УДК 517. 9: 519. 3

В. Е. Капустян (Днепропетр. трансп. ин-т)

АСИМПТОТИКА ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

We construct and substantiate asymptotic solutions in optimal control problems for parabolic systems with the control, which depends only on time and has local restrictions.

Збудовано та обгрунтовано асимптотичні розв'язки в задачах оптимального керування параболічними системами, коли керування залежить тільки від часу і має локальні обмеження.

В работах [1–3] найдены полные асимптотические решения в задачах оптимального ограниченного управления эллиптическими системами. При этом, если на управление накладываются локальные ограничения [1–2], то в области определения решений возникают внутренние переходные слои, которые требуют корректного описания и обоснования; в случае же глобальных ограничений [3] задача декомпозируется на две: управление принадлежит внутренности шара или его границе и при этом возникает проблема асимптотического построения решения задачи управления с ограничением типа равенства. Для параболических сингулярно возмущенных оптимальных задач следует различать два случая: 1) вырождается весь дифференциальный оператор; 2) вырождается только пространственная его часть. В случае 1 характер асимптотик по структуре аналогичен [4] эллиптическим задачам; во втором случае для глобальных управлений полные результаты приведены в работе [5], излагаемые ниже результаты для локально ограниченных управлений характерны тем, что удается построить время схода управления с ограничения до любого порядка асимптотической точности, а последнее позволяет провести нужные обоснования.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности. Пусть в области $\overline{Q}_T = \{(x, t)\colon x \in \overline{\Omega}, t \in [t_0, T], T < \infty\}$, где Ω ($\Omega \in R^n$) имеет компактное замыкание и гладкую (класса C^∞) $(n-1)$-мерную границу $\partial\Omega$, состояние управляемой системы $y(u)$ определяется как решение задачи

$$y_t - \varepsilon^2 \Delta y = g(x) u(t), \tag{1}$$

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$y(x, t_0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi \in L_2(\Omega)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, Δ — оператор Лапласа, $g(x) \in L_2(\Omega)$.

Требуется найти $u \in U$:

$$I(u) = \inf_{v \in U} \left\{ \int_{Q_T} y^2(v)\, dx\, dt + \nu \int_{t_0}^{T} v^2(t)\, dt \right\} \quad \nu = \text{const} > 0, \tag{4}$$

где

$$U = \{ v \in L_2(t_0, T)\colon -\xi \le v(t) \le \xi,\ \xi = \text{const} > 0 \}. \tag{5}$$

Тогда единственное оптимальное управление определяется из соотношений [6]

$$\begin{gathered} y_t - \varepsilon^2 \Delta y - g(x) u(t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T; \\ y(t) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \ y(x, t_0) = \varphi(x); \\ -p_t - \varepsilon^2 \Delta p = y(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \\ p(u) = 0, \ x \in \partial\Omega; \ p(x, T) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\int_{t_0}^{T} [(g,p)+\nu u][v-u]\,dt \geq 0 \quad \forall\, v \in U; \quad y, p \in W_2^{01,1}(Q_T).$$

В силу локальности ограничений (5) задача (6) эквивалентна таким задачам:

$$(x \in \Omega,\ t \in T_1):\ \begin{cases} y_t - \varepsilon^2 \Delta y = -g(x)\xi, & (7) \\ p_t - \varepsilon^2 \Delta p = y, & (8) \\ (g,p) - \nu\xi > 0; & (9) \end{cases}$$

$$(x \in \Omega,\ t \in T_2):\ \begin{cases} y_t - \varepsilon^2 \Delta y = g(x)\xi, \\ \text{уравнение } 8, \\ (g,p) + \nu\xi < 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$(x \in \Omega,\ t \in T_3):\ \begin{cases} y_t - \varepsilon^2 \Delta y = -\nu^{-1} g(x)(g,p), \\ \text{уравнение } 8. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} -\xi, & t \in T_1, \\ -\nu^{-1}(g,\ p), & t \in T_3, \\ \xi,\ t \in T_2;\ T = \bigcup_{i=1}^{3} T_i,\ T_i \cap T_j = \varnothing, & i \neq j. \end{cases} \tag{12}$$

