УДК 517. 95

Б. Й. Пташник, Л. П. Силюга
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України. Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ БЕЗТИПНИХ ФАКТОРИЗОВАНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ*

We study the well-posedness of the problem for differential operators, which are expressed in the terms of operators of the first order with complex coefficients, with multi-point conditions and periodicity conditions imposed on the time and spatial variables correspondingly. Existence and uniqueness conditions for the classical solution are found. Matrix theorems for lower estimates of small denominators, which appear in the construction of a solution, are proved.

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для диференціальних операторів, які розкладаються на оператори першого порядку з комплексними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку.

Вивчення задач з багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними почалося порівняно недавно. Перші дослідження, які стосувалися лінійних гіперболічних рівнянь, були проведені в роботах [1–4]. Розвиток цих досліджень та огляд результатів інших авторів подано в ([5], розд. 2). Дослідження розв'язності та стійкості багатоточкових задач для гіперболічних, псевдопараболічних та диференціально–операторних рівнянь проводилося в [6–9].

Зауважимо, що багатоточкові задачі для рівнянь з частинними похідними, взагалі, некоректні, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

У даній статті, яка є продовженням [5], вивчається задача з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ для безтипних рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Надалі використовуватимемо такі позначення:

$$k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p;$$

$$|k| = |k_1| + \dots + |k_p|; \quad (k, x) = k_1x_1 + \dots + k_px_p;$$

A_δ $(\delta > 0)$ — простір 2π-періодичних функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, з нормою

$$\|\varphi(x)\|_\delta = \sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k| \exp(\delta|k|),$$

де φ_k — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$ [10]; $C^n([0,T]; A_\delta)$ — простір функцій $v(t,x)$ таких, що $\partial^j v(t,x)/\partial t^j$, $j = \overline{0,n}$, для кожного $t \in [0,T]$ належить простору A_δ і неперервна відносно t в нормі A_δ;

$$\|v(t,x)\|_{C^n([0,T],A_\delta)} = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial^j v(t,x)/\partial t^j\|_\delta;$$

Γ — простір тригонометричних многочленів

$$P(x) = \sum_{k_1=-m}^{m} \dots \sum_{k_p=-m}^{m} C_k \exp((ik,x)), \quad x \in [0,2\pi]^p, \quad m = 0, 1, \dots,$$

* Робота часткова підтримана Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається таким чином: $\Gamma \supset P_n \xrightarrow[\Gamma]{} P$, якщо степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа N і при $n \to \infty$ $P_n(x) \to P(x)$, Γ' — простір усіх лінійних неперервних функціоналів над Γ зі слабкою збіжністю (який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів ([11], розд. 2); $C^n([0, T], \Gamma)$ $(C^n([0, T], \Gamma'))$ — простір функцій $u(t, x)$ таких, що для довільного $t \in [0, T]$ $\partial^j u(t, x)/\partial t^j \in \Gamma(\Gamma')$, $j = \overline{0, n}$.

2. В області

$$D = \{(t, x): t \in [0, T]; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\},$$

де Ω — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}: 0 \le x_r \le 2\pi, \ r = \overline{1, p}\}$, розглянемо задачу

$$L(u(t, x)) \equiv \prod_{q=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p} \lambda_{sq} \frac{\partial}{\partial x_s} - b_q \right) u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$u(t_f, x) = \varphi_f(x), \quad j = \overline{1, n}; \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{2}$$

де

$$\lambda_{sq} = \lambda_{sq}^{(1)} + i\lambda_{sq}^{(2)}, \quad b_q = b_q^{(1)} + i b_q^{(2)}, \quad b_q^{(j)}, \lambda_{sq}^{(j)} \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2, \ i = \sqrt{-1}.$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $u(t, x)$, $f(t, x)$ і $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp((ik, x)). \tag{3}$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$ є розв'язком задачі

$$M(u_k(t)) \equiv \prod_{q=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma_q(k) \right) u_k(t) = f_k(t), \tag{4}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де

$$\gamma_q(k) = \gamma_q^{(1)}(k) + i\gamma_q^{(2)}(k), \quad \gamma_q^{(1)}(k) = b_q^{(1)} - \sum_{s=1}^{p} k_s \gamma_{sq}^{(2)},$$

$$\gamma_q^{(2)}(k) = b_q^{(2)} + \sum_{s=1}^{p} k_s \lambda_{sq}^{(1)};$$

$f_k(t)$ і φ_{jk} — коефіцієнти Фур'є функцій $f(t, x)$ і $\varphi_j(x)$ відповідно. Будемо вважати, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\gamma_l(k) \ne \gamma_r(k)$, $l, r = \overline{1, n}$; $l \ne r$.

Задача (4), (5) не може мати двох різних розв'язків, якщо відповідна однорідна задача

$$M(u_k(t)) = 0, \tag{4'}$$

$$u_k(t_f) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5'}$$

має лише нульовий розв'язок. Фундаментальна система розв'язків рівняння (4′) має вигляд $\{\exp(\gamma_q(k)t),\ q=\overline{1,n}\}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n(D)$ *необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}^p\ \Delta(k)\equiv\det\|\exp(\gamma_q(k)t_j)\|_{q,j=1}^{n}\neq 0. \tag{6}$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.1 ([5], розд. 2) і випливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є.

