УДК 519.21

Я. І. Єлейко, В. М. Шуренков (Київ. автодор. ін-т)

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПЕРРОНОВОГО КОРЕНЯ МАТРИЧНОЗНАЧНОЇ СТОХАСТИЧНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

We study the asymptotics of the Perron's radical of a matrix-valued stochastic evolution, which is given by a transport equation.

Досліджується асимптотичне зображення перронового кореня матричнозначної стохастичної еволюції, яка задається за допомогою рівняння переносу.

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ розглянемо регенеруючий процес $x(t)$ [1] з моментами регенерації $\tau_1 = \tau, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$. Вважатимемо, що математичне сподівання $M\tau < \infty$.

Нехай $T^{\varepsilon}(t)$ — сім'я матричнозначних стохастичних еволюцій розмірності $m \times m$, яка задається як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dT^{\varepsilon}(t)}{dt} = T^{\varepsilon}(t)A^{\varepsilon}(x(t)) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$T^{\varepsilon}(0) = I, \tag{2}$$

де ε — малий параметр, I — одинична матриця, $A^{\varepsilon}(x)$ — сім'я матричнозначних вимірних функцій.

В [2] знайдено асимптотичне зображення математичного сподівання $MT^{\varepsilon}(\tau)$ стохастичної еволюції (1), (2) при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $t(\lambda_{\varepsilon} - 1) \to z$, де λ_{ε} — перронів корінь матриці $MT^{\varepsilon}(\tau)$, а 1 — перронів корінь матриці $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} MT^{\varepsilon}(\tau)$. Якщо $A^{\varepsilon}(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} A$, де матриця A нерозкладна з недіагональними невід'ємними елементами і перроновим коренем 0, то існує асимптотичне зображення для $1 - \lambda_{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$.

Наша задача полягає в знаходженні асимптотичного зображення перронового кореня $\lambda_{\varepsilon}^{\bullet}$ в околі 1 при $\varepsilon \to 0$, якщо

$$A^{\varepsilon}(x) = A + \delta_1(\varepsilon)B_1(x) + \ldots + \delta_k(\varepsilon)B_k(x). \tag{3}$$

В (3) матриця A нерозкладна з недіагональними невід'ємними елементами, перроновим коренем 0 та правим і лівим невід'ємними власними векторами $\overline{u}$, $\overline{v}$ такими, що $A\overline{u} = \overline{0}$; $\overline{v}A = \overline{0}$; $(\overline{u}, \overline{v}) = 1$; $\overline{0}$ означає нульовий вектор розмірності m.

Матриці $B_1(x), \ldots, B_k(x)$ вимірні по x і обмежені. Послідовність функцій $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots, \delta_k(\varepsilon)$ утворює шкалу нескінченно малих, що має властивість $\delta_{i+1}(\varepsilon) = o(\delta_i(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Введемо необхідні позначення:

$$b_i = M\int\limits_0^{\tau} \overline{v}B_i(x(s))\,\overline{u}\,ds, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$b_i^{\varepsilon} = M\int_0^{\tau} \overline{v}_{\varepsilon} B_i(x(s))\,\overline{u}\,ds, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$K_{\varepsilon} = MT^{\varepsilon}(\tau), \quad K = Me^{A\tau},$$

$$H_j^{\varepsilon}(s) = \int_0^{s} T^{\varepsilon}(z)\, B_j(x(z))\, e^{(s-z)A}\,dz,$$

$$H_j(s) = \int_0^{s} B_j(x(z))\, e^{(s-z)A}\,dz,$$

$$D_j^{\varepsilon} = M\int_0^{\tau} T^{\varepsilon}(z)\, B_{ij}(x(z))\, e^{(\tau-z)A}\, V\,dz,$$

$$D_j = M\int_0^{\tau} B_j(x(z))\, e^{(\tau-z)A}\, V\,dz; \quad d_1 = \overline{v} D_1,$$

$$c_1 = M\int_0^{\tau} d_1 e^{As} B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds + M\int_0^{\tau} \overline{v} H_1(s)\, B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds,$$

$\overline{v}_{\varepsilon}$ — лівий власний вектор матриці K_{ε}, V — узагальнена обернена матриця до матриці $K-I$ [3], тобто $(K-I)V = V(K-I) = \Pi - I$, $\Pi = \overline{u} \otimes \overline{v} = (u_i v_j)_{i,j=1}^m$, u_i, v_j — i-та та j-та координати векторів $\overline{u}$, $\overline{v}$. При цьому $\overline{v}V = \overline{0}$, $V\overline{u} = \overline{0}$.

