УДК 517.98

Ю. С. Мишура, А. С. Лаврентьев (Киев. ун-т)

ТЕОРЕМА ХИЛЛЕ – ИОСИДА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

The paper is devoted to multiparameter semigroups of two types (multiplicative and coordinate-wise type) and resolvent operators connected with such semigroups. The alternative form of Hille–Yosida theorem in terms of resolvent operators is proved. To simplify technical details, statements and proofs are given for two-parameter semigroups.

Розглядаються багатопараметричні півгрупи двох типів (мультиплікативні та покоординатні) та резольвентні оператори, пов'язані з такими півгрупами. Доведено альтернативну форму теореми Хілле – Іосіда в термінах резольвентних операторів. З метою спрощення технічних деталей формулювання та доведення наведено для випадку двох параметрів.

Пусть $t=(t_1, t_2)\in R_+^2$, $0=(0,0)$, X — банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в X, $\{T_t,\ t\in R_+^2\}\subset\mathcal{L}(X)$ — семейство операторов, удовлетворяющих условию

А) 1) для всех $t\in R_+^2$ $\|T_t\|\le 1$; 2) операторы T_t сильно непрерывны по t, т. е. для любого $x\in X$ и $s\in R_+^2$

$$\lim_{t\to s}\|T_t x - T_s x\| = 0.$$

***Определение* 1.** *Семейство* $\{T_t,\ t\in R_+^2\}$ *называется мультипликативной полугруппой, если оно удовлетворяет условиям* А) *и* В) 1) $T_0=I$; 2) *для всех* $t,s\in R_+^2$ $T_{t+s}=T_tT_s$.

***Определение* 2.** *Семейство* $\{T_t,\ t\in R_+^2\}$ *называется покоординатной полугруппой, если оно удовлетворяет условиям* А) *и* С) 1) *для всех* $t_1\ge 0$, $t_2\ge 0$ $T_{t_1 0}=T_{0t_2}=I$; 2) *для всех*

$$t,s\in R_+^2\quad T_{t_1t_2+s_2}=T_tT_{t_1s_2},\quad T_{t_1+s_1t_2}=T_tT_{s_1t_2}.$$

***Замечания.* 1.** Мультипликативные полугруппы впервые рассмотрены в [1]; покоординатные полугруппы как объекты, естественным образом порождаемые случайными полями, рассмотрены в [2–4].

2. Пусть $\{T_t,\ t\in R_+^2\}$ — мультипликативная полугруппа. Рассмотрим в условии В 2) $t=(t_1,0)$ и $s=(0,s_2)$. Тогда $T_{t_1s_2}=T_{t_10}T_{0s_2}$. Полагая $T_{t_1}^1 = T_{t_10}$, $T_{s_2}^2=T_{0s_2}$, получаем

$$T_t = T_{t_1}^1T_{t_2}^2, \tag{1}$$

где полугруппы $T_{t_i}^i\in\mathcal{L}(X)$ и сильно непрерывны по t_i.

Резольвенту, связанную с двупараметричными полугруппами, в обоих случаях зададим как преобразование Лапласа

$$R_{zw}x = \int_{R_+^2}\exp\{-zt_1-wt_2\}T_tx\,dt_1dt_2,\quad z,w\in\mathbb{C},\quad \operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}w>0. \tag{2}$$

Введем также совокупность резольвентных операторов

$$\left(R^{n,m}_{z^n,w^m},\ \operatorname{Re}z_i^n>0,\ \operatorname{Re}w_j^m>0\right),\quad z^n \doteq \left(z_1^n,\dots,z_n^n\right)\in C^n,$$

$$w^m = \left(w_1^m, \ldots, w_m^m\right) \in C^m, \quad m \geq 1, \ n \geq 1,$$

вида

$$R_{z^n, w^m}^{n, m} x = \int\limits_{R_+^{n+m}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} z_i^n s_i - \sum_{j=1}^{m} w_j^m t_j\right\} T_{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i, \sum\limits_{j=1}^{m} t_j} x \prod_{i=1}^{n} ds_i \prod_{j=1}^{m} dt_j. \tag{3}$$

Замечания **3.** Из сравнения (2) и (3) видно, что $R_{zw} = R_{zw}^{1,1}$.