***Зауваження* 1.** При виконанні умови (6) єдиність розв'язку задачі (1), (2) має місце також у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$.

3. Припустимо, що виконана умова (6). Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ існують розв'язки задач (4′), (5) і (4), (5′), $w_k(t)$ і $v_k(t)$ відповідно, які зображаються формулами

$$w_k(t)=\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)}\,\varphi_{jk}\exp(\gamma_q(k)t), \tag{7}$$

$$v_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

де $\Delta_{jq}(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\gamma_q(k)t_j)$ у визначнику $\Delta(k)$; $G_k(t,\tau)$ — функція Гріна задачі (4′), (5′); у квадраті $K_T=\{(t,\tau):\ 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le T\}$, за винятком відрізків прямих $\tau=t_j$, $j=\overline{1,n}$, $\tau=0$ і $\tau=T$ функція $G_k(t,\tau)$ має вигляд

$$G_k(t,\tau)=g_k(t,\tau)+$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left((-1)\sum_{j=1}^{q}\frac{\Delta_{jl}(k)\exp(\gamma_l(k)(t_j-\tau)+\gamma_l(k)t)}{\Delta(k)\prod_{r=1,\,r\neq l}^{n}(\gamma_l(k)-\gamma_r(k))}\ +\right.$$

$$\left.+\sum_{j=q+1}^{n}\frac{\Delta_{jl}(k)\exp(\gamma_l(k)(t_j-\tau)+\gamma_l(k)t)}{\Delta(k)\prod_{r=1,\,r\neq l}^{n}(\gamma_l(k)-\gamma_r(k))}\right) \tag{9}$$

$$\left(\begin{matrix} t_j<\tau<t_{j+1}, & j=\overline{0,\,n}, \\ t_0=0, & t_{n+1}=T, \end{matrix}\right)$$

$$g_k(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{i=1}^{n}\exp(\gamma_l(k)(t-\tau))\ \times$$

$$\times\prod_{r=1,\,r\neq l}^{n}(\gamma_l(k)-\gamma_r(k))^{-1}. \tag{10}$$

Розв'зок задачі (4), (5) має вигляд

$$u_k(t)=w_k(t)+v_k(t).$$

Тоді на основі формул (3), (7), (8) одержимо формальне зображення розв'зку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(k,x) = \sum_{|k|\ge 0} \exp((ik,x)) \times$$

$$\times \left(\sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} \exp(\gamma_q(k)t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right). \tag{11}$$

З теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (6). *Якщо*

$$\varphi_j(x) \in \Gamma(\Gamma'), \quad j = \overline{1,n}, \quad f(t,x) \in C^n([0,T],\Gamma) \quad (C^n([0,T],\Gamma')),$$

то існує розв'зок задачі (1), (2), *який належить простору* $C^n([0,T],\Gamma)$ $(C^n([0,T],\Gamma'))$.

Для проміжних просторів питання про існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки величини $|\Delta(k)|$ і $|\gamma_l(k) - \gamma_r(k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини цілочислових векторів k.

Зауважимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ справедливі оцінки

$$|\gamma_q(k)| < C|k|, \tag{12}$$

$$|\Delta_{jq}(k) \exp(\gamma_q(k)t)| < A^n \exp(n\lambda T|k|), \tag{13}$$

де

$$\lambda = \max\left\{\left|\lambda_{sq}^{(2)}\right|,\ q = \overline{1,n};\ s = \overline{1,p}\right\}, \quad A = \max\left\{\exp\left(\left|b_q^{(1)}\right|T\right),\ q = \overline{1,n}\right\},$$

C — додатна константа, яка не залежить від k.

Теорема 3. *Нехай існують додатні константи* d, M_1 *і* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(k)| > M_1 |k|^{-\alpha_1-\varepsilon} \exp(-d|k|), \tag{14}$$

$$\prod_{r=1, r\ne l}^{n} |\gamma_l(k) - \gamma_r(k)| > M_1 |k|^{-\alpha_2-\varepsilon}, \quad l = \overline{1,n}, \tag{15}$$

де $0 < \varepsilon < 1$, *і нехай* $\varphi_j(x) \in A_\delta$, $j = \overline{1,n}$, $f(t,x) \in C([0,T], A_\delta)$, *де* $\delta > d + n\lambda T$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^n(D)$, *який зображається рядом* (11) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, *і* $f(t,x)$.

Доведення. З формул (9)–(11) та оцінок (12)–(15) маємо

$$\| u(t,x) \|_{C^n(D)} = \sum_{j+|s|\le n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^{j+|s|} u(t,x)}{\partial t^j \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \le$$

$$\le \frac{\nu A^n n}{M_1} \sum_{|k|\ge 0} \sum_{j=1}^{n} |k|^{n+\alpha_1+\varepsilon} |\varphi_{jk}| \exp((d+n\lambda T)|k|) +$$

$$+ \frac{\nu A^n n^2}{M_1^2} \sum_{|k|\ge 0} \bar{f}_k |k|^{n+\alpha_1+\alpha_2+2\varepsilon} \exp((d+n\lambda T)|k|) \le$$

$$\leq \frac{\nu A^n n}{M_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{|k|\geq 0}\left|\varphi_{jk}\right| \exp\left(\delta\,|k|\right) + \frac{n}{M_1}\sum_{|k|\geq 0}\bar{f}_k \exp\left(\delta\,|k|\right)\right) \leq$$

$$\leq Q(\|\varphi_j(x)\|_\delta + \|f(t,x)\|_{C([0,T],A_\delta)}), \tag{16}$$

де

$$\bar{f}_k = \max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)|,$$

ν — число розв'язків нерівності $j+|s|\leq n$ в цілих числах $j,\ s_1, \dots, s_p$. З нерівності (16) випливає доведення теореми.