Теорема 1. *Нехай* $b_j = 0$, $j = 1, \ldots, l-1$; $b_l \neq 0$, $c_1 \neq 0$; *тоді*:

I. $\lambda_{\varepsilon} - 1 \sim \delta_l(\varepsilon) b_l$, *коли* $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_l(\varepsilon))$;

II. $\lambda_{\varepsilon} - 1 \sim \delta_l(\varepsilon)(\alpha c_1 + b_l)$, *коли* $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_l(\varepsilon)$;

III. $\lambda_{\varepsilon} - 1 \sim \delta_1^2(\varepsilon)\, c_1$, *коли* $\delta_l(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$.

Доведення. Згідно з припущеннями матриця K нерозкладна з перроновим коренем 1 та правим і лівим власними векторами $\overline{u}$, $\overline{v}$ такими, що $K\overline{u} = \overline{u}$; $\overline{v}K = \overline{v}$.

Розв'язок диференціального рівняння (1), (2) у випадку, коли $A^{\varepsilon}(x)$ має зображення (3), запишемо у вигляді

$$T^{\varepsilon}(t) = e^{At} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon) \int_0^{t} T^{\varepsilon}(s) B_i(x(s))\, e^{A(t-s)}\,ds. \tag{4}$$

Знайдемо математичне сподівання від розв'язку (4):

$$MT^{\varepsilon}(t) = Me^{At} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, M\int_0^{t} T^{\varepsilon}(s)\, B_i(x(s))\, e^{A(t-s)}\,ds. \tag{5}$$

Математичне сподівання розв'язку в момент регенерації набуває вигляду

$$MT^{\varepsilon}(\tau) = Me^{A\tau} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, M\int_0^{\tau} T^{\varepsilon}(s)\, B_i(x(s))\, e^{A(t-s)}\,ds. \tag{6}$$

Оскільки згідно з умовами теореми $K_\varepsilon \to K$, за теоремою про неперервність ізольованих точок спектру [4] $\lambda_\varepsilon \to 1$, $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v}$, $\overline{u}_\varepsilon \to \overline{u}$ при $\varepsilon \to 0$, де λ_ε — перронів корінь K_ε, $\overline{u}_\varepsilon$, $\overline{v}_\varepsilon$ — правий і лівий власні вектори K_ε, тобто $K_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon$; $\overline{v}_\varepsilon K_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \overline{v}_\varepsilon$. Власні вектори $\overline{u}_\varepsilon$, $\overline{v}_\varepsilon$ виберемо таким чином, що $(\overline{v}_\varepsilon, \overline{u}) = 1$; $(\overline{v}_\varepsilon, \overline{u}) = 1$. Маємо

$$\lambda_\varepsilon(\overline{v}_\varepsilon \overline{u}) = \overline{v}_\varepsilon K_\varepsilon \overline{u} = \overline{v}_\varepsilon (K_\varepsilon - K)\overline{u} + \overline{v}_\varepsilon K \overline{u} =$$

$$= \overline{v}_\varepsilon (K_\varepsilon - K)\overline{u} + (\overline{v}_\varepsilon, \overline{u}).$$

Звідси

$$\lambda_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon (K_\varepsilon - K)\overline{u} + 1$$

або ж

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \overline{v}_\varepsilon (K_\varepsilon - K)\overline{u}. \tag{7}$$

Використовуючи зображення (6), рівність (7) перепишемо таким чином:

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon T^\varepsilon(s) B_i(x(s)) e^{A(\tau-s)} \overline{u}\, ds = \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon) b_i^\varepsilon. \tag{8}$$