4. Если T_t — мультипликативная полугруппа, то из (1) следует

$$R_{z^n, w^m}^{n, m} = \prod_{i=1}^{n} R_{z_i^n}^1 \prod_{j=1}^{m} R_{w_j^m}^2,$$

где

$$R_z^i = \int\limits_{R_+} \exp\{-z t_i\} T_{t_i}^i x \, dt_i$$

— резольвента полугруппы $T_{t_i}^i$, $i = 1, 2$.

5. В [4] выведены следующие уравнения для резольвентных операторов полугруп Π обоих типов:

$$\left(z_i^n - u_i^n\right)^{-1}\left(R_{z^n, w^m}^{n, m} - R_{u^n, w^m}^{n, m}\right) = R_{(u_i^n; z^n), w^m}^{n+1, m}, \tag{4}$$

$$\left(w_j^m - v_j^m\right)^{-1}\left(R_{z^n, w^m}^{n, m} - R_{u^n, v^m}^{n, m}\right) = R_{z^n, (v_j^m, w^m)}^{n, m+1}, \tag{5}$$

где $u^n = \left(z_1^n, \ldots, u_i^n, \ldots, z_n^n\right)$, $v^m = \left(w_1^m, \ldots, v_j^m, \ldots, w_m^m\right)$, а также найдены производные R_{zw}:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial w^l} R_{zw} = (-1)^{k+l} k! \, l! \, R_{\overline{z}^{k+1}, \overline{w}^{l+1}}^{k+1, l+1}, \tag{6}$$

$$\overline{z}^{k+1} = \underbrace{(z, \ldots, z)}_{k+1}, \quad \overline{w}^{l+1} = \underbrace{(w, \ldots, w)}_{l+1}.$$

6. Очевидно, резольвентные операторы $R_{z^n, w^m}^{n, m}$ являются эндоморфизмами;

$$\left\| R_{z^n, w^m}^{n, m} \right\| \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{Re} z_i^n \prod_{j=1}^{m} \operatorname{Re} w_j^m\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$R_{z^n, w^m}^{n, m} = R_{\pi_1 z^n, \pi_2 w^m}^{n, m}, \tag{8}$$

где π_1 и π_2 — произвольные перестановки координат векторов z^n и w^m соответственно. Более того, если семейство $R_{z^n, w^m}^{n, m}$ порождено мультипликативной полугруппой, то для любого $k \geq 1$ и любых $x_r \in X$, $r = \overline{1, k}$,

$$\left\| \sum_{r=1}^{k} R_{\left(z, z_r^{n_r}\right), w_r^{m_r}}^{n_r+1, m_r} x_r \right\| \leq (\operatorname{Re} z)^{-1} \left\| \sum_{r=1}^{k} R_{z_r^{n_r}, w_r^{m_r}}^{n_r, m_r} x_r \right\|, \tag{9}$$

$$\left\| \sum_{r=1}^{k} R^{n_r, m_r+1}_{z_r^{n_r}, \left(w, w_r^{m_r}\right)} x_r \right\| \leq (\operatorname{Re} w)^{-1} \left\| \sum_{r=1}^{k} R^{n_r, m_r}_{z_r^{n_r}, w_r^{m_r}} x_r \right\|, \tag{10}$$

где $z, w \in C$, $z_r^n \in C^n$, $w_r^m \in C^m$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Re} z_i^n > 0$, $\operatorname{Re} w_j^m > 0$.

Лемма 1. *Пусть* $z, w \in R$, $z > 0$, $w > 0$. *Тогда для обоих типов полугрупп*

$$\lim_{z, w \to \infty} zwR_{zw} = I \tag{11}$$

в смысле сильной сходимости.

