УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИХ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ НА ПОДПРОСТРАНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

We obtain in the space L_q, $1<q<\infty$, the order estimates for the best approximations of classes of functions of many variables $B^r_{1,\theta}$ and $W^r_{p,\alpha}$ by orthogonal projections of functions from these classes into the subspace of trigonometric polynomials. It is found that in a number of cases, the obtained estimates are better in order than the polynomial approximations with respect to the harmonics from the hyperbolic cross.

Одержані порядкові оцінки найкращих наближень класів функцій багатьох змінних $B^r_{1,\theta}$ і $W^r_{p,\alpha}$ в просторі L_q, $1<q<\infty$, ортогональними проекціями функцій з цих класів на підпростори тригонометричних поліномів. Встановлено, що в ряді випадків одержані оцінки за порядком кращі, ніж при наближенні поліномами з гармоніками з гіперболічного хреста.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство с элементами $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $(x,y)= x_1y_1+\ldots+x_my_m$, $L_p(\pi_m)$ — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций

$$f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)\in L_p(\pi_m),\quad \pi_m=\prod_{j=1}^{m}[-\pi;\pi]$$

с конечной нормой

$$\|f\|_p=\left((2\pi)^{-m}\int\limits_{\pi_m}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad p\in[1,\infty).$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, предполагаем, что для $f\in L_p(\pi_m)$ выполнено условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx_j=0,\quad j=\overline{1,m}.$$

Напомним определение классов, которые будут рассматриваться в настоящей работе.

Обозначим через $V_n(t)$, $n\in N$, ядро Валле Пуссена порядка $2n-1$, т. е.

$$V_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1-\frac{k-n}{n}\right)\cos kt.$$

Каждому вектору $s=(s_1,\ldots,s_m)$, $s_j\in N$, $j=\overline{1,m}$, поставим в соответствие полином

$$A_s(x)=\prod_{j=1}^{m}\left(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

и через $A_s(f,x)$ обозначим свертку $A_s(f,x)=f*A_s(x)$. Тогда (см., например, [1]) для $1\le p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$ и $r=(r_1,\ldots,r_m)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,m}$, через $B^r_{p,\theta}$ обозначим класс функций, который определяется следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot)\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}. \quad (1)$$

Отметим, что в определении (1) при $\theta = \infty$ подразумевается естественная модификация нормы и в этом случае класс $B^r_{p,\infty}$ совпадает с классом С. М. Никольского H^r_p [1].

Пусть $F_r(x, \alpha)$ — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha) = 2^m \sum_{k \in Z^m_+} \prod_{j=1}^m k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2} \right), \quad \alpha_j \in R, \quad r_j > 0.$$

Обозначим через $W^r_{p,\alpha}$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} \varphi(y)\, F_r(x-y,\alpha)\, dy,$$

где $\varphi(\cdot) \in L_p(\pi_m)$, $\|\varphi\|_p \le 1$. Как отмечалось, например, в [2], справедливы соотношения

$$W^r_{2,\alpha} = B^r_{2,2}, \quad B^r_{p,p} \subset W^r_{p,\alpha} \subset B^r_{p,2}, \quad 1 < p \le 2,$$

$$B^r_{p,2} \subset W^r_{p,\alpha} \subset B^r_{p,p}, \quad 2 < p < \infty.$$

В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_m)$ из определения классов упорядочены таким образом, что $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \dots \le r_m$. С вектором r будем связывать два вектора: $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, где $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, m}$, и $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, где $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \nu+1, \dots, m$.