Якщо ж $b_1 \neq 0$, то

$$\lambda_\varepsilon - 1 \sim \delta_1(\varepsilon) b_1 + o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{9}$$

Дійсно, в даному випадку

$$\frac{\lambda_\varepsilon - 1}{\delta_1(\varepsilon)} = b_1(\varepsilon) + o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{10}$$

Якщо в (10) $\varepsilon \to 0$, то маємо відразу ж (9). Нехай $b_1 = 0$, тоді можна стверджувати, що $1 - \lambda_\varepsilon = o(\delta_1(\varepsilon))$. Перший доданок у рівності (8) замінимо на

$$\delta_1(\varepsilon) \left[M \int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}) T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds + \right.$$

$$\left. + M \int_0^\tau (T^\varepsilon(s) - T^0(s)) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds \right].$$

В результаті одержимо

$$1 - \lambda_\varepsilon = \delta_1(\varepsilon) M \int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}) T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon (T^\varepsilon(s) - T^0(s)) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_2(\varepsilon) b_2^\varepsilon + \ldots + \delta_k(\varepsilon) b_k^\varepsilon, \tag{11}$$

де $T^0(s) = e^{sA}$. Розглянемо співвідношення

$$\lambda_\varepsilon \overline{v}_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon K_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon K + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon T^\varepsilon(s) B_i(x(s)) e^{(\tau-s)A}\, ds =$$

$$= \overline{v}_\varepsilon K + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon M H_i^\varepsilon(\tau).$$

Звідси

$$(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon (K - I) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon M H_i^\varepsilon(\tau).$$

Оскільки $\overline{v}(K - I) = \overline{0}$, останню рівність можемо записати у вигляді

$$(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V = (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})(\Pi - I) + \sum_{j=1}^{k} \delta_j(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon M H_j^\varepsilon(\tau). \tag{12}$$

Домноживши (12) на V, одержимо

$$(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V =$$

$$= (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})(\Pi - I) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon) M \int_0^\tau T^\varepsilon(s)\, B_i(x(s))\, e^{(\tau - s)A} V\, ds =$$

$$= (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})(\Pi - I) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon D_i^\varepsilon.$$

Отже,

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = -(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V + \sum_{j=1}^{k} \delta_j(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon D_j^\varepsilon \tag{13}$$

або

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = -(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V + \delta_1(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Далі при $\varepsilon \to 0$ маємо $(\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}) / \delta_1(\varepsilon) \to v D_1$. Таким чином,

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = \delta_1(\varepsilon)\, \overline{v} D_1 + o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{14}$$

Підставляючи (14) в (11), одержуємо

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_1(\varepsilon) \Bigg[\delta_1(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} D_1 e^{As} B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} H_1^\varepsilon(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds + o(\delta_1(\varepsilon)) \Bigg] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \delta_1(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} H_j^\varepsilon(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds + \sum_{j=2}^{k} \delta_i(\varepsilon)\, b_j^\varepsilon.$$

Отже, остаточний результат має вигляд

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \Bigg[M \int_0^\tau \overline{v} D_1 e^{As} B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds +$$

$$+ M \int_0^\tau \overline{v} H_1(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \Bigg] + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \left[\delta_1(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon)\, M \int_0^\tau \overline{v}\, H_j(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \; + \; o(\delta_1(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon)) \right] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \left[\delta_j(\varepsilon)\, b_j + o(\delta_j(\varepsilon)) \right]. \tag{15}$$