***Предположение* 1.** Пусть $\varphi,\, g \in C^{\infty}(\Omega)$; $\varphi = 0,\ x \in \partial\Omega$.

2. Формальные асимптотики. Внешние разложения решений задач (9)–(11) ищем стандартно [1, 2]:

$$\overline{y}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{y}_i(x,t),\ \ \overline{p}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{p}_i(x,t). \tag{13}$$

Нулевые составляющие рядов (13) удовлетворяют соотношениям

$$(x \in \Omega,\ t \in T_1^0):\ \begin{cases} \dot{\overline{y}}_0 = -g(x)\xi, \\ -\dot{\overline{p}}_0 = \overline{y}_0,\ (g,\overline{p}_0) - \nu\xi > 0; \end{cases} \tag{14}$$

$$(x \in \Omega,\ t \in T_2^0):\ \begin{cases} \dot{\overline{y}}_0 = g(x)\xi, \\ -\dot{\overline{p}}_0 = \overline{y}_0,\ (g,\overline{p}_0) + \nu\xi < 0; \end{cases} \tag{15}$$

$$(x \in \Omega,\ t \in T_3^0):\ \begin{cases} \dot{\overline{y}}_0 = -\nu^{-1} g(x)(g,\overline{p}_0), \\ -\dot{\overline{p}}_0 = \overline{y}_0;\ T = \bigcup_{i=1}^{3} T_i^0,\ T_i^0 \cap T_j^0 = \varnothing,\ i \neq j. \end{cases} \tag{16}$$

От задач (14)–(16) перейдем к задачам для величин $(g,\overline{y}_0)$, $(g,\overline{p}_0)$:

$$t \in T_1^0:\ \begin{cases} (g,\dot{\overline{y}}_0) = -\|g\|^2\xi, \\ -(g,\dot{\overline{p}}_0) = (g,\overline{y}_0),\ (g,\overline{p}_0) - \nu\xi > 0; \end{cases} \tag{17}$$

$$t \in T_2^0:\ \begin{cases} (g,\dot{\overline{y}}_0) = \|g\|^2\xi, \\ -(g,\dot{\overline{p}}_0) = (g,\overline{y}_0),\ (g,\overline{p}_0) + \nu\xi < 0; \end{cases} \tag{18}$$

$$t \in T_3^0: \begin{cases} (g, \dot{\bar{y}}_0) = -\nu^{-1} \| g \|^2 (g, \bar{p}_0), \\ -(g, \dot{\bar{p}}_0) = (g, \bar{y}_0). \end{cases} \tag{19}$$

Задачи (17)–(19) решаются с помощью фазового портрета. Тогда возможны два случая: 1) фазовая точка $((g,\bar{y}_0),(g,\bar{p}_0))$ не выходит на ограничения, т. е. принадлежит множеству

$$\{0 < (g,\bar{p}_0) \le \nu\xi,\ \nu^{-1/2}\| g \|(g,\bar{p}_0) < (g,\bar{y}_0) < \infty\} \cup$$

$$\cup\ \{-\nu\xi \le (g,\bar{p}_0) < 0;\ -\infty < (g,\bar{y}_0) < \nu^{-1/2}\| g \|(g,\bar{p}_0)\};$$

2) фазовая точка выходит на ограничения, т. е. принадлежит множеству

$$\{(g,\bar{p}_0) > \nu\xi,\ \nu^{-1/2}\| g \|(g,\bar{p}_0) \le (g,\bar{y}_0) < \infty\} \cup$$

$$\cup\ \{(g,\bar{p}_0) < -\nu\xi,\ -\infty < (g,\bar{y}_0) \le \nu^{-1/2}\| g \|(g,\bar{p}_0)\}.$$

Решение задачи в случае 1 имеет вид

$$\begin{aligned} (g,\bar{y}_0) &= (\varphi, g)\,\mathrm{ch}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t))\,(\mathrm{ch}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t_0)))^{-1}, \\ (g,\bar{p}_0) &= \nu^{1/2}\| g \|^{-1}(\varphi, g)\,\mathrm{sh}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t))\,(\mathrm{ch}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t_0)))^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