Пусть Ω_M — произвольный набор M m-мерных векторов $k^1, \dots, k^M$ с целочисленными координатами; $T(\Omega_M, x)$ — подпространство тригонометрических полиномов, порожденное системой $\{e^{i(k^j,x)}\}_{j=1}^M$. Полагая для заданной функции $f(x)$ $S_M(f,x) = P(f, T(\Omega_M, x))$, где $P(f, T(\Omega_M, x))$ — ортогональная проекция $f(x)$ на $T(\Omega_M, x)$, рассмотрим величину

$$e^\perp_M(f, L_q) = \inf_{S_M} \|f(x) - S_M(f,x)\|_q.$$

Точную верхнюю грань по классу Φ обозначим

$$e^\perp_M(\Phi, L_q) = \sup_{f \in \Phi} e^\perp_M(f, L_q). \quad (2)$$

В настоящей работе основное внимание уделяется нахождению порядков величин (2) на классах $B^r_{1,\theta}$ в метрике пространства L_q. Полученные результаты затем используются при установлении порядковых оценок величин $e^\perp_M(W^r_{1,\alpha}, L_q)$ и $e^\perp_M(H^r_1, L_q)$.

Отметим, что В. Н. Темляков в [3] нашел точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников

$$d^\perp_M(\Phi, L_q) = \inf_{U\colon \dim U \le M} \sup_{f \in \Phi} \|f - P(f, U)\|_q, \quad (3)$$

где $P(f, U)$ — ортогональная проекция f на подпространство, натянутое на систему функций U, а Φ обозначает либо класс $W^r_{p,\alpha}$, либо класс H^r_p. При этом оказалось, что в случае $1 < p \le q < \infty$ наилучшими (в смысле порядка) приближающими системами функций являются тригонометрические полиномы с гармониками из „ступенчатых гиперболических крестов" Q_n^γ (определение см. ниже). В связи с этим представляет интерес изучение величины (2), которая является в определенном смысле частным случаем величины (3) и позволяет более полно учитывать поведение конкретной функции из того или иного класса.

Перед тем, как перейти к изложению полученных результатов, отметим, что порядки величин $e^{\perp}_M(W^r_{p,\alpha}, L_q)$ при $1 < p < q \le 2$ и $1 < p < 2 < q < \infty$ установил Э. С. Белинский [4], а при $2 \le p < q < \infty$ — автор [5]. Ряд результатов по оценкам величин $e^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ содержится в [6].

В дальнейшем используем обозначение из [5, 6], а также из цитируемых там работ автора.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$

$$e^{\perp}_M(B^r_{1,\theta}, L_q) \asymp M^{-(r_1-1+1/q)}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+2/q-1/\theta)_+},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Установим сначала оценку сверху. Пусть $f \in B^r_{1,\theta}$, $1 \le \theta < q$, и M — заданное натуральное число. Подберем $n \in N$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и положим $n_0 = n + (\nu-1)\log n$. Сумму $S_M(f, x)$, доставляющую требуемую оценку приближения для $f(x)$, будем находить в виде

$$S_M(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x) + Q(x),$$

где $Q(x)$ — некоторый полином, к построению которого и перейдем. Пусть $l \in N$ и $l \in [n, n_0)$. Положим

$$S_l = \left(\sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \, 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta} \tag{4}$$

и обозначим через $\alpha_i(f, l)$ числа $\|A_s(f, x)\|_1$, упорядоченные в порядке убывания. Тогда из (4) имеем

$$\alpha_i(f, l) \ll i^{-1/\theta} 2^{-l r_1} S_l. \tag{5}$$

Далее, полагая $m_l = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a, рассмотрим функцию

$$R(x) = \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \tag{6}$$

и для каждого $l \in [n, n_0)$, $l \in N$, возьмем из внутренней суммы (6) m_l „блоков" $\delta_s(f, x)$ с теми s, которым соответствуют наибольшие нормы $\|A_s(f, x)\|_1$. Полученный в результате такой процедуры полином обозначим через $Q(x)$. Нетрудно проверить, что количество гармоник K, содержащихся в $S_M(f,x)$, не превышает по порядку M. Действительно, согласно лемме Г [7, с. 11], а также определению чисел m_l будем иметь

$$K << 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{[n_0]} 2^l m_l << 2^n n^{\nu-1} +$$

$$+ 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \|A_s(f,x)\|_1^\theta \, 2^{(s,r)\theta} <<$$

$$<< 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|_{B_{1,\theta}^r}^\theta = 2^n n^{\nu-1} \left(1 + \|f\|_{B_{1,\theta}^r}^\theta\right) << 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Далее, пусть D_f обозначает множество тех векторов s: $n \le (s,\gamma) < n_0$, по которым „блоки" $\delta_s(f,x)$ не попали в $Q(x)$. Тогда

$$\|f(x) - S_M(f,x)\|_q = \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} \delta_s(f,x) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,x) \right\|_q = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{7}$$