Нехай l — перший номер j такий, що $b_j \neq 0$. Рівність (15) набуває вигляду

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \left[M \int_0^\tau \overline{v}\, D_1 e^{As} B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds + \right.$$

$$\left. + M \int_0^\tau \overline{v}\, H_1(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \right] + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \left[\delta_1(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon)\, M \int_0^\tau \overline{v}\, H_j(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds + o(\delta_1(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)) \right] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{l} \delta_j(\varepsilon)\, b_j^\varepsilon + o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Для $1 < n < l$ маємо

$$\delta_n(\varepsilon)\, b_n^\varepsilon = \delta_n(\varepsilon)\, M \int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})\, T^\varepsilon(s)\, B_n(x(s))\, \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_n(\varepsilon)\, M \int_0^\tau \overline{v}\, (T^\varepsilon(s) - T^0(s))\, B_n(x(s))\, \overline{u}\, ds =$$

$$= \delta_1(\varepsilon)\, \delta_n(\varepsilon) \left[M \int_0^\tau \overline{v}\, D_1 e^{As} B_n(x(s))\, \overline{u}\, ds + \right.$$

$$\left. + M \int_0^\tau \overline{v}\, H_1(s)\, B_n(x(s))\, \overline{u}\, ds \right] + o(\delta_1(\varepsilon)\, \delta_n(\varepsilon)) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \delta_n(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon)\, M \int_0^\tau \overline{v}\, H_j(s)\, B_n(x(s))\, \overline{u}\, ds + o(\delta_k(\varepsilon)\, \delta_j(\varepsilon)) = o(\delta_1^2(\varepsilon)).$$

Таким чином, при $c_1 \neq 0$

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon)\, c_1 + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + \delta_l(\varepsilon)\, b_l^\varepsilon + \mathrm{o}(\delta_l(\varepsilon)). \tag{16}$$

Нехай:

I. $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_l(\varepsilon))$; тоді (16) набуває вигляду $1 - \lambda_\varepsilon = \delta_l(\varepsilon)\, b_l^\varepsilon + o(\delta_l(\varepsilon))$. Звідси при $\varepsilon \to 0$ $(1 - \lambda_\varepsilon)/\delta_l(\varepsilon) \to b_l$ або ж $\lambda_\varepsilon - 1 \sim \delta_l(\varepsilon)\, b_l$.

II. $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha \delta_l(\varepsilon)$; тоді (16) набуває вигляду

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \alpha\, \delta_l(\varepsilon)\, c_1 + \delta_l(\varepsilon)\, b_l^\varepsilon + \mathrm{o}(\delta_l(\varepsilon)).$$

Звідси

$$\frac{\lambda_\varepsilon - 1}{\delta_l(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \alpha c_1 + b_l.$$

Таким чином, $\lambda_\varepsilon - 1 \sim (\alpha c_1 + b_l)\delta_l(\varepsilon)$.

III. $\delta_l(\varepsilon) = o\left(\delta_1^2(\varepsilon)\right)$. Тоді у даному випадку з (16) випливає $\lambda_\varepsilon - 1 \sim$ $\sim \delta_1^2(\varepsilon)\, c_1$. Теорема доведена.

Нехай в умові теореми $c_1 = 0$. Тоді справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $l \leq k$, $b_l \neq 0$, $c_1 = 0$ *та* $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$. *Тоді* $1 - \lambda_\varepsilon \sim \delta_l(\varepsilon)[R_1 m_1 + R_2 m_2 + b_l]$ *за умови* $\delta_1^3(\varepsilon) \sim$ $\sim m_1 \delta_l(\varepsilon)$; $\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) \sim m_2 \delta_l(\varepsilon)$, *де*

$$R_1 = M\int_0^\tau M\left(\int_0^\tau \overline{v} D_1 T^0(z)\, B_1(x(z))\, e^{(\tau - z)A}\, V\, dz\right) T^0(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \; +$$

$$+ \; M\int_0^\tau M\left(\int_0^\tau \overline{v} H_1(z)\, B_1(x(z))\, e^{(\tau - z)A}\, V\, dz\right) T^0(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \; +$$

$$+ \; M\int_0^\tau \left(\int_0^s \overline{v} H_1(z)\, B_1(x(z))\, e^{(s - z)A}\, dz\right) B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds,$$

$$R_2 = M\int_0^\tau \overline{v} D_2 T^0(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds + M\int_0^\tau \overline{v} H_2(s)\, B_1(x(s))\, \overline{u}\, ds \; +$$

$$+ \; M\int_0^\tau \overline{v} H_1(s)\, B_2(x(s))\, \overline{u}\, ds + M\int_0^\tau \overline{v} D_1 B_2(x(s))\, \overline{u}\, ds.$$