при условии на исходные данные

$$|(\varphi, g)| \le \nu^{1/2}\| g \|\xi\,\mathrm{cth}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t_0)). \tag{21}$$

Решение в случае 2. Тогда системы (14)–(15) при $t_0 \le t \le \tau_0$ (τ_0 — момент времени схода управления с ограничения) имеют решения

$$\begin{aligned} (g,\bar{y}_0) &= -\mathrm{sign}\,(g,\varphi)\xi\| g \|^2(t-t_0) + (g,\varphi), \\ (g,\bar{p}_0) &= \xi\,\mathrm{sign}\,(g,\varphi)(\nu - 0{,}5\| g \|^2[(\tau_0-t_0)^2-(t-t_0)^2]) + (g,\varphi)(\tau_0-t). \end{aligned} \tag{22}$$

На отрезке $t \in (\tau_0, T]$ система (19) имеет решение

$$\begin{aligned} (g,\bar{y}_0) &= \mathrm{sign}\,(\varphi, g)\xi\nu^{1/2}\,\mathrm{ch}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t))\,\mathrm{sh}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-\tau_0)))^{-1}, \\ (g,\bar{p}_0) &= \mathrm{sign}\,(\varphi, g)\xi\nu\,\mathrm{sh}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t))\,\mathrm{sh}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-\tau_0)))^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как функция $(g,\bar{y}_0)$ должна быть непрерывной при $t=\tau_0$, из (22)–(23) получаем уравнение для определения τ_0:

$$\xi\| g \|(\nu^{1/2}\,\mathrm{cth}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-\tau_0)) + \| g \|(\tau_0-t_0)) = |(g,\varphi)|. \tag{24}$$

Уравнение (24) имеет единственное решение при условии

$$|(g,\varphi)| > \xi\| g \|\nu^{1/2}\,\mathrm{cth}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t_0)). \tag{25}$$

Далее для определенности будем считать выполненным условие

$$(g,\varphi) > \xi\| g \|\nu^{1/2}\,\mathrm{cth}\,(\nu^{-1/2}\| g \|(T-t_0)). \tag{26}$$

Тогда легко строится непрерывное по $t \in (t_0, T]$ и гладкое по $x \in \Omega$ решение задач (14), (16). Последнее следует дополнить погранфункциями $\tilde{y}_0(\bar{t},s,t)$, $\tilde{p}_0(\bar{t}, s, t)$ определяемыми из задач [5] при $k=0$

$$\tilde{y}_{k_t} - \tilde{y}_{k_{\bar{t}\bar{t}}} = -\sum_{j=1}^{k} L_j(s, \bar{t}, \partial/\partial s, \partial/\partial\bar{t})\,\tilde{y}_{k-j}(\bar{t},s,t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k_t} + \tilde{p}_{k_{\bar{t}\bar{t}}} + \tilde{y}_k &= \sum_{j=1}^{k} L_j(s, \bar{t}, \partial/\partial s, \partial/\partial \bar{t})\, \tilde{p}_{k-j}(\bar{t}, s, t), \\ \tilde{y}_k(0,s,t) &= -\overline{y}_k(0,s,t), \quad \tilde{p}_k(0,s,t) = -\overline{p}_k(0,s,t); \\ \tilde{y}_k(\bar{t},s,t_0) &= \tilde{p}_k(\bar{t},s,T) = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\bar{t} = -\varepsilon^{-1}\xi$, ξ — расстояние до $\partial\Omega$ вдоль внешней нормали, s — локальные координаты на поверхности $\partial\Omega$; L_j — дифференциальные операторы не выше второго порядка по переменной s и не выше первого порядка по переменной $\bar{t}$; их коэффициенты гладко зависят от координат s на $\partial\Omega$ и полиномиально от $\bar{t}$.

Задачи (27) единственным образом разрешимы в классе параболических погранфункций [5]. Неравенство $(g, \overline{p}_0(\cdot, t)) - \nu\xi > 0$, $t \in [t_0, \tau_0)$, выполняется с точностью $O(\varepsilon)$, если $\overline{p}_0(x, t)$ заменить суммой $\overline{p}_0(x, t) + \tilde{p}_0(\bar{t}, s, t)$.

