоремою 5 вона інваріантна відносно коефіцієнтів цього розкладу. Навпаки, нехай підмножина H є підгрупою групи даного лівого канонічного розкладу $xy = \lambda_0 x + \lambda_1 y$. Якщо $xy = \mu_0 x + 00 + \mu_1 x$ — відповідний середній канонічний розклад, то $\lambda_1 = \mu_1$, і $\lambda_0 H = \lambda_1 H = H$, тоді $\mu_0 H = \mu_1 H = H$, і тоді за теоремою 14 підгрупа H є підквазігрупою групового ізотопу $(Q; \cdot)$. З теореми 14 випливає таке твердження.

Наслідок 33. *Будь-яка підквазігрупа групового ізотопу є класом суміжності деякої підгрупи групи канонічного розкладу. Порядок підквазігрупи скінченного групового ізотопу ділить порядок ізотопу.*

Друга частина цього твердження вперше встановлена в [16]. Обернене твердження до першого речення наслідку, взагалі кажучи, невірне, проте існують ізотопи, для яких це має місце. Деякі з них описуються таким очевидним наслідком з теореми 14.

Наслідок 34. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— лінійний ізотоп і* $xy = \mu_0 x + 00 + \mu_1 y$ *— його середній канонічний розклад. Тоді визначений елементом* a *клас суміжності за нормальною підгрупою* G *групи* $(Q;+)$ *буде підквазігрупою ізотопу* $(Q;\cdot)$ *точно тоді, коли група* G *інваріантна відносно автоморфізмів* μ_0 *та* μ_1 *і виконується умова* $aa - a \in G$.

9. Ліводистрибутивні ізотопи груп. Для прикладу застосуємо одержані результати до вивчення ліводистрибутивних ізотопів груп.

Право- і ліводистрибутивними квазігрупами називають квазігрупи, що задовольняють відповідно тотожності

$$xy \cdot z = xz \cdot yz, \quad x \cdot yz = xy \cdot xz.$$

При виконанні обох тотожностей в квазігрупі її називають дистрибутивною. Оскільки всі вони ідемпотентні, то нетривіальних ліводистрибутивних луп не існує. Кожна дистрибутивна квазігрупа ізотопна комутативній лупі Муфанг [2]. Тут ми розглянемо ліводистрибутивні і дистрибутивні квазігрупи, які є ізотопами груп.

Теорема 15. *Груповий ізотоп дистрибутивний зліва (справа) тоді і тільки тоді, коли він ідемпотентний і лінійний справа (зліва). Груповий ізотоп дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли він є ідемпотентною абелевою (тобто медіальною) квазігрупою.*

Доведення. З тотожності лівої дистрибутивності випливає тотожність $x \cdot xx = xx \cdot xx$, тому ліводистрибутивна квазігрупа ідемпотентна. Після застосування наслідку 13 до тотожності лівої дистрибутивності отримаємо праву лінійність групового ізотопу. Обернене твердження одержуємо простим обчисленням.

Отже, груповий ізотоп дистрибутивний точно тоді, коли він ідемпотентний і лінійний. Оскільки дистрибутивна квазігрупа ізотопна комутативній лупі Муфанг і всі лупи, що ізотопні груповому ізотопові, ізоморфні, то дистрибутивний груповий ізотоп є лінійним ізотопом абелевої групи, тобто абелевою квазігрупою. Більше того, вона медіальна. Дійсно, з ідемпотентності випливає, що канонічний розклад має вигляд

$$x \cdot y = (\varepsilon - \varphi)(x) + \varphi y, \tag{46}$$

тобто $x \cdot y = x0 + 0y$. Комутативність автоморфізмів $\varepsilon - \varphi$ та φ очевидна.

З проведених міркувань випливає такий наслідок.