и согласно теореме 2 [8] для $\sum_1$ имеем

$$\sum\nolimits_1 << 2^{-n_0(r_1-1+1/q)} \, n_0^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+} <<$$

$$<< 2^{-n(r_1-1+1/q)} \, n^{-(\nu-1)((r_1-1+1/q)+(1/q-1/\theta)_+)} << M^{-(r_1-1+1/q)}. \tag{8}$$

Для оценки слагаемого $\sum_2$ в (7) воспользуемся известным неравенством [7, с. 25]

$$\|f\|_q << \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f,x)\|_p \, 2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)} \right)^q \right\}^{1/q}, \tag{9}$$

$$2 \le p < q < \infty, \quad f \in L_p(\pi_m).$$

Пусть q_0 — некоторое число, удовлетворяюще условию $1 < q_0 < q$. Тогда согласно (9) найдем

$$\sum\nolimits_2 = \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,x) \right\|_q <<$$

$$<< \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|\delta_s(f,x)\|_{q_0} \, 2^{\|s\|_1 (1/q_0-1/q)} \right)^q \right\}^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_{q_0} \, 2^{\|s\|_1 (1/q_0-1/q)} \right)^q \right\}^{1/q}.$$

Далее, применяя к $\|A_s(f,x)\|_{q_0}$ неравенство разных метрик Никольского (см., например, [7, с. 23]) и учитывая выбор чисел $\alpha_i(f,l)$, продолжаем оценку

$$\ll \left\{ \sum_{s\in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1(1-1/q_0)} 2^{\|s\|_1(1/q_0-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{s\in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1(1-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{i>m_l} \alpha_i^q(f,l)\, 2^{l(1-1/q)q} \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f,l)\, \alpha_i^{q-\theta}(f,l)\, 2^{l(1-1/q)q} \right\}^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{-l\theta r_1} 2^{l(1-1/q)q} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l\le(s,\gamma)<l+1} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_1^\theta \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1+1/q)q} S_l^q \right)^{1/q}.$$

Подставляя теперь вместо m_l его значение, получаем

$$\sum\nolimits_2 \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]} S_l^\theta 2^{-l(r_1-1+1/q)q} 2^{lq(1/\theta-1/q)} \right)^{1/q} =$$

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]} 2^{-lq(r_1-1+2/q-1/\theta)} S_l^\theta \right)^{1/q} =$$

$$= (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \sum\nolimits_3 . \tag{10}$$

Чтобы продолжить оценку, рассмотрим два случая:

1) $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$;

2) $1 - 1/q < r_1 \le 1 - 2/q + 1/\theta$.

Пусть сначала имеет место первый случай. Тогда

$$\sum\nolimits_3 \ll 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]} S_l^\theta \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)} \|f\|_{B_{1,\theta}^r}^{\theta/q} \ll 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)}.$$

Отсюда и из (10) находим

$$\sum\nolimits_2 << 2^{-n(r_1-1+1/q)}\, n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} \asymp$$

$$\asymp M^{-(r_1-1+1/q)} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q-1/\theta}. \tag{11}$$

Предположим теперь, что имеет место второй случай. Тогда

$$\sum\nolimits_3 << 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)}\, n^{-(\nu-1)(r_1-1+2/q-1/\theta)}$$

и в сочетании с (10) получаем

$$\sum\nolimits_2 << 2^{-n(r_1-1+1/q)}\, n^{-(\nu-1)(r_1-1+1/q)} \asymp M^{-(r_1-1+1/q)}. \tag{12}$$

