УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ*

The conditions of the existence of the periodic solutions of system of nonlinear difference equations with continuous argument are obtained.

Одержані умови існування періодичних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом.

Разностные уравнения вида

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in (a, b) \subseteq R = (-\infty, +\infty)$, $f\colon (a, b) \times R^m \to R^m$, были объектом исследования многих математиков (достаточно полную библиографию можно найти в [1, 2]). При этом особые усилия направлялись на установление условий существования различного рода решений таких уравнений. В частности, для широких классов уравнений вида (1) установлены условия существования и единственности периодических решений [3–6]. Тем не менее, многие задачи теории разностных уравнений вида (1), касающиеся вопросов существования периодических решений, исследованы недостаточно. В настоящей работе получены решения некоторых из них.

1. Существование решений. Необходимые и достаточные условия существования периодических решений. Рассмотрим систему уравнений (1) в предположении, что $t \in R^+ = [0, +\infty)$, и $f(t, x)$ — однозначно определенная вектор-функция, конечная при любых $t \in R^+$, $x \in R^m$. Под решением системы (1) будем понимать однозначно определенную конечную при $t \in R^+$ вектор-функцию $x(t)$, обращающую (1) в тождество.

Поскольку для любого $t \in R^+$ имеем $t - [t] = \tau \in [0, 1)$, где $[t]$ — целая часть t, то непосредственно из (1) получаем

$$x(t) = x(\tau + [t]) = f^{[t]}(\tau + [t], x(\tau)), \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} f^0(\tau, x(\tau)) \doteq x(\tau), \\ f^n(\tau + n, x(\tau)) = f(\tau + n - 1, f^{n-1}(\tau + n - 1, x(\tau))), \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, для однозначного определения решения системы уравнений (1) при всех $t \in R^+$ достаточно задать его значение на отрезке $[0, 1)$ (начальное условие).

Теорема 1. *Существует семейство решений системы уравнений* (1) *вида*

$$x(t) = f^{[t]}(\tau + [t], \varphi(\tau)), \tag{4}$$

где $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau))$, $\varphi_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$, *— произвольные функции, конечные при* $\tau \in [0, 1)$.

Доказательство. Действительно, поскольку

$$x(t+1) = f^{[t]+1}(\tau + [t] + 1, \varphi(\tau)),$$

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Объединенного фонда правительства Украины и Международного научного фонда.

$$f(\tau+[t], f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))) = f^{[t]+1}(\tau+[t]+1, \varphi(\tau)),$$

то вектор-функция $x(t)$, определяемая соотношением (4), является решением системы уравнений (1).

Из (4) следует, что свойства решений системы уравнений (1) зависят от свойств вектор-фунций $f(t, x)$ и $\varphi(t)$. Тем не менее, если вектор-функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t \in R^+$, $x \in R^m$, а $\varphi(t)$ — при $t \in [0, 1)$, то любое решение $x(t)$, определяемое соотношением (4), не является непрерывным при всех $t \in R^+$. Поэтому представляют несомненный интерес условия, гарантирующие существование решений определенного класса (непрерывных, дифференцируемых и др.).

В дальнейшем функцию $f(t)$ будем называть кусочно-непрерывной при $t \in R^+$, если она является непрерывной при всех $t \in R^+$ за исключением, может быть, точек $t = 1, 2, \ldots$, в которых она имеет разрывы первого рода слева.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t \in R^+$, $x \in R^m$, а вектор-функция $\varphi(t)$ — при $t \in [0, 1)$. Кроме того, предположим, что $\varphi(1-0) = \varphi^1 \neq \infty$ и выполняется одно из условий: 1) $\varphi^1 = f(0, \varphi_0)$; 2) $\varphi^1 \neq f(0, \varphi_0)$, где $\varphi_0 = \varphi(0)$. Тогда система уравнений (1) имеет непрерывное при $t \in R^+$ решение, удовлетворяющее условию*

$$x(\tau) = \varphi(\tau) \quad \text{при} \quad \tau \in [0, 1) \tag{5}$$

в случае 1 и кусочно-непрерывное решение в случае 2.

Доказательство. Так как согласно теореме 1 вектор-функция $x(t) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))$ является решением системы уравнений (1), удовлетворяющим условию (5), то остается показать, что оно является непрерывным в случае 1 и кусочно-непрерывным в случае 2. В силу предположений теоремы вектор-функция $x(t) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))$ является непрерывной при всех $t \in R^+$ за исключением точек $t = 1, 2, \ldots$, в которых она может иметь разрывы первого рода слева. Пусть вектор-функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию 1. Тогда $x(1-0) = \varphi(1-0) = \varphi^1$, $x(1) = f(0, \varphi_0)$ и, таким образом, $x(1-0) = x(1)$, т. е. вектор-функция $x(t) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))$ является непрерывной в точке $t = 1$. Аналогично можно показать ее непрерывность в точках $t = 2, 3, \ldots$. Теорема доказана.

