УДК 519. 21

$\boxed{\text{В. М. Шуренков}}$, д-р физ.-мат. наук (Киев. автодорож. ин-т, Киев),
С. В. Дегтярь, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МАТРИЧНЫЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА О ЛОКАЛЬНОМ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

A matrix infinite-dimensional analog of the Wiener theorem on local invertibility of Fourier transforms is proved.

Доведено матричний нескінченновимірний аналог теореми Вінера про локальне обернення перетворень Фур'є.

1. Н. Винер доказал, что если $g(x)$ — функция из банахова пространства L^1 измеримых функций f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty,$$

и ее преобразование Фурье

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} g(x)\,dx$$

отлично от нуля при $\lambda \in [a, b]$, то найдется такая функция h из L^1, что $\hat{h}(\lambda) = 1 / \hat{g}(\lambda)$ при $\lambda \in [a, b]$.

2. П. П. Куция [1] доказал матричный аналог теоремы Винера в схеме серий.

3. В настоящей статье будем изучать бесконечномерный случай. Рассмотрим банахово пространство L^1_∞, элементами которого являются $\infty \times \infty$ матричнозначные функции $Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^{\infty}$ такие, что

$$\sup_i \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{ij}(x)|\,dx < \infty.$$

Норму матричной функции $Q(x)$ из пространства L^1_∞ будем обозначать

$$|||Q||| = \sup_i \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{ij}(x)|\,dx = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|\,dx \right\|.$$

Совпадающие почти всюду матричные функции считаем, как обычно, одним элементом пространства L^1_∞.

Для $Q \in L^1_\infty$ обозначим

$$\hat{Q}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} Q(x)\,dx.$$

Теорема. *Пусть последовательность элементов $Q_n \in L^1_\infty$ сходится по норме $|||\cdot|||$ к элементу $Q \in L^1_\infty$, для матричнозначной функции $\hat{Q}(\lambda)$ существует обратная $\hat{Q}^{-1}(\lambda)$ (относительно умножения),*

$$\sup_i \sum_j \left| \hat{Q}_{ij}^{-1}(\lambda) \right| < \infty,$$

при $\lambda \in [a, b]$,

$$\sup_i \sum_{j>N} \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{ij}(x)| \, dx \xrightarrow[N \to \infty]{} 0, \tag{1}$$

$$\forall N \quad \sup_i \sum_j^N \int_{|x|>T} |Q_{ij}(x)| \, dx \xrightarrow[T \to \infty]{} 0. \tag{2}$$

Тогда найдется такая последовательность $F, F_1, F_2, \ldots$ *из* L_∞^1, ***что*** $|||F_n - F||| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ *и* $\hat{F}_n(\lambda) = \hat{Q}_n^{-1}(\lambda)$ *при* $\lambda \in [a, b]$, $\hat{F}(\lambda) = \hat{Q}^{-1}(\lambda)$ ***при*** *всех достаточно больших* n.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — скалярная функция из L^1 такая, что $\hat{g}(\lambda) = 1$ при $|\lambda| \le 1$. Положим, например,

$$g(x) = \frac{1}{\pi x} \sin x + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \cos tx \left(1 - \exp\left\{ -\frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right\} \right) dt. \tag{3}$$

Для такой функции $g(x)$

$$\hat{g}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\lambda| \le 1, \\ 1 - \exp\left\{ -\dfrac{1}{(\lambda^2 - 1)^2} \right\}, & \text{если } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Зафиксируем $\lambda_0 \in (a, b)$ и для $r > 0$ положим $g_r(x) = (1/r) e^{-i\lambda_0 x} g(x/r)$. Тогда, очевидно, $\hat{g}_r(\lambda) = 1$ при $|\lambda - \lambda_0| \le 1/r$. Введем в рассмотрение семейство матричных функций $P_{n,r}(x) = g_r(x) \, \hat{Q}_n(\lambda_0) - g_r * Q_n(x)$. Очевидно, $P_{n,r} \in L_\infty^1$ для всех $n, r > 0$. Покажем, что $|||P_{n,r}||| \xrightarrow[n, r \to \infty]{} 0$. Имеем

$$P_{n,r}(x) = g_r(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_0 y} Q_n(y) \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} g_r(x - y) Q_n(y) \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g_r(x) e^{i\lambda_0 y} - g_r(x - y)] \, Q_n(y) \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\lambda_0 (x-y)} \frac{1}{r} g\left(\frac{x}{r} \right) - e^{i\lambda_0 (x-y)} \frac{1}{r} g\left(\frac{x - y}{r} \right) \right] Q_n(y) \, dy. \tag{4}$$

Отсюда

$$|P_{n,r}(x)| \le \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(\frac{x}{y} \right) - g\left(\frac{x - y}{r} \right) \right| |Q_n(y)| \, dy. \tag{5}$$

Далее,

$$|||P_{n,r}||| \le \left\| \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left| g\left(\frac{x}{y} \right) - g\left(\frac{x - y}{r} \right) \right| \left| Q_n(y) \right| \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g\left(\frac{x}{r}\right) - g\left(\frac{x-y}{r}\right) \right| |Q_n(y)| \right\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_n(y)| \right\|.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| dx =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = 2 \| g(x) \|_{L_1}.$$