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 3 розв'язок задачі (1), (2) належить простору $C^n([0,T];A_{\delta_1})$, де $\delta_1 < \delta-(d+n\lambda T)$.

Проаналізуємо можливість виконання нерівностей (14), (15). Для дискримінанта $D(p)$ полінома

$$P(\lambda) = \prod_{q=1}^{n}(\lambda-\gamma_q(k)) \equiv \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i P_i(\gamma_a)$$

вірні такі зображення:

$$D(p) = \prod_{n\geq q>l\geq 1}(\gamma_q(k)-\gamma_l(k))^2, \tag{17}$$

$$D(P) = \pm\begin{vmatrix} 1 & P_{n-1} & P_{n-2} & \dots & P_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & P_{n-1} & \dots & P_1 & P_0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & P_0 n \\ n & (n-1)P_{n-1} & \dots & P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 2P_2 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & n & (n-1)P_{n-1} & \dots & \dots & P_1 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Визначник (18) обчислюється за формулою $D(P)=\pm n^n P_0^{n-1}+F$, де F містить степені $P_0(k)$ менші, ніж $n-1$, тому $\operatorname{Re} D(P)=\pm n^n(\operatorname{Re}P_0(k))^{n-1}+F_1$, де F_1 містить степені $\operatorname{Re}P_0(k)$ менші, ніж $n-1$. Зауважимо, що

$$P_0(k) = (-1)^n\prod_{q=1}^{n}\left(i\sum_{s=1}^{p}k_s\lambda_{sq} + b_q\right) = (-ik_1)^n\lambda_{11}\dots\lambda_{1n}+R,$$

де R не містить добутку $\prod_{q=1}^{n}\lambda_{1q}$. При $n=2l$

$$\operatorname{Re}P_0(k) = (-1)^l k_1^n\prod_{q=1}^{n}\lambda_{1q}^{(1)}+R^{(1)},$$

а при $n=2l+1$

$$\operatorname{Re}P_0(k) = (-1)^l k_1^n\prod_{q=1}^{n}\lambda_{1q}^{(2)}+R^{(2)},$$

де $l \in \mathbb{N}$, $R^{(j)}$ не містить добутку $\prod_{q=1}^{n} \lambda_{1q}^{(j)}$, $j = 1, 2$. Позначимо

$$h_r = \left(\lambda_{r1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{rn}^{(1)}\right), \quad g_r = \left(\lambda_{r1}^{(2)}, \ldots, \lambda_{rn}^{(2)}\right), \; r = \overline{1, p}.$$

Лема 1. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2pn}$*) векторів* $\omega = \left\{ \left(\lambda_{rq}^{(1)}, \lambda_{rq}^{(2)}\right), r = \overline{1, p}, q = \overline{1, n} \right\}$ *і для довільних фіксованих* b_q, $q = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$|\operatorname{Re} D(p)| \geq |k|^{\mu}, \quad |k| > K(\omega), \quad \mu = (n-1)n(1-p) - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{19}$$

Доведення. Покажемо справедливість нерівності (19) для майже всіх векторів ω, які належать деякому паралелепіпеду $P = P_1 \times \ldots \times P_{2P} \subset \mathbb{R}^{2pn}$, де $P_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, 2p}$. Розглянемо випадок, коли r — парне число. Позначимо через B множину векторів ω, для яких виконується протилежна нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| < |k|^{\mu}, \tag{20}$$

а через B_k — множину векторів ω, для яких нерівність (20) виконуєтся при фіксованому векторі $k \in \mathbb{Z}^p$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що

$$|k_1| = \max_{1 \leq i \leq p} |k_i|.$$

Тоді

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{11}^{(1)}} \right)^{n-1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{1n}^{(1)}} \right)^{n-1} \operatorname{Re} D(P) \right| = n^n((n-1)!)^n |k_1|^{n(n-1)}.$$

На основі леми 2.3 з ([5], розд. 1) одержуємо, що міра множини B_k' векторів $h_1 = \left(\lambda_{11}^{(1)}, \ldots, \lambda_{1n}^{(1)}\right) \subset P_1$, які задовольняють нерівність (20) (при фіксованих решті $\lambda_{r_1 q}^{(1)}, \lambda_{rq}^{(2)}$, $r_1 = \overline{2, p}$, $r = \overline{1, p}$, $q = \overline{1, n}$), має оцінку

$$|B_k'| \leq Q(P_1) \left(\frac{|k|^{\mu}}{n^n ((n-1)!)^n |k|^{n(n-1)}} \right)^{1/(n-1)} =$$