Если вектор-функция $f(t, x)$ является N-периодической по t (N — целое положительное число), то нетрудно убедиться, что не все решения системы (1), определяемые формулой (4), являются N-периодическими. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t \in R^+$, $x \in R^m$, и N-периодической по t, а вектор-функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t \in [0, 1)$. Тогда для существования непрерывного N-периодического решения системы уравнений (1), удовлетворяющего условию (5), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\tau)$ удовлетворяла соотношениям*

$$\begin{gathered}\varphi(1-0) = \varphi^1 \neq \infty, \\ \varphi^1 = f(0, \varphi_0); \\ f^N(\tau+N, \varphi(\tau)) = \varphi(\tau).\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\gamma(t)$ — некоторое непрерывное при $t \in R^+$ N-периодическое решение системы (1), удовлетворяющее условию (5), и, таким образом, при всех $t \in R^+$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\gamma(t+1) \equiv f(t, \gamma(t)),\\ \gamma(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, 1),\\ \gamma(t+N) = \gamma(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Так как $\gamma(0) = \varphi_0$, $\gamma(1-0) = \gamma(1) \neq \infty$, $\gamma(1) = f(0, \gamma(0))$, то $\varphi(1-0) = = \gamma(1-0) = \gamma(1) = \varphi^1 \neq \infty$, $\varphi^1 = f(0, \varphi_0)$. Кроме того, непосредственно из (7) следует

$$\begin{gathered}\gamma(\tau+1) = f(\tau, \varphi(\tau)) = f^1(\tau+1, \varphi(\tau)),\\ \gamma(\tau+2) = f(\tau+1, f^1(\tau+1, \varphi(\tau))) = f^2(\tau+2, \varphi(\tau)),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma(\tau+N) = f(\tau+N-1, f^{N-1}(\tau+N-1, \varphi(\tau))) = f^N(\tau+N, \varphi(\tau)).\end{gathered}$$

Поскольку $\gamma(\tau+N) = \gamma(\tau) = \varphi(\tau)$, то из последнего соотношения получаем $\varphi(\tau) = f^N(\tau+N, \varphi(\tau))$. Тем самым необходимость условий (6) доказана.

Достаточность. Предположим выполненными условия (6) и покажем, что вектор-функция $x(t) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))$ является непрерывным при $t \in R^+$ N-периодическим решением системы уравнений (1), удовлетворяющим условию (5).

Поскольку вектор-функция $x(t) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau))$ является непрерывным при $t \in R^+$ решением системы (1), удовлетворяющим условию (5) (теорема 2), то остается показать, что $x(t+N) = x(t)$. В самом деле, в силу (6) имеем

$$\begin{gathered}x(\tau+N) = f^N(\tau+N, \varphi(\tau)) = \varphi(\tau),\\ x(\tau+N+1) = f^{N+1}(\tau+N+1, \varphi(\tau)) =\\ = f(\tau+N, f^N(\tau+N, \varphi(\tau))) = f(\tau, \varphi(\tau)) = f^1(\tau+1, \varphi(\tau)),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x(\tau+N+[t]) = f^{N+[t]}(\tau+N+[t], \varphi(\tau)) =\\ = f(\tau+N+[t]-1, f^{N+[t]-1}(\tau+N+[t]-1, \varphi(\tau))) =\\ = f(\tau+[t]-1, f^{[t]-1}(\tau+[t]-1, \varphi(\tau))) = f^{[t]}(\tau+[t], \varphi(\tau)) = x(t).\end{gathered}$$

Теорема 3 доказана.

2. Достаточные условия существования и единственности периодического решения одного класса разностных уравнений. Рассмотрим теперь разностное уравнение (1) (случай $m=1$) и предположим выполненными следующие условия:

1) функция $f(t,x)$ непрерывна при $t \in R$, $x \in R$ и имеет непрерывную производную по x;

2) при всех $t \in R$, $x \in R$ выполняются соотношения $|f(t,0)| \le q$, $1 < < l \le f'_x(t,x) \le L$;

3) $f(t,x)$ является T-периодической по t.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1–3. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное непрерывное* T*-периодическое решение.*

Доказательство проведем с помощью метода последовательных приближений. При этом последовательные приближения $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, определим следующим образом:

$$\begin{gathered} f(t, x_0(t)) = 0, \\ f(t, x_n(t)) = x_{n-1}(t+1), \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{8}$$

Соотношения (8) являются рекуррентной системой алгебраических уравнений относительно функций $x_n(t)$. Покажем, что при выполнении условий 1–3 существуют непрерывные T-периодические функции $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, являющиеся решениями этих уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t, y) = 0 \tag{9}$$

и докажем, что если функция $\varphi(t, y)$ удовлетворяет условиям 1–3, то последовательность функций $\{y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где

$$\begin{gathered} y_0 = 0, \\ y_n = y_{n-1} - \frac{1}{l+L}\varphi(t, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{10}$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной T-периодической функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (9).