Известно [1], что если $g \in L^1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g(x) - g(x + \delta) | dx \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

В частности, для всех y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0. \tag{6}$$

Отсюда

$$||| P_{n,r} ||| \le \left\| \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_n(y) - Q(y)| \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q(y)| \right\| \le$$

$$\le 2 \| g \| \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |Q_n(y) - Q(y)| dy \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q(y)| \right\|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$ по условию. Покажем, что второе слагаемое также стремится к нулю при $r \to \infty$:

$$\sup_i \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_{ij}(y)| =$$

$$= \sup_i \left[\sum_{j=1}^{N} \int_{|y| \le T} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_{ij}(y)| + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{|y| > T} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_{ij}(y)| +$$

$$\left. + \sum_{j > N} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| |Q_{ij}(y)| \right] \le$$

$$\leq \sup_{y \in [-T, T]} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - g\left(x - \frac{y}{r}\right) \right| dx \cdot 2T \, ||| \, Q(y) \, ||| \, +$$

$$+ \| g \|_{L_1} \sup_i \sum_j^N \cdot \int_{|y|>T} | Q_{ij}(y) | \, dy + \| g \|_{L_1} \sup_i \sum_{j>N}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | Q_{ij}(y) | \, dy.$$

Первое слагаемое для любого T стремится к нулю при $r \to \infty$ в силу условия (6), второе и третье слагаемые можно сделать сколь угодно малыми выбором достаточно больших T и N соответственно в силу (1), (2). Этим доказано, что $||| P_{n,r} ||| \xrightarrow[n, r \to \infty]{} 0$.

Заметим, что $\hat{Q}_n(\lambda_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} \hat{Q}(\lambda_0)$ и матрица $\hat{Q}(\lambda_0)$ обратима. Следовательно, существуют $n_0 = n_0(\lambda_0)$ и $r_0 = r_0(\lambda_0)$ такие, что для всех $n \geq n_0$, $r \geq r_0$

$$||| P_{n,r} ||| \leq \frac{1}{2 \| \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) \|}.$$

Обозначим $R_n(x) = \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) P_{n, r_0}(x)$ и заметим, что

$$||| R_n ||| \leq \| \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) \| \, ||| P_{n, r_0} ||| < \frac{1}{2} \tag{7}$$

для всех $n \geq n_0$. Положим

$$F_n(x) = g_{r_0}(x) \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) + \sum_{m=1}^{\infty} R_n^{m*}(x) \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0). \tag{8}$$

В силу (7) этот ряд сходится в норме пространства L_∞^1 равномерно по $n \geq n_0$.

Подсчитаем преобразование Фурье функции $F(x)$.

Так как

$$\hat{P}_{n,r}(\lambda) = \hat{g}_r(\lambda) \hat{Q}_n(\lambda_0) - \hat{g}_r(\lambda) \hat{Q}_n(\lambda), \quad \hat{Q}_n(\lambda) = \hat{Q}_n(\lambda_0) - \hat{P}_{n,r}(\lambda)$$

при $| \lambda - \lambda_0 | \leq 1/r$, то

$$\hat{Q}_n^{-1}\text{[illegible]} - \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) \hat{P}_{n,r}(\lambda) \big\}^{-1} \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) =$$

$$= \sum_{m=0} \big\{ \hat{Q}_n\text{[illegible]} \big\}^m \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) =$$

$$= \hat{g}_{r_0}(\lambda) \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) \hat{P}_{n,r}(\lambda) \right\}^m \hat{Q}^{-1}(\lambda_0) =$$

$$= \hat{g}_{r_0}(\lambda) \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{R}_n^m(x) \hat{Q}_n^{-1}(\lambda_0) = \hat{F}_n(\lambda)$$

при $| \lambda - \lambda_0 | \leq 1/r_0$, $r \geq r_0$.

Таким образом, мы доказали, что каждая точка $\lambda_0 \in [a, b]$ имеет такую окрестность $U_{\lambda_0} = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, что

$$\hat{Q}_n^{-1}(\lambda) = \hat{F}_n(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in U_{\lambda_0}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$P_{n,r_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{r_0}(x) = g_{r_0}(x)\hat{Q}(\lambda_0) - g_{r_0} * Q(x),$$

и следовательно, $R_n(x) \to R(x)$ по норме пространства L^1_∞.

Отсюда в силу равномерной по $n \ge n_0$ сходимости ряда (8)

$$F_n(x) \to F(x) = g_{r_0}(x)\hat{Q}^{-1}(\lambda_0) + \sum_{m=1}^{\infty} R^{m*}(x)\hat{Q}^{-1}(\lambda_0)$$

по норме пространства L^1_∞.

Следовательно, равенство (9) сохраняет силу после предельного перехода по $n \to \infty$, т. е.

$$\hat{Q}^{-1}(\lambda) = \hat{F}(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in U_{\lambda_0}. \tag{10}$$

Переход от окрестности U_{λ_0} в формулах (9), (10) к отрезку $[a, b]$ получается с помощью разбиения единицы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

1. *Куция П. П.* Многомерные теоремы типа восстановления и их применение к регенерирующим случайным процессам: Автореф. … дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 103 с.
2. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.

Получено 03.12.92