$$= Q(P_1, n) |k|^{\mu/((n-1)n) - 1}. \tag{21}$$

Інтегруючи оцінку (21) за паралелепіпедом $P_2 \times \ldots \times P_{2p}$, одержуємо, що міра множини B_k векторів $\omega \in P$, для яких виконується нерівність (20), має оцінку

$$|B_k| \leq Q(P, n) |k|^{\mu/((n-1)n) - 1}.$$

Оскільки при $\mu = (n-1)n(1-p) - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, ряд $\sum_{|k|>0} |B_k|$ збігається, то згідно з лемою Бореля–Кантеллі [12] міра множини B дорівнює нулю. Отже, для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2pn}$) векторів $\omega \in P$ виконується нерівність (19) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що простір $\mathbb{R}^{2pn}$ можна покрити зчисленною кількістю паралелепіпедів P, дістаємо доведення леми для випадку парного n. При $n = 2l + +1$, $l \in \mathbb{N}$, доведення леми проводиться аналогічно.

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2pn}$*) векторів*

$$\omega = \left\{ \left(\lambda_{rq}^{(1)}, \lambda_{rq}^{(2)}\right), \ r = \overline{1, p}, \ q = \overline{1, n} \right\}$$

і довільних фіксованих b_q, $q = \overline{1, n}$, *нерівність* (15) *виконується при* $\alpha_2 = (n-1)(np-2)/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Враховуючи, що $|D(P)| > |\operatorname{Re} D(P)|$, з формули (17) та леми 1 одержуємо, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ вірна оцінка

$$\prod_{n \geq q > l \geq 1} |\gamma_q(k) - \gamma_l(k)| \geq Q(P, n)\, |k|^{(n-1)n(1-p)/2 - \varepsilon/2} \tag{22}$$

для майже всіх $\omega \in \mathbb{R}^{2pn}$. З рівності

$$\prod_{r=1,\, r \neq l}^{n} |\gamma_l(k) - \gamma_r(k)| =$$

$$= \prod_{n \geq q > l \geq 1} |\gamma_q(k) - \gamma_l(k)| \prod_{n \geq r > j \geq 1,\, r,\, j \neq l} \left(|\gamma_r(k) - \gamma_j(k)|\right)^{-1}$$

та оцінок (12) і (22) маємо

$$\prod_{r=1, r \neq l}^{n} |\gamma_l(k) - \gamma_r(k)| \geq M_1 |k|^{-(n-1)(np-2)/2 - \varepsilon/2},$$

де константа $M_1 > 0$ не залежить від k. Теорема доведена.

Теорема 5. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$ *і майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2pn}$*) векторів*

$$\omega = \left\{ \left(\lambda_{rq}^{(1)}, \lambda_{rq}^{(2)}\right), \ r = \overline{1, p}, \ q = \overline{1, n} \right\}$$

(при довільних фіксованих b_q, $q = \overline{1, n}$*) нерівність* (14) *виконується для всіх крім скінче...о числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо*

$$\alpha_1 = \frac{(n-1)n}{2} \left(\frac{(n-1)n(p-1)}{2} + p + 1 \right), \quad d = \lambda \sum_{t=1}^{n} t_i.$$

Доведення. Запишемо визначник $\Delta(k)$ у вигляді

$$\Delta(k) = \sum_{j=1}^{n} \exp(-\gamma_j(k) t_n) A_{nj},$$

де A_{nj} — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\gamma_j(k) t_n)$ у визначнику $\Delta(k)$. Розглянемо функції $\mathfrak{S}_q(k, \bar{t})$, $q = \overline{1, (n-1)n/2}$, які побудуємо за схемою, поданою в доведенні теореми 4 з [6]:

$$\mathfrak{S}_1(k, \bar{t}) = \exp(-\gamma_j(k) t_n) \Delta(k) =$$

$$= A_{n1} + \sum_{j=2}^{n} ((\gamma_j(k) - \gamma_1(k)) t_n) A_{nj};$$

$$\partial \mathfrak{S}_1(k,\bar{t})/\partial t_n =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} A_{nj}((\gamma_j(k)-\gamma_1(k))\exp((\gamma_j(k)-\gamma_1(k))t_n) =$$

$$= \exp((\gamma_2(k)-\gamma_1(k))t_n)\sum_{j=2}^{n} A_{nj}(\gamma_j(k)-\gamma_1(k))\exp((\gamma_j(k)-\gamma_2(k))t_n) \equiv$$

$$\equiv \exp((\gamma_2(k)-\gamma_1(k))t_n)\mathfrak{S}_2(k,\bar{t});$$

$$\partial \mathfrak{S}_2(k,\bar{t})/\partial t_n =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} A_{nj}(\gamma_j(k)-\gamma_1(k))((\gamma_j(k)-\gamma_2(k))\exp((\gamma_j(k)-\gamma_2(k))t_n) =$$

$$= \exp((\gamma_3(k)-\gamma_2(k))t_n)\sum_{j=3}^{n} A_{nj}(\gamma_j(k)-\gamma_1(k))(\gamma_j(k)-\gamma_2(k))\times$$

$$\times\exp((\gamma_j(k)-\gamma_3(k))t_n) \equiv \exp((\gamma_3(k)-\gamma_2(k))t_n)\mathfrak{S}_3(k,\bar{t}).$$