Сопоставляя (8) с (11) и (12) и используя соотношение (7), получаем искомую оценку сверху при $1 \le \theta < q$. Если же $\theta > q$, то нужная оценка сверху следует из теоремы 2 [8] при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Оценку снизу достаточно установить при $\nu = m$. По заданному числу M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{m-1}$ таким образом, что $2^n n^{m-1} \ge 2M$, и положим

$$F_{r,n}(x) = \sum_{(s,1)<n+m} \sum_{k\in\rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1} \cos k_j x_j, \quad r_1 > 0,$$

где $\rho^+(s) = \{k\colon 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j}\}$. Известно (см., например, [7, с. 53]), что функция

$$F_r(x,\alpha) = \sum_{k\in Z_+^m} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1} \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right),$$

$$\alpha_j \in R, \quad r = (r_1, \ldots, r_m), \quad r_1 > 0,$$

принадлежит классу H_1^r и, следовательно, согласно теореме 1.1 [7, с. 32] $\| A_s(F_r(x,\alpha)\|_1 << 2^{-r_1(s,1)}$. Принимая во внимание это соотношение, нетрудно убедиться, что функция $f(x) = C_1 n^{-(m-1)/\theta} F_{r,n}(x)$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$. (Здесь и далее $C_i, i = 1, 2, \ldots$, абсолютные постоянные, зависящие, возможно, только от параметров r, θ, q, m.)

Далее, пусть Ω_M — произвольное множество M m-мерных векторов $\{k^j\}_{j=1}^M$ с целочисленными координатами и $S_M(f, x)$ — сумма, полученная в результате ортогонального проектирования $f(x)$ на подпространство тригонометрических полиномов с гармониками из Ω_M. Тогда в силу следствия Д 1.2 [9, с. 392]

$$\| f(x) - S_M(f,x)\|_q = \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int_{\pi_m} (f(x) - S_M(f,x))\, g(x)\, dx \right|, \tag{13}$$

где $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$. Рассмотрим функцию $g(x)$ вида

$$g(x) = C_2 2^{-n/q} n^{-(m-1)/q'} \sum_{(s,1) \le n+m} \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} =$$

$$= C_2 2^{-n/q} n^{-(m-1)/q'} D_{n+m}(x), \quad \rho(s) = \{k:\ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, m}\}.$$

Известно [10], что $\|D_{n+m}(x)\|_{q'} << 2^{n/q} n^{(m-1)/q'}$, и поэтому для $g(x)$ с соответствующим образом подобранной постоянной C выполняется условие $\|g\|_{q'} \le 1$.

Далее, полагая

$$Q_n^1 = \bigcup_{(s,1) < n} \rho(s), \quad Q_{n+m}^1 = \bigcup_{(s,1) < n+m} \rho(s)$$

и

$$Q_{n+m}^1 / Q_n^1 = \bigcup_{n \le (s,1) < n+m} \rho(s),$$

согласно (13) находим

$$\|f(x) - S_M(f,x)\|_q \ge 2^{-n/q} n^{-(m-1)(1/q'+1/\theta)} \sum_{k \in Q_{n+m}^1 / Q_n^1} \prod_{j=1}^{m} |k_j|^{-r_1} >>$$

$$>> 2^{-n/q} n^{-(m-1)(1/q'+1/\theta)} \sum_{n \le (s,1) < n+m} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j = 2^{s_j-1}}^{2^{s_j}} |k_j|^{-r_1} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n/q} n^{-(m-1)(1/q'+1/\theta)} \sum_{n \le (s,1) < n+m} 2^{-\|s\|_1 (r_1 - 1)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n/q} n^{-(m-1)(1/q'+1/\theta)} 2^{-n(r_1-1)} n^{m-1} = 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{(m-1)(1/q-1/\theta)} \asymp$$

$$\asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1-1+2/q-1/\theta}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$. Если же $1 - 1/q < r_1 \le 1 - 2/q + 1/\theta$, то заметим следующее. Поскольку установленная оценка сверху в этом случае не зависит от размерности пространства R^m, то отсюда заключаем, что оценку снизу достаточно установить при $m = 1$, т. е. в одномерном случае. Но в одномерном случае искомая оценка снизу для всех $r_1 > 1 - 1/q$ устанавливается с помощью проведенных выше рассуждений. Теорема доказана.