Лемма 2. *Пусть* T_t *— покоординатная полугруппа. Тогда: а) для любого* $\alpha > 0$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ n \to \infty}} zR^{1, n}_{z, (\overline{\alpha n})^n} (\alpha n)^n = I; \tag{12}$$

б) для любых $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, $\alpha > 0$

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha n)^n \left[R^{1, n}_{z_1, (\overline{\alpha n})^n} R^{1, n}_{z_2, (\overline{\alpha n})^n} (\alpha n)^n - R^{2, n}_{(z_1, z_2), (\overline{\alpha n})^n} \right] = I \tag{13}$$

в смысле сильной сходимости (здесь вектор $(\overline{\alpha n})^n = \underbrace{(\alpha n, \ldots, \alpha n)}_{n}$*).*

Доказательство. 1. Поскольку для любого $x \in X$

$$zwR_{zw}x = \int_{R_+^2} e^{-s-t} T_{(s/z)\ (t/w)} x \, ds dt,$$

то (11) вытекает из сильной непрерывности T_t по t, условий В 1) или С 1) и теоремы типа теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

2. а) В силу равенства (6) достаточно доказать, что

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ n \to \infty}} (-1)^{n-1} z \left[(n-1)! \right]^{-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}} R_{zw} \Big|_{w = \alpha n} (\alpha n)^n = I.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}} R_{zw} x = (-1)^{n-1} \int_{R_+^2} \exp\{-zs - wt\} t^{n-1} T_{st} x \, ds dt,$$

достаточно установить, что для любой сильно непрерывной ограниченной функции $g\colon R_+^2 \to \mathcal{L}(X)$

$$r_\alpha := \lim_{\substack{z \to \infty \\ n \to \infty}} z(\alpha n)^n \left[(n-1)! \right]^{-1} \int_{R_+^2} \exp\{-zs - \alpha nt\} t^{n-1} g(s, t) \, ds dt = g(0, \alpha^{-1}).$$

Функцию $p_{n,z}(s, t) = p_z(s) p_n(t)$, $p_z(s) = ze^{-zs}$, $p_n(t) = (\alpha n)^n \left[(n-1)! \right]^{-1} \times \times e^{-\alpha nt} t^{n-1}$, $(s, t) \in R_+^2$, можно интерпритировать как плотность совместного распределения независимых между собой координат двумерного вектора (ξ_z, η_n) с математическим ожиданием $E_z = (z^{-1}, \alpha^{-1})$ и матрицей ковариаций

$$A_{n,z} = \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & (n\alpha^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

При $z \to \infty$ и $n \to \infty$ $E_z \to (0, \alpha^{-1})$ и $A_{\eta z} \to 0$. Поэтому в силу утверждения, аналогичного, например, лемме 1 [5, с. 255],

$$r_\alpha = \lim_{\substack{z \to \infty \\ n \to \infty}} Eg(\xi_z, \eta_n) = g(0, \alpha^{-1}).$$

2. б) Представим резольвенту R_{zw} в виде

$$R_{zw}x = \int_0^\infty e^{-wt} p_t^z \, dt,$$

где

$$p_t^z = \int_0^\infty e^{-zs} T_{st} x \, ds.$$

Таким образом, R_{zw}— обычное преобразование Лапласа по w функции p_t^z при фиксированном z. В силу формулы обращения, а также (6)

$$p_{1/\alpha}^z = \lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} [(n-1)!]^{-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}} R_{zw} \Big|_{w = n\alpha} (n\alpha)^n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (n\alpha)^n R^{1,n}_{z, (\overline{\alpha n})^n}, \tag{14}$$

причем совокупность операторов $A_n^z = (n\alpha)^n R^{1,n}_{z, (\overline{\alpha n})^n}$ ограничена по норме: $\| A_n^z \| \le (\operatorname{Re} z)^{-1}$.

Поскольку покоординатная полугруппа T_{st} является полугруппой по s при фиксированном t, то p_t^z при фиксированном t — резольвента по z полугруппы $T_{\cdot t}$. Следовательно, она удовлетворяет резольвентному уравнению

$$p_t^{z_1} - p_t^{z_2} = (z_2 - z_1) p_t^{z_1} p_t^{z_2}. \tag{15}$$

Левая часть (15) согласно (14) и (4) равна

$$\lim_{n \to \infty} \left(A_n^{z_1} - A_n^{z_2} \right) = \lim_{n \to \infty} (n\alpha)^n \left(R^{1,n}_{z_1, (\overline{\alpha n})^n} - R^{1,n}_{z_2, (\overline{\alpha n})^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (n\alpha)^n (z_2 - z_1) R^{2,n}_{(z_1, z_2), (\overline{\alpha n})^n}, \quad \alpha = t^{-1}. \tag{16}$$

Правая часть (15) в силу ограниченности по норме операторов $A_n^{z_1}$ и $A_n^{z_2}$ имеет вид

$$\lim_{n \to \infty} (z_2 - z_1) A_n^{z_1} A_n^{z_2} = \lim_{n \to \infty} (n\alpha)^{2n} R^{1,n}_{z_1, (\overline{\alpha n})^n} R^{1,n}_{z_2, (\overline{\alpha n})^n}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует 2 б). Лемма доказана.