Доведення. Із співвідношень (11) маємо

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_1(\varepsilon) M\int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})\, T^0(s)\, B_1(x(s))\, e^{(\tau - s)A}\, \overline{u}\, ds \; +$$

$$+ \; \delta_1(\varepsilon) M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon\, (T^\varepsilon(s) - T^0(s))\, B_1(x(s))\, e^{(\tau - s)A}\, \overline{u}\, ds \; +$$

$$+ \sum_{j=2}^{l} \delta_j(\varepsilon)\, b_j^\varepsilon + o(\delta_l(\varepsilon)). \tag{17}$$

Згідно з (13) для $\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}$ маємо

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = -(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V + \delta_1(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon + \delta_1(\varepsilon)\, \overline{v}_\varepsilon D_2^\varepsilon + o(\delta_2(\varepsilon)). \tag{18}$$

Розглянемо в (18) перший доданок. Оскільки $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v}$ при $\varepsilon \to 0$, а $\overline{v} V = \overline{0}$, то

$$-(\lambda_\varepsilon - 1)\, \overline{v}_\varepsilon V = o(\lambda_\varepsilon - 1). \tag{19}$$

Послідовно перетворюючи співвідношення (17), одержуємо

$$\lambda_\varepsilon - 1 + o(\lambda_\varepsilon - 1) = \delta_1^2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds + $$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_2^\varepsilon T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds + o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)) +$$

$$+ \delta_1^2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} H_2^\varepsilon(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds + o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)) +$$

$$+ \delta_2(\varepsilon) M \int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}) T^0(s) B_2(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \sum_{j=3}^{l} \delta_j(\varepsilon) b_j^\varepsilon + o(\delta_l(\varepsilon)). \tag{20}$$

Для $2 < j < l$, використовуючи асимптотику $\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}$, маємо

$$\delta_j(\varepsilon) b_j^\varepsilon = \delta_j(\varepsilon) M \int_0^\tau (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}) T^0(s) B_j(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_j(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon \left(T^\varepsilon(s) - T^0(s)\right) B_j(x(s)) \overline{u}\, ds =$$

$$= \delta_1(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon) \left[M \int_0^\tau \overline{v} D_1 e^{sA} B_j(x(s)) \overline{u}\, ds + \right.$$

$$\left. + M \int_0^\tau \overline{v} H_1^\varepsilon(s) B_j(x(s)) \overline{u}\, ds \right] + o(\delta_1(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)) = o(\delta_1^2(\varepsilon)). \tag{21}$$

У співвідношенні (20) зробимо підстановку

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = -(\lambda_\varepsilon - 1) \overline{v}_\varepsilon V + \delta_1(\varepsilon) \overline{v}_\varepsilon D_1 + o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{22}$$

Враховуючи (19) і (21), маємо

$$(\lambda_\varepsilon - 1) + o(\lambda_\varepsilon - 1) = \delta_1^2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_2^\varepsilon T^0(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1^2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} H_1^\varepsilon(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) M \int_0^\tau \overline{v} H_2^\varepsilon(s) B_1(x(s)) \overline{u}\, ds + o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)) +$$

$$+\ \delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon)\,M\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_1^{\varepsilon}\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +$$

$$+\ \delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon)\,M\int_0^{\tau}\overline{v}\,H_1^{\varepsilon}(s)\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon))\ +$$

$$+\ \delta_l(\varepsilon)\,b_l^{\varepsilon}\ +\ o(\delta_l(\varepsilon))$$

або

$$(\lambda_{\varepsilon}-1)\ +\ o(\lambda_{\varepsilon}-1)\ =\ \delta_1^2(\varepsilon)\Bigg[M\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_1^{\varepsilon}\,T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +$$

$$+\ M\int_0^{\tau}\overline{v}\,H_1^{\varepsilon}(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ o(\delta_1^2(\varepsilon))\ +$$

$$+\ \delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon)\Bigg[M\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_2^{\varepsilon}\,T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +$$