Непосредственно из доказанной теоремы, полагая $\theta = \infty$, получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда*

$$e_M^{\perp}(H_1^r, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда*

$$e_M^{\perp}(W_{1,\alpha}^r, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из (14), поскольку $W_{1,\alpha}^r \subset H_1^r$ [7]. Для получения оценки снизу потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда*

$$e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q) \asymp M^{-(r_1-1+1/q)} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q}.$$

Доказательство. Получим оценку сверху. В силу того, что $F_r(x,\alpha) \in H_1^r$, с учетом оценки (14) находим

$$e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q) \le e_M^{\perp}(H_1^r, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Оценку снизу достаточно установить при $\nu = m$. Пусть $S_M^*(F_r, x, \alpha)$ — частная сумма, для которой

$$\left\| F_r(x,\alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha) \right\|_q << \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}. \tag{15}$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} J &= \left(F_r(x,\alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha), F_2(x,\alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha) \right) = \\ &= \left(F_r(x,\alpha), F_2(x,\alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha) \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь „2" обозначает вектор $2 = (2, 2, \ldots, 2) \in N^m$. Тогда, с одной стороны, в силу неравенства Гельдера и оценки (15) будем иметь

$$\begin{aligned} J &\le \left\| F_r(x,\alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha) \right\|_q \left\| F_2(x,\alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha) \right\|_{q'} << \\ &<< \left\| F_r(x,\alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha) \right\|_q \frac{(\log^{m-1} M)^{1+2/q'}}{M^{1+1/q'}}. \end{aligned} \tag{17}$$

С другой стороны, нетрудно оценить величину J снизу.

Действительно, полагая $M \asymp 2^n n^{m-1}$, из (16) получаем

$$J \ge \sum_{\substack{k \in Q_n^1, \\ k > 0}} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1-2} \asymp \sum_{(s,1) \ge n+m} 2^{-\|s\|_1 (r_1+1)}. \tag{18}$$

Далее, воспользовавшись оценкой [7, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{-\alpha(\gamma,s)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{m-1}, \quad \alpha > 0,$$

будем иметь

$$\sum_{(s,1) \ge n+1} 2^{-\|s\|_1 (r_1+1)} \asymp 2^{-n(r_1+1)} n^{m-1} \tag{19}$$

и, таким образом, из (18) и (19) находим

$$J \ge 2^{-(r_1+1)n} n^{m-1} \asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1+2}}{M^{r_1+1}}. \tag{20}$$

Наконец, сопоставляя (17) и (20), получаем искомую оценку снизу

$$e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q) >> \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что оценка величины $e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q)$ совпадает по порядку с величиной наилучшего приближения функции $F_r(x,\alpha)$ посредством полиномов с гармониками из „ступенчатого гиперболического креста" [7, с. 38] и, кроме того, при $1 < q \le 2$ с величиной $e_M(F_r(x,\alpha), L_q)$ [11]. Если же $2 < q < \infty$, то величины $e_M(F_r(x,\alpha), L_q)$ [11] и $e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q)$ ведут себя по-разному.

Воспользовавшись доказанной леммой, легко получить оценку снизу в теореме 2.

Действительно, поскольку при $r_1 > 1 - 1/q$ функция $F_r(x,\alpha)$ принадлежит замыканию класса $W_{1,\alpha}^r$ по метрике L_q, то согласно лемме будем иметь

$$e_M^{\perp}(W_{1,\alpha}^r, L_q) \ge e_M^{\perp}(F_r(x,\alpha), L_q) \asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Теорема доказана.