***Замечание* 7.** Для покоординатной полугруппы справедливы также соотношения, получаемые из 2 а) и 2 б) с помощью симетричной замены координат.

Приведем теперь утверждения типа теоремы Хилле – Иосида для обоих типов полугрупп.

Теорема 1. *Семейство эндоморфизмов*

$$\left\{ R^{n,m}_{z^n, w^m}, \ n \ge 1, \ m \ge 1, \ \operatorname{Re} z_i^n > 0, \ \operatorname{Re} w_j^m > 0 \right\} : X \to X$$

связано соотношениями (2) *и* (3) *с некоторой мультипликативной полугруппой* $\{T_t,\ t \in R_+^2\} \subset \mathcal{L}(X)$ *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнениям* (4) *и* (5), *равенству* (8), *неравенствам* (9) *и* (10) *и соотношению* (11).

Доказательство. *Необходимость* условий вытекает из утверждений 3 и 4, замечаний 5, 6 и утверждения леммы 1.

Достаточность. Образуем множество

$$X_0 = \text{л. о.}\left(\bigcup_{\substack{n \geq 1,\ m \geq 1 \\ \operatorname{Re} z_i^n > 0,\ \operatorname{Re} w_j^m > 0}} \Re\left(R^{n,m}_{z^n, w^m}\right) \right),$$

$\Re(A)$ — область значений оператора A. Очевидно, X_0 — линейное пространство. На X_0 определим операторы R_z^1 и R_w^2, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, следующего вида: если $y \in X_0$, то

$$y = \sum_{k=1}^{p} R^{n_k, m_k}_{z_k^{n_k}, w_k^{m_k}} x_k;$$

тогда

$$R_z^1 y = \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+1, m_k}_{(z, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k, \quad R_w^2 y = \sum_{k=1}^{p} R^{n_k, m_k+1}_{z_k^{n_k}, (w_k^{m_k}, w)} x_k. \tag{18}$$

Из равенств (8) и (18) вытекает

$$R_z^1 R_u^1 y = R_z^1 \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+1, m_k}_{(u, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k = \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+2, m_k}_{(z, u, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k = R_u^1 R_z^1 y.$$

Аналогично, операторы R_w^2 и R_v^2 также коммутируют между собой.

Проверим, что R_z^1 на X_0 удовлетворяет условиям обычной теоремы Хилле – Иосида (свойства операторов R_w^2 проверяются аналогично):

1) резольвентное уравнение следует из соотношений

$$R_z^1 y - R_u^1 y = \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+1, m_k}_{(z, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k - \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+1, m_k}_{(u, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k =$$

$$= (u - z) \sum_{k=1}^{p} R^{n_k+2, m_k}_{(z, u, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k = (u - z) R_u^1 R_z^1 y.$$

2) В силу неравенства (9) $\left\| R_z^1 \right\| \leq (\operatorname{Re} z)^{-1}$.

3) Используя резольвентное уравнение (4), для любого $z > 0$ получаем

$$y \in B_0 \colon z R_z^1 y - y = \sum_{k=1}^{p} z R^{n_k+1, m_k}_{(z, z_k^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k - \sum_{k=1}^{p} R^{n_k, m_k}_{z_k^{n_k}, w_k^{m_k}} x_k =$$

$$= z \sum_{k=1}^{p} \left(z_{1,k}^{n_k} - z\right)^{-1} \left(R^{n_k, m_k}_{(z, z_{2,k}^{n_k}, \ldots, z_{n_k,k}^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k - z_{1,k}^{n_k} z^{-1} R^{n_k, m_k}_{z_k^{n_k}, w_k^{m_k}} x_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} z\left(z_{1,k}^{n_k} - z\right)^{-1} R^{n_k, m_k}_{(z, z_{2,k}^{n_k}, \ldots, z_{n_k,k}^{n_k}), w_k^{m_k}} x_k - \sum_{k=1}^{p} z_{1,k}^{n_k}\left(z - z_{1,k}^{n_k}\right)^{-1} R^{n_k, m_k}_{z_k^{n_k}, w_k^{m_k}} x_k.$$