Наслідок 35. *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *є ліводистрибутивним ізотопом деякої групи тоді і тільки тоді, коли співвідношення* (46) *вірне для деякої групи* $(Q;+)$ *і такого її автоморфізму* φ, *що* $\varepsilon - \varphi$ *є підстановкою множини* Q.

Якщо для квазігрупи вірне співвідношення (46), то будемо говорити, що вона визначена над квазігрупою автоморфізмом φ. Оскільки в абелевій групі перетворення $\varepsilon - \varphi$ завжди є ендоморфізмом, як тільки φ — автоморфізм, то над абелевою групою квазігрупи з односторонньою дистрибутивністю визначити неможливо, тобто всі вони дистрибутивні. А над неабелевою групою неможливо визначити дистрибутивну квазігрупу, тобто $\varepsilon - \varphi$ не може бути автоморфізмом, коли φ є ним.

Нехай $(G; g)$, $(Q; f)$ — ліводистрибутивні групові ізотопи з канонічними розкладами

$$g(x, y) = (\varepsilon - \psi)(x) + \psi y, \quad x \cdot y = (\varepsilon - \varphi)(x) + \varphi y. \tag{47}$$

Очевидними наслідками цієї теореми є такі результати.

Наслідок 36. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— ліводистрибутивний груповий ізотоп з кано-*

нічним розкладом (46). *Тоді напівгрупа всіх ендоморфізмів (група всіх автоморфізмів) квазігрупи* $(Q;\cdot)$ *є розширенням групи* $(Q;+)$ *групою ендоморфізмів (відповідно автоморфізмів) групи* $(Q;+)$, *кожний з яких комутує з* φ.

Наслідок 37. *Лівودистрибутивні групові ізотопи* $(Q;g)$ *і* $(Q;f)$ *з канонічними розкладами* (47) *ізоморфні тоді і тільки тоді, коли* $\theta\psi = \varphi\theta$ *для деякого автоморфізму* θ *групи* $(Q;+)$.

Наслідок 38. *Якщо група автоморфізмів деякої групи комутативна, то визначені на ній лівودистрибутивні квазігрупи попарно не ізоморфні.*

Користуючись теоремою 14, встановимо справедливість такого результату.

Теорема 16. *Нехай* $(Q;\cdot)$ — *лівودистрибутивний груповий ізотоп з канонічним розкладом* (46). *Підквазігрупами квазігрупи* $(Q;\cdot)$ *є точно всі ліві класи суміжності за підгрупами групи* $(Q;+)$, *які інваріантні відносно* φ.

Доведення. Нехай H — підквазігрупа ізотопу $(Q;\cdot)$. Тоді за теоремою 14 існує підгрупа G_1 і елемент a із Q такі, що

$$H = a + G_1, \quad \varphi(a+G_1) = \varphi a + G_1,$$

тобто $\varphi G_1 = G_1$. Навпаки, нехай виконується остання рівність і $H = a + G_1 = G + a$. Оскільки квазігрупа $(Q;\cdot)$ ідемпотентна, то елемент $a\cdot a = a$ лежить в множині H. Крім того, маємо такі залежності:

$$\varphi(a+G_1) = \varphi a + \varphi G_1 = \varphi a + G_1,$$

$$(\varepsilon-\varphi)(G+a) = (\varepsilon-\varphi)(a+G_1) = a + G_1 - \varphi G_1 - \varphi a =$$

$$= a + G_1 - \varphi a = G + a - \varphi a = G + (\varepsilon - \varphi)(a).$$

Отже, за теоремою 14 підмножина H є підквазігрупою квазігрупи $(Q;\cdot)$.

Такими ж міркуваннями одержуємо наступну теорему.

Теорема 17. *Нормальною конгруенцією лівودистрибутивного групового ізотопу* $(Q;\cdot)$ *є точно конгруенція групи* $(Q;+)$, *яка визначається нормальною підгрупою* G *групи* $(Q;+)$ *з умовою* $\varphi G = G$.

21. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп. II // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1692–1703.

Одержано 16.06.94