Пусть $E_{Q_n^\gamma}(\Phi)_q$ обозначает наилучшее приближение класса Φ тригонометрическими полиномами с гармониками из „ступенчатого гиперболического креста" Q_n^γ $\left(Q_n^\gamma = \bigcup_{(s,\gamma)<n} \rho(s)\right)$ в метрике пространства L_q.

Пусть Φ_1^r обозначает класс $W_{1,\alpha}^r$ либо H_1^r. Сопоставляя следствие и теорему 2 соответственно с теоремой 4.2 [7, с. 53] и теоремой 2.2 [7, с. 35], замечаем, что

$$e_M^{\perp}(\Phi_1^r, L_q) \asymp E_{Q_n^\gamma}\left(\Phi_1^r\right)_q \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}},$$

где $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Несколько иная ситуация возникает на классах $B_{1,\theta}^r$. Так, сравнивая теорему 1 настоящей работы с теоремой 2 [8], при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, $\theta > q$ и $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$ имеем

$$e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp E_n^\gamma\left(B_{1,\theta}^r\right)_q \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q-1/\theta}}{M^{r_1-1+1/q}},$$

где $E_n^\gamma\left(B_{1,\theta}^r\right)_q$ — величина наилучшего приближения класса $B_{1,\theta}^r$ полиномами с гармониками из „ступенчатого гиперболического креста" Q_n^γ.

Далее, если $1 \le \theta \le q$, то [8]

$$E_n^\gamma\left(B_{1,\theta}^r\right)_q \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+1/q}}{M^{r_1-1+1/q}},$$

тогда как

$$e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+2/q-1/\theta)_+}}{M^{r_1-1+1/q}},$$

т. е. $1 - 1/q < r_1 \le 1 - 2/q + 1/\theta$, $1 \le \theta \le q$, порядок величины $e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^r, L_q)$ не зависит от размерности пространства R^m, чего не наблюдается на классах $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r.

В заключение приведем еще одну оценку величины $e_M^{\perp}(W_{p,\alpha}^r, L_q)$, которая следует из результатов, полученных ранее на классах $B_{p,\theta}^r$ [6].

В [6] при $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$, $r_1 > 0$ и $1 \le \theta \le \infty$ установлена оценка

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}}{M^{r_1}}. \tag{21}$$

Отправляясь от этого соотношения, легко доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$e_M^{\perp}(W_{p,\alpha}^r, L_q) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из приближения класса $W_{p,\alpha}^r$ суммами Фурье $S_n^{\gamma}(f,x)$ с гармониками из „ступенчатого гиперболического креста" [7] при условии, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Перейдем к оценке снизу. Пусть $p=2$, $\theta=2$. Тогда согласно (21) имеем

$$e_M^{\perp}(B_{2,2}^r, L_q) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{22}$$

Далее, учитывая, что $B_{2,2}^r = W_{2,\alpha}^r$, из (22) находим

$$e_M^{\perp}(W_{2,\alpha}^r, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Пусть теперь $1 < p \le 2$, тогда согласно вложению $W_{2,\alpha}^r \subset W_{p,\alpha}^r$ имеем

$$e_M^{\perp}(W_{p,\alpha}^r, L_q) >> e_M^{\perp}(W_{2,\alpha}^r, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

В итоге при $p>2$, полагая в (21) $\theta=2$, получаем

$$e_M^{\perp}(B_{p,2}^r, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}$$

и, учитывая вложение $B_{p,2}^r \subset W_{p,\alpha}^r$, $2 \le p < \infty$, завершаем доказательство оценки снизу:

$$e_M^{\perp}(W_{p,\alpha}^r, L_q) >> e_M^{\perp}(B_{p,2}^r, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Теорема доказана.

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
2. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
3. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138–168.
4. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль, 1988. – С. 16–33.
5. *Романюк А. С.* Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных частными суммами Фурье с произвольным выбором гармоник // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 112–118.
6. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 70–78.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
8. *Романюк А. С.* О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 79–92.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
10. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 1. – С. 32–43.
11. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294–1297.

Получено 14.07.94