Продовжуючи аналогічний процес, одержуємо

$$\partial \mathfrak{S}_{n-1}(k,\bar{t})/\partial t_n =$$

$$= \prod_{s=1}^{n}(\gamma_n(k)-\gamma_s(k))\exp(\gamma_n(k)-\gamma_{n-1}(k)t_n)A_{nn}.$$

Функцію $\mathfrak{S}_n(k,\bar{t})$ побудуємо так:

$$\mathfrak{S}_n(k,\bar{t}) = \prod_{s=1}^{n}(\gamma_n(k)-\gamma_s(k))\exp((-\gamma_1(k))t_{n-1})A_{nn} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n}(\gamma_n(k)-\gamma_s(k))\sum_{j=1}^{n-1}\exp((\gamma_j(k)-\gamma_1(k))t_{n-1})A_{n-1,j},$$

$$\partial \mathfrak{S}_n(k,\bar{t})/\partial t_{n-1} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n}(\gamma_n(k)-\gamma_s(k))\sum_{j=2}^{n-1}\exp(\gamma_j(k)-\gamma_1(k))\times$$

$$\times\exp((\gamma_j(k)-\gamma_1(k))t_{n-1})A_{n-1,j} = \exp((\gamma_2(k)-\gamma_1(k))t_{n-1})\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n}(\gamma_n(k)-\gamma_s(k))\sum_{j=2}^{n-1}(\gamma_j(k)-\gamma_1(k))\times$$

$$\times\exp((\gamma_j(k)-\gamma_2(k))t_{n-1})A_{n-1,j} \equiv$$

$$\equiv \exp((\gamma_2(k)-\gamma_1(k))t_{n-1})\mathfrak{S}_{n+1}(k,\bar{t}).$$

Продовжуючи даний процес, одержуємо

$$\mathfrak{S}_{\nu(n)}(k,\bar{t}) = \prod_{\substack{1\le r<s\le n\\ s\ne 2}}(\gamma_s(k)-\gamma_r(k))\exp(\gamma_1(k)t_2)A_{33} =$$

$$= \prod_{\substack{1\le r<s\le n\\ s\ne 2}} (\gamma_s(k)-\gamma_r(k))\times$$

$$\times\left(\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)\right)\right)t_2+\gamma_1(k)t_1)-\exp\left(\gamma_2(k)t_1\right)),$$

$$\partial\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\ \bar{t})/\partial t_2 =$$

$$= \prod_{1\le r<s\le n} (\gamma_s(k)-\gamma_r(k))\exp\left((\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right),$$

де $\nu(n)=(n-1)n/2$. З даної рівності та нерівностей (22) випливає, що для майже всіх $\omega\in\mathbb{R}^{2pn}$ справджується оцінка

$$\left|\partial\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})/\partial t_2\right| >$$

$$> |k|^{(n-1)n(1-p)/2-\varepsilon/2}\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|.$$

За останньою нерівністю інтервал $[0,T]$ розбивається на підмножини A і B $(A\cup B=[0,T])$ такі, що

$$(\forall\, t_2\in A)\ \left|\operatorname{Re}\partial\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})/\partial t_2\right| >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{(n-1)n(1-p)/2-\varepsilon/2}\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|,$$

$$(\forall\, t_2\in B)\ \ \left|\operatorname{Im}\partial\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})/\partial t_2\right| >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{(n-1)n(1-p)/2-\varepsilon/2}\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|.$$

На основі леми 2.3 з ([5], розд. 1) для кожного з інтервалів множини A маємо оцінку

$$\operatorname{mes}\left\{t_2:\ \left|\operatorname{Re}\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right| \le\right.$$

$$\left.\le |k|^{(n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon/2}\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|\right\} \le$$

$$\le H_1|k|^{-p-1-\varepsilon_1}.$$

Число інтервалів, з яких складається множина A, не перевищує $T|(\gamma_2(k)-$ $-\gamma_1(k)|/\pi\le H_2|k|$. Отже,

$$\operatorname{mes}\left\{t_2\in A:\ \left|\operatorname{Re}\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right| \le\right.$$

$$\le |k|^{(n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon/2}\times$$

$$\left.\times\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|\right\} \le H_3|k|^{-p-\varepsilon}. \tag{23}$$

Аналогічно для множини B одержуємо

$$\operatorname{mes}\left\{t_2\in B:\ \left|\operatorname{Re}\mathfrak{G}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right| \le\right.$$

$$\le |k|^{(n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon/2}\times$$

$$\left.\times\left|\exp\left(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1)\right)\right|\right\} \le H_4|k|^{-p-\varepsilon}. \tag{24}$$

З нерівностей (23) і (24) випливає оцінка

$$\operatorname{mes}\left\{t_2 \in [0,T]: \left|\mathfrak{S}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right| \leq \right.$$
$$\leq |k|^{(n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon/2}\left.|\exp(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1))|\right\} \leq$$
$$\leq (H_3+H_4)|k|^{-p-\varepsilon}. \tag{25}$$