Рассуждая по индукции, нетрудно показать, что функции y_n, $n = 0, 1, \ldots$, являются непрерывными T-периодическими и удовлетворяют условию

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le M\alpha^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $M = (l+L)^{-1}q$, $\alpha = (l+L)^{-1}L$. Отсюда непосредственно вытекает, что последовательность функций $\{y_n\}$ равномерно сходится к некоторой непрерывной T-периодической функции $y(t)$. Переходя в (10) к пределу при $n \to \to \infty$, убеждаемся, что $y(t)$ является решением уравнения (9).

Допустим, что уравнение (9) имеет еще одно непрерывное T-периодическое решение $z(t)$. Тогда $\varphi(t, y) - \varphi(t, z) = 0$. Отсюда в (силу (2)) получаем $\varphi'_x(t, \theta(t))(y(t) - z(t)) = 0$, где $y(t) \le \theta(t) \le z(t)$, что возможно лишь в случае $y(t) = z(t)$.

Таким образом, уравнение (9) имеет единственное непрерывное при $t \in R$ T-периодическое решение, удовлетворяющее условию

$$|y(t)| \le ql^{-1}. \tag{11}$$

Поскольку при всех $n = 0, 1, \ldots$ уравнения (8) имеют вид (9), причем $\varphi(t, x_n) = f(t, x_n) - x_{n-1}(t)$, то последовательно можно доказать существование единственного непрерывного T-периодического решения уравнения (8) при любом $n \ge 0$. Остается, таким образом, показать, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$, однозначно определяемых уравнениями (8), равномерно сходится к единственному непрерывному T-периодическому решению уравнения (1).

Докажем, что при всех $n \ge 1$ выполняется оценка

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \tilde{M}\Delta^n, \tag{12}$$

где $\tilde{M} = l^{-1}q$, $\Delta = l^{-1}$.

В силу (8) и условия 2 при $n = 1$ имеем

$$|x_0(t+1)| \le |f(t, x_1(t)) - f(t, x_0(t))| =$$
$$= |f'_x(t, \theta(t))||x_1(t) - x_0(t)| \ge l|x_1(t) - x_0(t)|.$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le \frac{q}{l}\frac{1}{l} = \tilde{M}\Delta,$$

и, таким образом, оценка (12) имеет место при $n = 1$. Предположим, что оценка (12) уже установлена для некоторого $n \ge 1$ и покажем, что она не изменится при переходе от n к $n+1$. В самом деле, поскольку в силу (8) имеем

$$|x_n(t+1) - x_{n-1}(t+1)| = |f(t, x_{n+1}(t)) - f(t, x_n(t))| =$$
$$= |f'_x(t, \theta(t))||x_{n+1}(t) - x_n(t)|, \quad x_{n+1}(t) \le \theta(t) \le x_n(t),$$

то, принимая во внимание условие 2 и соотношение (12), находим $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \le \tilde{M}\Delta^{n+1}$. Таким образом, оценка (12) справедлива при всех $n \ge 1$ Тогда последовательность непрерывных T-периодических функций x_n, $n = 0, 1, \ldots$, однозначно определяемых уравнениями (8), равномерно сходится к некоторой непрерывной T-периодической функции $x(t)$. Переходя в (8) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что функция $x(t)$ является решением уравнения (1).

Предположим, что уравнение (1) имеет еще одно непрерывное T-периодическое решение $y(t)$, причем $x(t) \ne y(t)$. Тогда

$$|x(t+1) - y(t+1)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| =$$
$$= |f'_x(t, \theta(t))||x(t) - y(t)| \ge l|x(t) - y(t)|, \quad x(t) \le \theta(t) \le y(t).$$

Отсюда следует

$$\max_t |x(t) - y(t)| \le 0,$$

что возможно лишь в случае $x(t) = y(t)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. Естественно ожидать, что при соответствующих ограничениях на вектор-функцию $f(t, x)$ аналогичная теорема будет справедливой и в случае $m > 1$. Это и в самом деле так. При этом существенно отличается лишь условие 2. Например, пусть вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям типа 1, 3, а вместо условия 2 — условию:

2′) при всех $t \in R$, $x \in R^m$ выполняются соотношения

$$|f_i(t, 0)| \le q,$$

$$1 < l \le \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} \le L,$$

$$\left\| \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} \right\| \le \varepsilon, \quad i \ne j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $q = \text{const} > 0$, ε — достаточно малая положительная постоянная. Тогда существует единственное непрерывное T-периодическое решение системы уравнений (1).

1. *Guldberg A., Wallenberg G.* Theorie der linearen differenzengleichungen. – Berlin, 1911. – 288 s.
2. *Ghermanescu M.* Ecuații funcționale. – București, 1960. – 524 p.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
4. *Колмановский В. Б., Носов И. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
6. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений дискретных разностных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **45**, № 10. – С. 1382–1387.

Получено 19.07.94