Поэтому

$$\lim_{z\to\infty}\left\| zR_z^1 y - y\right\| \le \lim_{z\to\infty} z^{-1}\sum_{k=1}^{p}\left| z\left(z_{1,k}^{n_k} - z\right)^{-1}\right| \prod_{i=1}^{n_k}\left(\operatorname{Re} z_{i,k}^{n_k}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{m_k}\left(\operatorname{Re} w_{j,k}^{m_k}\right)^{-1} +$$

$$+ \lim_{z\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\left|z_{1,k}^{n_k}\right|\left|z - z_{1,k}^{n_k}\right|^{-1}\left\| R^{n_k, m_k}_{z_k^{n_k}, w_k^{m_k}} x_k\right\| = 0.$$

Из соотношения (11) следует, что X_0 всюду плотно в X. Продолжим операторы R_z^1 и R_w^2 по непрерывности с учетом условия 2 на все X. Очевидно, свойства $1-3$ при этом сохраняются. Продолжение будем обозначать через $\tilde{R}_z^1$ и $\tilde{R}_w^2$. Таким образом, операторы $\tilde{R}_z^1$ и $\tilde{R}_w^2$ удовлетворяют на X всем условиям обычной теоремы Хилле – Иосида.

Значит, существует сжимающая полугруппа $T_{t_1}^1$ на X такая, что

$$\tilde{R}_z^1 x = \int_0^\infty e^{-zt_1} T_{t_1}^1 x\, dt_1.$$

Аналогично, существует сжимающая полугруппа $T_{t_2}^2$ на X такая, что

$$\tilde{R}_w^2 x = \int_0^\infty e^{-wt_2} T_{t_2}^2 x\, dt_2.$$

Пусть

$$y = R_{z_1 w_1} x, \quad x \in X_0, \quad \operatorname{Re} z_1 > 0, \quad \operatorname{Re} w_1 > 0.$$

Тогда, в силу уравнений (4) и (5) справедливы соотношения

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ w\to\infty}}\left\| zwR^{2,2}_{(z, z_1), (w, w_1)} x - y\right\| =$$

$$= \lim_{\substack{z\to\infty\\ w\to\infty}}\left\| zw(w_1 - w)^{-1}(z_1 - z)^{-1}\left(R_{zw} - R_{z_1 w} - R_{z w_1} + R_{z_1 w_1}\right)(x) - R_{z_1 w_1} x\right\| \le$$

$$\le \lim_{\substack{z\to\infty\\ w\to\infty}}\|x\|\Big(\left|(w_1 - w)(z_1 - z)\right|^{-1} + z\left|(w_1 - w)(z_1 - z)\right|^{-1}(\operatorname{Re} z_1)^{-1} +$$

$$+ w\left|(w_1 - w)(z_1 - z)\right|^{-1}(\operatorname{Re} w_1)^{-1} +$$

$$+ \left|wz_1 + zw_1 - w_1 z_1\right|\left(\left|(w - w_1)(z - z_1)\right|\right)^{-1}\left(\operatorname{Re}(z_1 w_1)\right)^{-1}\Big) = 0.$$

Таким образом, в силу соотношения (11) и непрерывности полугрупп $T_{t_i}^i$ как функций на X

$$R_{z_1 w_1} x = \lim_{\substack{z\to\infty\\ w\to\infty}} zw R^{2,2}_{(z, z_1), (w, w_1)} x = \lim_{\substack{z\to\infty\\ w\to\infty}} zw R^1_{z_1} R^2_{w_1}(R_{zw} x) =$$

$$= \lim_{\substack{z \to \infty \\ w \to \infty}} zw \int_{R_+^2} \exp\{-z_1 t_1 - w_1 t_2\} T_{t_1}^1 T_{t_2}^2 R_{zw} x \, dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_{R_+^2} \exp\{-z_1 t_1 - w_1 t_2\} T_{t_1}^1 T_{t_2}^2 x \, dt_1 dt_2 = R_{z_1}^1 R_{w_1}^2 x.$$