Інтегруючи оцінку (25) в кубі $[0,T]^{n-1}$ за змінними $t_1, t_3, \ldots, t_n$, маємо

$$\operatorname{mes}\left\{\bar{t} \in [0,T]^n: \left|\mathfrak{S}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right| \leq \right.$$
$$\leq |k|^{(n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon/2} \times$$
$$\times \left.|\exp(\gamma_2(k)t_2-\gamma_1(k)(t_2-t_1))|\right\} \leq H_5|k|^{-p-\varepsilon}.$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для $\left|\mathfrak{S}_{\nu(n)}(k,\bar{t})\right|$ до оцінки для $\left|\mathfrak{S}_{\nu(n)-1}(k,\bar{t})\right|$ і т. д., одержуємо, що для довільного $\varepsilon_1 > 0$ існують додатні константи C і σ такі, що оцінка

$$\left|\mathfrak{S}_1(k,\bar{t})\right| \leq$$
$$\leq |k|^{(n-1)n/2((n-1)n(1-p)/2-p-1-\varepsilon_1}\left|\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(k)t_i-\gamma_1(k)t_n\right)\right|$$

виконується для множини векторів $\bar{t} \in [0,T]^n$, міра якої не перевищує $C|k|^{-p-\sigma}$; при цьому враховується той факт, що число інтервалів зміни компоненти $t_s \in [0,T]$, $s=\overline{3,n}$, на яких виконуються нерівності $\left|\operatorname{Re}\partial\mathfrak{S}_r(k,\bar{t})/\partial t_s\right| > l(k)$ або $\left|\operatorname{Im}\partial\mathfrak{S}_r(k,\bar{t})/\partial t_s\right| > l(k)$, $r=\overline{1,\nu(n)-1}$, не перевищує $\operatorname{const}|k|$. На основі леми Бореля–Кантеллі [12] та збіжності ряду $\sum_{|k|>0}|k|^{-p-\sigma}$ маємо, що для майже всіх $\bar{t} \in [0,T]^n$ оцінка

$$|\Delta(k)| = |\exp(\gamma_1(k)t_n|\left|\mathfrak{S}_1(k,\bar{t})\right| >$$
$$> |k|^{-(n-1)n/2((n-1)n(p-1)/2+p+1+\varepsilon_1)}\exp\left(-\lambda|k|\sum_{i=1}^{n}t_i\right)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Покажемо справедливість використаного вище факту про число інтервалів зміни компонент t_q, $\overline{3,n}$, наприклад, у випадку $q=n$ та $1 \leq r \leq n-1$ (для інших випадків доведення аналогічне). Розглянемо функції

$$\mathfrak{S}_r(k,\bar{t}) = \sum_{j=r}^{r-1}\prod_{q=1}^{r-1}(\gamma_j(k)-\gamma_q(k))\exp((\gamma_j(k)-\gamma_r(k))t_n)A_{nj}, \quad r=\overline{1,n-1}.$$

Очевидно,

$$\partial\mathfrak{S}_r(k,\bar{t})/\partial t_n = \sum_{j=r+1}^{n}\prod_{q=1}^{r-1}(\gamma_j(k)-\gamma_q(k))\exp((\gamma_j(k)-\gamma_r(k))t_n)A_{nj}.$$

На кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) зміни величини

$t_n \in [0, T]$, на яких справджується нерівність

$$\left|\mathrm{Re}\,\partial \mathfrak{G}_r(k, \bar{t})/\partial t_n\right| > l(k),$$

функція $\mathrm{Re}\,\partial^2 \mathfrak{G}_r(k, \bar{t})/\partial t_n^2 \equiv y(|k| t_n) = \tilde{y}_k(z)$ має (за теоремою Ролля) принаймні один нуль. Зауважимо, що $\tilde{y}_k(z)$ є розв'язком рівняння

$$\prod_{j=r+1}^{n}\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2\left(b_j^{(1)} - b_r^{(1)} - \sum_{s=1}^{p} k_s\left(\lambda_{sj}^{(2)} - \lambda_{sr}^{(2)}\right)\right)\frac{d}{dz} + \right.$$
$$+ \left(b_j^{(1)} - b_r^{(1)} - \sum_{s=1}^{p} k_s\left(\lambda_{sj}^{(2)} - \lambda_{sr}^{(2)}\right)\right)^2 +$$
$$\left. + \left(b_j^{(2)} - b_r^{(2)} - \sum_{s=1}^{p} k_s\left(\lambda_{sj}^{(1)} - \lambda_{sr}^{(1)}\right)\right)^2\right) y(z) = 0. \qquad (*)$$

Згідно з теоремою Валле Пуссена [13], існує таке $h_r > 0$, що будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (*) має на інтервалі довжини h_r не більше ніж $(2n - 2r - 1)$ нулів. Тому число нулів функції $\mathrm{Re}\,\partial^2 \mathfrak{G}_r(k, \bar{t})/\partial t_n^2$ як функції аргумента t_n на інтервалі $[0, T]$ не перевищує $T|k|(2n - 2r - 1)/h_r$. Звідси стає очевидним твердження про те, що число інтервалів зміни компоненти t_n на яких виконується нерівність $\left|\mathrm{Re}\,\partial \mathfrak{G}_r(k, \bar{t})/\partial t_n\right| > l(k)$, не перевищує $\mathrm{const}\,|k|$. Аналогічно доводиться цей факт для нерівності $\left|\mathrm{Im}\,\partial \mathfrak{G}_r(k, \bar{t})/\partial t_n\right| > l(k)$.