Уточнение момента времени схода управления с ограничения осуществляется только с помощью коэффициентов внешнего разложения. Пусть τ — момент времени схода управления с ограничения в исходной задаче. Будем разыскивать его в виде асимптотического ряда

$$\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tau_j. \tag{28}$$

Найдем первые коэффициенты разложения (28). Пусть $\tau^1 = \tau_0 + \varepsilon\tau_1$, $\tau_1 > 0$. Тогда $\overline{y}_1(x, t) = 0$, $\overline{p}_1(x, t) = \overline{p}_1(x)$, $t \in [t_0, \tau^1)$, а при $t \in [\tau^1, T)$ согласно (16) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\overline{y}}_1 + \nu^{-1} g(x)(g, \overline{p}_1) &= -\nu^{-1} g(x)\alpha_1(x), \\ \dot{\overline{p}}_1 &= -\overline{y}_1, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\alpha_1(x) = \int_0^{\infty} \int_{\partial\Omega} D(x)/D(0)(g(0,s))\, \tilde{p}_0(\xi, s, t)\, ds\, d\xi,$$

$\tilde{p}_0(\bar{t},s,t)$ — решение задачи (27) при $k=0$; $D(x)/D(\zeta, s)$ — якобиан преобразования $x \to (-\xi, s)$ в окрестности $\partial\Omega$.

Неравенство (9) принимает вид

$$(g, \overline{p}_0(\cdot, t) + \varepsilon \overline{p}_1(\cdot, t)) + \varepsilon\alpha_1(t) - \nu\xi > 0, \quad t \in [t_0, \tau^1). \tag{30}$$

Из (30) при $t = \tau^1$ с точностью $O(\varepsilon^2)$ получаем условие

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 +))/\partial t \tau_1 + \alpha_1(\tau_0) + (g, \overline{p}_1(\cdot, \tau_0)) = 0, \tag{31}$$

причем функция $(g, \overline{p}_1(\cdot, t))$ согласно (29) определяется из системы

$$\begin{aligned} (g, \dot{\overline{y}}_1) + \nu^{-1} \| g \|^2 (g, \overline{p}_1) &= -\nu^{-1} \| g \|^2 \alpha_1(t), \\ (g, \dot{\overline{p}}_1) &= -(g, \overline{y}_1). \end{aligned} \tag{32}$$

Условие (31) свидетельствует о том, что функции $\overline{y}_1$, $\overline{p}_1$ будут иметь только одну точку излома $-t = \tau_0$. Система (32) с краевыми условиями

$$(g, \overline{p}_1(\cdot, \tau_0)) = -[(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t)\tau_1 + \alpha_1(\tau_0)], \quad (g, \overline{p}_1(\cdot, T)) = 0$$

имеет решение

$$(g, \overline{y}_1) = -[(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t)\tau_1 + \alpha_1(\tau_0)]\nu^{-1/2}\|g\| \operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t)) \times$$
$$\times (\operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1} + \nu^{-1}\|g\|^2 \operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\tau_0)) \times$$
$$\times (\operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1} \int_{\tau_0}^{T} \alpha_1(t) \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t))\, dt -$$
$$-\nu^{-1}\|g\|^2 \int_{\tau_0}^{t} \alpha_1(\tau) \operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\tau))\, d\tau, \tag{33}$$

$$(g, \overline{p}_1) = -[(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t)\tau_1 + \alpha_1(\tau_0)] \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t)) \times$$
$$\times (\operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1} - \nu^{-1/2}\|g\| \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\tau_0)) \times$$
$$\times (\operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1} \int_{\tau_0}^{T} \alpha_1(t) \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t))\, dt +$$
$$+\nu^{-1/2}\|g\| \int_{\tau_0}^{t} \alpha_1(t) \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\tau))\, d\tau. \tag{34}$$