$$+\ M\int_0^{\tau}\overline{v}\,H_2^{\varepsilon}(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ M\int_0^{\tau}H_1^{\varepsilon}(s)\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +$$

$$+\ M\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_1^{\varepsilon}\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\Bigg]\ +\ o(\delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon))\ +$$

$$+\ M\int_0^{\tau}\overline{v}\,H_1^{\varepsilon}(s)B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ M\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_1^{\varepsilon}\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds\Bigg]\ +$$

$$+\ o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon))\ +\ \delta_l(\varepsilon)\,b_l^{\varepsilon}\ +\ o(\delta_l(\varepsilon)).$$

У першому доданку зробимо таку підстановку: $\overline{v}_{\varepsilon}\,T^{\varepsilon}(z)$ на $(\overline{v}_{\varepsilon}-\overline{v})\,T^{\varepsilon}(z)\ +$ $+\ \overline{v}_{\varepsilon}(T^{\varepsilon}(z)-T^0(z))$, у другому — $T^{\varepsilon}(z)-T^0(z)$; підставляючи також (22) та враховуючи (20), одержуємо

$$(\lambda_{\varepsilon}-1)\ +\ o(\lambda_{\varepsilon}-1)\ =\ \delta_1^2(\varepsilon)\Bigg\{\delta_1(\varepsilon)\,M\int_0^{\tau}M\Bigg(\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,D_1^{\varepsilon}\,T^0(z)\,B_1(x(z))\,\times$$

$$\times\,e^{(\tau-z)A}\,V\,dz\Bigg)T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ o(\delta_1(\varepsilon))\ +$$

$$+\ \delta_1(\varepsilon)\,M\int_0^{\tau}M\Bigg(\int_0^{\tau}\overline{v}_{\varepsilon}\,H_1^{\varepsilon}(z)\,B_1(x(z))\,e^{(\tau-z)A}\,V\,dz\Bigg)T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +$$

$$+\ \delta_1(\varepsilon)\,M\int_0^{\tau}\overline{v}\Bigg(\int_0^{s}H_1^{\varepsilon}(z)\,B_1(x(z))\,e^{(\tau-z)A}\,dz\Bigg)B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds\ +\ o(\delta_1(\varepsilon))\Bigg\}\ +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon)\Bigg[M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_2^\varepsilon T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau \overline{v}\,H_2^\varepsilon(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; + \; M\int_0^\tau \overline{v}\,H_1^\varepsilon(s)\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds \Bigg] + \delta_l(\varepsilon)\,b_l^\varepsilon \; + \; o(\delta_l(\varepsilon)) \; =$$

$$= \delta_1^3(\varepsilon)\Bigg[M\int_0^\tau \left(M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon T^0(z)\,B_1(x(z))\,e^{(\tau-z)A}\,V\,dz \right) T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau M\left(\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon H_1^\varepsilon(z)\,B_1(x(z))\,e^{(\tau-z)A}\,V\,dz \right) T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau \overline{v}\int_0^s H_1^\varepsilon(z)\,B_1(x(z))\,e^{(s-z)A}\,dz \Bigg) B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; + \; o(\delta_1^3(\varepsilon)) \; +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\,\delta_2(\varepsilon)\,M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_2^\varepsilon T^0(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau \overline{v}\,H_2^\varepsilon(s)\,B_1(x(s))\,\overline{u}\,ds \; + \; M\int_0^\tau \overline{v}\,H_1^\varepsilon(s)\,B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds \; +$$

$$+ M\int_0^\tau \overline{v}_\varepsilon D_1^\varepsilon B_2(x(s))\,\overline{u}\,ds \Bigg] \; +$$

$$+ \; o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)) \; + \; \delta_l(\varepsilon)\,b_l^\varepsilon \; + \; o(\delta_l(\varepsilon)). \qquad (23)$$

З умов теореми і співвідношення (23) випливає доведення теореми.

1. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
2. *Слейко Я. І., Шуренков В. М.* Деякі властивості деяких випадкових еволюцій // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1333–1338.
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
4. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 23.02.94