Полученное соотношение по непрерывности можно продолжить на все X. В результате для любого $x \in X$ получим

$$R_{z_1 w_1} x = \tilde{R}_{z_1}^1 \tilde{R}_{w_1}^2 x, \quad \operatorname{Re} z_1 > 0, \quad \operatorname{Re} w_1 > 0.$$

Полагая $T_t = T_{t_1}^1 T_{t_2}^2$, имеем соотношение (2). Теперь, из равенства

$$R_{z_1 w_1} x = \int_{R_+^2} \exp\{-z_1 t_1 - w_1 t_2\} T_t x \, dt_1 dt_2$$

следует

$$R_{z^n, w^m}^{n, m} x = \prod_{i=1}^{n} R_{z_i^n}^1 \prod_{j=1}^{m} R_{w_j^m}^2 x =$$

$$= \int_{R_+^{n+m}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} z_i^n s_i - \sum_{j=1}^{m} w_j^m t_j\right\} \prod_{i=1}^{n} T_{s_i}^1 \prod_{j=1}^{m} T_{t_j}^2 \prod_{i=1}^{n} ds_i \prod_{j=1}^{m} dt_j.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь X — рефлексивное банахово пространство.

Теорема 2. *Семейство эндоморфизмов*

$$\left\{R_{z^n, w^m}^{n, m};\ n \geq 1,\ m \geq 1,\ \operatorname{Re} z_i^n > 0,\ \operatorname{Re} w_j^m > 0\right\}: X \to X$$

связано соотношениями (2) *и* (3) *с некоторой покоординатной полугруппой* $\{T_t,\ t \in R_+^2\} \subset \mathcal{L}(X)$ *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнениям* (4) *и* (5), *равенству* (8), *неравенству* (7), *соотношениям* (12) *и* (13) *и симметричным с ними соотношениям относительно замены координат.*

Доказательство. *Необходимость* условия 1 следует из утверждений 3 и 4, замечания 2 и утверждения 2 леммы 1.

Достаточность. Пусть $w > 0$ и элемент $x \in X$ фиксированы. Рассмотрим функцию аргумента $z > 0$: $\varphi^w(z) = R_{zw} x$. Поскольку

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} R_{zw} = (-1)^n n! R_{\bar{z}^{n+1}, w}^{n+1, 1}, \quad \bar{z}^{n+1} = \underbrace{(z, \ldots, z)}_{n+1},$$

то

$$\left\| \frac{d^n}{dz^n} \varphi^w(z) \right\| \leq n! (z^{n+1} w)^{-1}.$$

Применяя критерий для преобразования Лапласа в рефлексивном банаховом пространстве [6], получаем, что $\varphi^w(z)$ — обычное преобразование Лапласа, т. е. существует функция $p_s^w(x)$ такая, что

$$\| p_s^w \| \leq w^{-1}, \quad \varphi^w(z) = \int_0^\infty e^{-zs} p_s^w(x) \, ds.$$

При этом в силу формулы обращения типа Пост – Уиддера

$$p_s^w = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}[(n-1)!]^{-1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\varphi^w(z)\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}[(n-1)!]^{-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} R_{zw}\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^n, \quad \alpha = s^{-1}.$$

Рассмотрим теперь при фиксированном $s>0$ оператор $Q_w = p_s^w$. Его норма $\|Q_w\| = w^{-1}$. Теперь в силу соотношения, симметричного (12) относительно замены координат, существуют двойной предел

$$\lim_{\substack{w\to\infty\\ n\to\infty}} w(-1)^{n-1}[(n-1)!]^{-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}R_{zw}\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^n = I$$

и внутренний предел при $n\to\infty$. Поэтому существует повторный предел $\lim\limits_{w\to\infty} wQ_w = I$.