Отсюда следует

$$(g, \overline{p}_1(\cdot, t)) = -[(g, \overline{\partial} p_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t)\tau_1 + \alpha_1(\tau_0)], \ (g, \overline{y}_1(\cdot, t)) = 0, \quad t \in [t_0, \tau_0),$$

а из непрерывности функции $(g, \overline{y}_1(\cdot, t))$ в точке $t = \tau_0$ получаем

$$\tau_1 = (g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+))^{-1} \Big[\nu^{-1/2}\|g\| (\operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1} \times$$
$$\int_{\tau_0}^{T} \alpha_1(t) \operatorname{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t))\, dt - \alpha_1(\tau_0) \Big] \tag{35}$$

и при этом правая часть (35) должна быть положительной.

Рассмотрим неравенство (30). Оно принимает вид

$$(g, \overline{p}_0(\cdot, t) + \varepsilon \overline{p}_1(\cdot, t)) + \varepsilon \alpha_1(t) - \nu\xi > 0, \quad t \in [t_0, \tau^1). \tag{36}$$

При $t \in [t_0, \tau_0)$ неравенство (36) выполнено в силу (26), а при $t \in [t_0, \tau^1)$ оно принимает вид

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 + \theta(t-\tau_0))/\partial t)(t-\tau_0) + \varepsilon(g, \overline{p}_1(\cdot, \tau_0)) > 0, \quad \theta \in (0, 1),$$

которое с точностью $O(\varepsilon^2)$ может быть записано в форме

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t)(t-\tau_0-\varepsilon\tau_1) > 0,$$

что имеет место в силу (23): $(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+)/\partial t) < 0; t-\tau_0-\varepsilon\tau_1 < 0$. Пусть $\tau_1 < 0$. В этом случае остаются справедливыми рассуждения для варианта $\tau_1 > 0$ за исключением таких моментов: в равенстве (31) следует сделать замену $(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0+) \to (g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0-))$; величина τ_1 определяется по формуле (35) с той же заменой. Неравенство (36) на интервале (τ^1, τ_0) не выполняется.

Действительно, его можно привести к виду

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 -)/\partial t)(t - \tau_0 - \varepsilon\tau_1) > 0,$$

но

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 -)/\partial t) = \xi \| g \|^2 (\tau_0 - t_0) - (g, \varphi) < 0$$

в силу (22), (26), а $t - \tau_0 - \varepsilon\tau_1 > 0$, следовательно, справедливо обратное неравенство, что и требовалось доказать.

Тем самым мы полностью построили первый шаг алгоритма для определения коэффициентов разложения (28): если

$$\Lambda_1 = \nu^{-1/2} \| g \| \left(\operatorname{ch} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - \tau_0)) \right)^{-1} \times$$
$$\int\limits_{\tau_0}^{T} \alpha_1(t) \operatorname{sh} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - t))\, dt - \alpha_1(\tau_0) < 0, \tag{37}$$

то $\tau_1 > 0$ и определяется по формуле (35), в противном случае $\tau_1 < 0$ и определяется по той же формуле с заменой $(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 +)) \to (g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 -))$; если $\Lambda_1 = 0$, то $\tau_1 = 0$. Кроме того, функции $\overline{y}_1(x, t)$, $\overline{p}_1(x, t)$ находятся из системы (29) и дополняются погранфункциями $\tilde{y}_1, \tilde{p}_1$, которые определяются из (27). По индукции устанавливаем, что справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполняются предположение* 1 *и неравенство* (26). *Тогда ряд* (28) *строится однозначно и при этом: если* $\tau_1 > 0$, *то*

$$\tau_i = -(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 +)/\partial t)^{-1} \Big[R_{i+}(\tau_0, \ldots, \tau_{i-1}) + \nu^{1/2} \| g \|^{-1} \times$$
$$\times \Big(\operatorname{th} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - \tau_0)) \int\limits_{t_0}^{\tau_0} (g, \Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot, \tau))\, dt + \left(\operatorname{ch} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - \tau_0)) \right)^{-1} \times$$
$$\times \int\limits_{\tau_0}^{T} [\operatorname{sh} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - t)) ((g, \Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot, t)) - \nu^{-1} \| g \|^2 \alpha_i(t)) +$$
$$+ \nu^{-1/2} \| g \| (g, \Delta\overline{p}_{i-2}(\cdot, t)) \operatorname{ch} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - t))]\, dt \Big) \Big], \quad i > 2, \tag{38}$$