У випадку, коли вірні співвідношення

$$t_j = (j - 1)t_0, \quad t_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (26)$$

визначник $\Delta(k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \prod_{n \geq q > r \geq 1} \left(\exp\left(\gamma_q(k) t_0\right) - \exp\left(\gamma_r(k) t_0\right)\right). \qquad (27)$$

На основі теореми 1 і формули (27) одержуємо таке твердження.

Теорема 6. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2), (26) *у просторі* $C^n(D)$ *необхідно і досить, щоб рівняння*

$$\left(\gamma_q(k) - \gamma_r(k)\right) t_0 - i2\pi l = 0, \quad n \geq q > r \geq 1, \qquad (28)$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots k_p, l$.

З (28) та теореми 2.3 з ([5], розд. 2) випливають наступні твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\lambda_{sj}^{(2)} = \lambda_{sr}^{(2)}, s = \overline{1, p}$, $n \geq q > r \geq 1$. *Якщо всі числа* $b_q^{(1)}$, $q = \overline{1, n}$, *різні, то в просторі* $C^n(D)$ *має місце єдиність розв'язку задачі* (1), (2), (26).

Наслідок 2. *Нехай* $b_q^{(2)} = 0, q = \overline{1, n}$. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2), (26) *в просторі* $C^n(D)$ *необхідно і досить, щоб рівняння* (28) *не мали розв'язків у цілих числах* l *і* $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

При виконанні співвідношень (26) (якщо визначник (27) відмінний від нуля) формули (7), (8) набувають вигляду

$$w_k = \sum_{q=1}^{n} B_{kq} \exp\left(\gamma_q(k) t\right) \prod_{m=1, m \neq q} \left(\exp\left(\gamma_q(k) t_0\right) - \exp\left(\gamma_m(k) t_0\right)\right)^{-1}, \qquad (29)$$

$$v_k = \sum_{p=1}^{n} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \left(g_k(t,\tau) + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{m,j=1}^{n} \frac{(-1)^{1+j} \exp(\gamma_m(k)t)}{\prod_{j=1,\, j+m}^{n} (\gamma_m(k) - \gamma_j(k))} \times \right.$$

$$\times \frac{\sum_{q=1}^{p} (-1) \exp(\gamma_m(k))(t_q - \tau) S_{n-q}^{(j)}) + \sum_{q=p+1}^{n} \exp(\gamma_m(k)(t_q - \tau) S_{n-q}^{(j)}}{\prod_{r=1,\, j+m}^{n} \left(\exp(\gamma_j(k)t_0\right) - \exp\left(\gamma_r(k)t_0\right)} \times$$

$$\times f_k(\tau)\, d\tau, \quad j = \overline{1,n},\, t_{n+1} = T, \tag{30}$$

де

$$B_{kq} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{q+r+1} \varphi_{k,r+1} S_{n-1-r}^{(q)};$$

$S_{n-1-r}^{(q)}$ — сума всіляких добутків елементів $\exp\left(\gamma_m(k)t_0\right)$, $m = \overline{1,n}$, $m \neq q$, взятих у кількості $(n-1-r)$, $S_0^{(q)} = 1$, а $g_k(t,\tau)$ визначається формулою (10). Розв'язок задачі (1), (2), (26) зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \geq 0} \exp(ik,x)\left(w_k(t) + v_k(t)\right). \tag{31}$$

Зауважимо, що для довільних $k \in \mathbb{Z}^p$ і $t \in [0,T]$ справедливі оцінки

$$|B_{kq} \exp\left(\gamma_q(k)t\right)| \leq A \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| \exp(2\lambda T|k|), \quad q = \overline{1,n}. \tag{32}$$

З формул (29)–(31) та оцінок (32) маємо наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай існують* $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ *і* $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності* (15) *і нерівності*

$$\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq n}}^{n} |\exp\left(\gamma_j(k)t_0\right) - \exp\left(\gamma_r(k)t_0\right)| \geq$$

$$\geq M_2 \exp(-\lambda T|k|)|k|^{-\alpha_3 - \varepsilon}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{33}$$

де $0 < \varepsilon < 1$. *Якщо* $\varphi_j(x) \in A_\delta$, $j = \overline{1,n}$, $f(t,x) \in C([0,T], A_\delta)$, *де* $\delta > 3\lambda T$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2), (26) *з простору* $C^n(D)$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, *і* $f(t,x)$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.

***Зауваження* 3.** Якщо виконані умови теореми 7, то розв'язок задачі (1), (2), (26) належить простору $C^n([0,T], A_{\delta_2})$, де $\delta_2 < \delta - 3\lambda T$.

Виясним, наскільки „масивна" множина задач (1), (2), (26), для яких виконуються нерівності (33). Зауважимо, що з оцінок (12) та леми 2.4 із ([5], розд. 1) випливає таке твердження.

Лема 2. *Для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел* t_0 *кожна з нерівностей*

$$\left| \frac{\operatorname{Im}(\gamma_r(k) - \gamma_j(k))}{|k|} - \frac{m}{|k|} \frac{2\pi}{t_0} \right| < |k|^{-p-1-\varepsilon}, \quad r, j = \overline{1,n}, \quad r \neq j, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{34}$$

має не більше ніж скінченне число розв'язків у цілих числах $k_1, \dots k_p, m,\ m \neq 0$, $|k| \neq 0$.