Вновь, в силу соотношения, симметричного (13) относительно замены координат,

$$Q_w - Q_{w_1} - (w_1-w)Q_wQ_{w_1} = p_s^w - p_s^{w_1} - (w_1-w)p_s^w p_s^{w_1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[(-1)^{n-1}[(n-1)!]^{-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}R_{zw}\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^n -$$

$$-(-1)^{n-1}[(n-1)!]^{-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}R_{zw_1}\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^n -$$

$$-(w_1-w)[(n-1)!]^{-2}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}R_{zw_1}\big|_{z=n\alpha}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}R_{zw}\big|_{z=n\alpha}(n\alpha)^{2n}\Big] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w} - R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w_1} - (w_1-w)R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w_1}R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w}(n\alpha)^n\Big](n\alpha)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(R^{n,2}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,(w,w_1)} - R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w_1}R^{n,1}_{\left(\frac{1}{n\alpha}\right)^n,w}(n\alpha)^n\Big)(n\alpha)^n(w_1-w) = 0.$$

Таким образом, ввиду теоремы Хилле – Иосида Q_w — резольвента однопараметрической сжимающей полугруппы,

$$Q_w = p_s^w = \int_0^\infty e^{-wt}T_t^{(s)}x\,dt,$$

$T_t^{(s)}$ — C_0-полугруппа по t. Следовательно,

$$R_{zw}x = \int_{R_+^2} e^{-zs-wt}T_t^{(s)}x\,ds\,dt.$$

Аналогично,

$$R_{zw}x = \int_{R_+^2} e^{-zs-wt}\tilde{T}_s^{(t)}x\,ds\,dt,$$

$\tilde{T}_s^{(t)}$ — C_0-полугруппа по s. Как и в однопараметрическом случае, операторная ограниченная непрерывная функция из R_+^2 однозначно восстанавливается по своему преобразованию Лапласа, значит, $\tilde{T}_s^{(t)} = T_t^{(s)} = T_{st}$, T_{st} — покоординатная полугруппа, и

$$R_{zw}x = \int\limits_{R_+^2} e^{-zs-wt}T_{st}x\,ds\,dt.$$

Теперь, в силу (5)

$$R^{1,2}_{z,(w,w_1)} = (w_1-w)^{-1}\left(R_{zw}-R_{zw_1}\right) = (w_1-w)^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-zs}(p_s^w - p_s^{w_1})\,ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-zs}p_s^w\, p_s^{w_1}\,ds = \int\limits_0^\infty e^{-zs}\int\limits_0^\infty e^{-wt}T_{st}\int\limits_0^\infty e^{-w_1t_1}T_{st_1}x\,ds\,dt\,dt_1 =$$

$$= \int\limits_{R_+^3} e^{-zs-wt-w_1t_1}T_{st_1+t}x\,ds\,dt\,dt_1.$$

Аналогично, по индукции проверяются равенства (3) для всех $R^{n,m}_{z^n,w^m}$, $z_i^n > 0$, $w_j^m > 0$. Теперь ввиду теоремы о единственности аналитического продолжения равенства (2) и (3) выполняются и для $\operatorname{Re} z_i^n > 0$, $\operatorname{Re} w_j^m > 0$. Теорема доказана.

***Замечание* 8.** Если X — нерефлексивное пространство, то в силу результатов Совы [7] теорема 2 верна при следующем дополнительном условии: для любых $\alpha > 0$, $z > 0$, $w > 0$ множества

$$\left\{(n!)^{-1}(n\alpha)^{n+1}R^{1,n}_{z,(\overline{\alpha n})^n},\ n\ge 1\right\},\quad \left\{(n!)^{-1}(n\alpha)^{n+1}R^{n,1}_{(\overline{\alpha n})^n,w},\ n\ge 1\right\}$$

относительно слабо компактны в X.

1. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 448 с.
2. *Mishura Yu. S.* Semigroup and resovlent operators connected with homogeneous Markov fields // Random Operators and Stochast. Equats. – 1993. – **1**, № 4. – P. 345–359.
3. *Mishura Yu. S.* Two-paramater Levy processes: Ito formula, semigroups and generators // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 952–961.
4. *Мішура Ю. С., Лаврентьев О. С.* Аналітичні властивості резольвент, пов'язаних з багатопараметричними напівгрупами // Вісник Київ. ун-ту. – 1993. – № 3. – С. 68–74.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
6. *Miyadera I.* On the representation theorem by the Laplace transformation of vector-valued functions // Tôhoku Math. J. – 1956. – **8**, № 2. – P. 170–180.
7. *Sova M.* The Laplace transform of exponentially bounded vector-valued functions (real conditions) // Časopis Pěst. Mat. – 1980. – **105**, № 2. – P. 1–13.

Получено 20.09.94