где $R_{i+}(\tau_0, \ldots, \tau_{i-1})$, $\alpha_i(t)$ — *известные функции; при* $i = 1$ *они указаны выше; причем, если*

$$\Lambda_i = R_{i+}(\tau_0, \ldots, \tau_{i-1}) + \nu^{1/2} \| g \|^{-1} \Big(\operatorname{th} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - \tau_0)) \times$$
$$\times \int\limits_{t_0}^{\tau_0} (g, \Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot, \tau))\, dt + \left(\operatorname{ch} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - \tau_0)) \right)^{-1} \times$$
$$\times \int\limits_{\tau_0}^{T} [\operatorname{sh} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - t)) ((g, \Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot, t)) - \nu^{-1} \| g \|^2 \alpha_i(t)) +$$
$$+ \nu^{-1/2} \| g \| (g, \Delta\overline{p}_{i-2}(\cdot, t)) \operatorname{ch} (\nu^{-1/2} \| g \| (T - t))]\, dt \Big) > 0, \tag{39}$$

то $\tau_i > 0$, *в противном случае* $-\tau_i > 0$; *если же* $\tau_1 < 0$, *то формула* (38) *вместе с неравенством* (39) *сохраняют свой содержательный смысл с заменой*

$$(g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 +)/\partial t) \to (g, \partial \overline{p}_0(\cdot, \tau_0 -)/\partial t),$$

$$R_{i+}(\tau_0, \dots, \tau_{i-1}) \to R_{i-}(\tau_0, \dots, \tau_{i-1}).$$

Разложения (13) дополняются погранфункциями, определяемыми из (27).

3. Обоснование асимптотических разложений. Пусть построен отрезок асимптотического ряда (28), т. е.

$$\tau^N = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \tau_i. \tag{40}$$

Рассмотрим асимптотические разложения

$$y^{(N)}(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j (\bar{y}_j(x,t) + \tilde{y}_j(\bar{t}, s, t)), \tag{41}$$

$$p^{(N)}(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j (\bar{p}_j(x,t) + \tilde{p}_j(\bar{t}, s, t)), \tag{42}$$

$$u^{(N)}(x) = \begin{cases} -\xi, & t_0 \le t \le \tau_0, \\ -\nu^{-1}(g, p^{(N)}(\cdot, t)), & \tau_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{43}$$

Далее, используя результаты работ [2, 4], устанавливаем, что верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда функции* (41)–(43) *представляют асимптотики решения исходной задачи и справедливы оценки*

$$\| \nabla(y - y^{(N)}) \|_{L_2(Q_T)} + \| \nabla(p - p^{(N)}) \|_{L_2(Q_T)} \le C\varepsilon^N,$$

$$\| y - y^{(N)} \|_{L_2(Q_T)} + \| p - p^{(N)} \|_{L_2(Q_T)} \le C\varepsilon^{N+1},$$

$$\| u - u^{(N)} \|_{L_2(t_0,T)} \le C\varepsilon^{N+1}, \quad | I(u) - I(u^{(N)}) | \le C\varepsilon^{2(N+1)},$$

где $\nabla(\cdot) = \mathrm{grad}\,(\cdot)$.

1. *Капустян В. Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. – 1992. – №2. – С. 70–74.
2. *Капустян В. Е.* Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Укр. мат. журн. – 1993. – **48**, №8. – С. 1072–1083.
3. *Капустян В. Е.* Глобальные ограниченные управления в оптимальных сингулярно возмущенных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. – 1993. – №12. – С. 79–83.
4. *Капустян В. Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных сингулярных параболических задачах // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, №10. – С. 1337–1347.
5. *Капустян В. Е.* Асимптотика управлений в оптимальных сингулярно возмущенных параболических задачах. Глобальные ограничения на управление // Докл. АН России. – 1993. – **333**, – № 4. – С. 428–431.
6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Получено 24.05.95