Теорема 8. *Якщо* $\alpha_3 = (n-1)(n(n-1)p/2-1)$, *то при* $|k| > K(\tilde{\omega})$ *нерівності* (31) *виконуються для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2pn+1}$*) векторів* $\tilde{\omega} = (\omega, t_0)$ *і для довільних фіксованих* $b_q, q = \overline{1,n}$.

Доведення. З оцінок (12) і (22) одержуємо, що для майже всіх векторів ω при $|k| > K(\omega)$ виконуються оцінки

$$|\gamma_r(k)-\gamma_j(k)| > M_3|k|^{1-((n-1)np+\varepsilon)/2}, \quad r,\ j=\overline{1,n}, \quad r\neq j, \quad 0<\varepsilon<1. \tag{35}$$

Позначимо через D множину векторів $\omega \in \mathbb{R}^{2pn}$, для яких виконуються нерівності (35). За нерівністю (35) множина D розбивається на підмножини D_1 і D_2 $(D_1 \cup D_2 = D)$ такі, що

$$(\forall\ \omega \in D_1) \quad |\mathrm{Re}\,(\gamma_r(k)-\gamma_j(k))| > \\ > \left(\frac{M_3}{\sqrt{2}}\right)|k|^{1-((n-1)np+\varepsilon)/2}, \tag{36}$$

$$(\forall\ \omega \in D_2) \quad |\mathrm{Im}\,(\gamma_r(k)-\gamma_j(k))| > \\ > \left(\frac{M_3}{\sqrt{2}}\right)|k|^{1-((n-1)np+\varepsilon)/2}. \tag{37}$$

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що в нерівностях (33)

$$\mathrm{Re}\,(\gamma_r(k)-\gamma_j(k)) \geq 0, \quad r,\ j=\overline{1,n},\ r\neq j.$$

Позначимо

$$F(k) = A\exp(-\lambda t_0|k|), \quad q_{rj}(k) = \mathrm{Im}\,(\gamma_r(k)-\gamma_j(k)).$$

Тоді для всіх $\omega \in D_1$ виконуються оцінки

$$|\exp(\gamma_j(k)t_0)-\exp(\gamma_r(k)t_0)| \geq \\ \geq F(k)|\mathrm{Re}\,(\gamma_r(k)-\gamma_j(k))| > \\ > M_4F(k)|k|^{1-((n-1)np+\varepsilon)/2}, \tag{38}$$

а для всіх $\omega \in D_2$ маємо

$$|\exp(\gamma_j(k)t_0)-\exp(\gamma_r(k)t_0)| \geq \\ \geq 2F(k)|\sin(q_{rj}(k)t_0/2)| = \\ = 2F(k)|\sin|(q_{rj}(k)t_0/(2\pi)-m)\pi|| \geq \\ \geq 4F(k)|q_{rj}(k)t_0/(2\pi)-m| \geq \\ \geq \frac{2|k|F(k)t_0}{\pi\left|q_{rj}(k)/|k| - (m/|k|)(2\pi/t_0)\right|}, \tag{39}$$

де $m \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність $|q_{rj}(k)t_0/(2\pi)-m| \leq 1/2$.

На основі нерівностей (39) і леми 2 одержуємо, що для всіх $\omega \in D_2$ і для майже всіх t_0 виконуються оцінки

$$|\exp(\gamma_r(k)t_0) - \exp(\gamma_j(k)t_0)| \geq$$

$$\geq M_5 \exp(-\lambda t_0|k|)|k|^{-p-\varepsilon}. \tag{40}$$

З нерівностей (38) і (40) випливає доведення теореми.

З теорем 7 і 8 випливає наступне твердження.

Теорема 9. *Нехай*

$$\varphi_j(x) \in A_\delta, \quad j = \overline{1, n}, \quad f(t, x) \in C([0, T], A_\delta),$$

де $\delta > 3\lambda T$. *Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2pn+1}$*) векторів* $\tilde{\omega} = (\omega, t_0)$ *і для довільних фіксованих* b_q, $q = \overline{1, n}$, *існує розв'язок задачі* (1), (2), (36) *з простору* $C^n(D)$, *який зображається рядом* (29) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$ *і* $f(t, x)$.

Результати роботи переносяться на випадок, коли в рівнянні (1) коефіцієнти λ_{sq} і b_q є комплекснозначними функціями аргумента t.

1. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
2. *Пташник Б. Й.* n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 16. – С. 80–87.
3. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
4. *Пташник Б. Й.* Аналог n-точкової задачі для лінійного гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 1961. – **23**, № 4. – С. 472–478.
5. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 10–32.
7. *Атамонов Э. Р.* О единственности и устойчивости решения многоточечной задачи для псевдопараболического уравнения // Вопросы корректности задач математической физики. – Новосибирск: Выч. центр СО АН СССР, 1977. – С. 12–22.
8. *Валицкий Ю. Н.* О корректности многоточечной задачи для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1986. – **286**, № 5. – С. 1041–1043.
9. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 46–53.
10. *Романов В. Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 2. – С. 275–283.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
12. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
13. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Одержано 15. 06. 95