УДК 517.928

Г. В. Завізіон (Кіровоград. пед. ін-т ім. Винниченка)

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

An asymptotic solution of a system of integro-differential equations is constructed for the case where turning points are present.

Будується асимптотичний розв'язок системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь при наявності точок повороту.

В [1, 2] розглядається побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній і при наявності точок повороту. У даній роботі пропонується метод побудови асимптотичного розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь з точками повороту.

Одна точка повороту. Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \rho \int_0^L K(t; s; \varepsilon)x(s; \varepsilon)\,ds, \tag{1}$$

де $h \in Z$ і $h > 1$; ε $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ — малий параметр; $A(t, \varepsilon)$, $K(t; s, \varepsilon)$ — $n \times n$-вимірні матриці, які припускають для всіх $t \in [0; L]$, $s \in [0; L]$ розклади

$$A(t; \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t), \qquad K(t; s, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r K_r(t; s),$$

$$A_r(t) \in C^{\infty}_{[0; L]}, \qquad K_r(t; s) \in C^{\infty}_{[0; L]\times[0; L]},$$

ρ — довільний параметр. Розв'яжемо задачу Коші системи (1) з початковою умовою

$$x(0; \varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

де ρ — довільний вектор.

Припустимо, що характеристичне рівняння

$$\det\| A_0(t) - \lambda(t)E \| = 0 \tag{3}$$

системи (1) має n коренів $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, які різні при $t \in [0; L]$ і співпадають у нулі $\lambda_i(0) = p_0$ (E — одинична матриця), тобто $t = 0$ є точкою повороту системи (1). Припустимо також виконання умов:

1) матриця $A_0(t)$ неособлива для всіх $t \in [0; L]$;

2) знаменник Фредгольма ядра $A_0^{-1}(t)K_0(t; s)$ не дорівнює нулю;

3) рівняння (3) при $t = 0$ має один кратний корінь p_0 з одним елементарним дільником;

4) елемент матриці

$$\left\{ T^{-1}\left(\frac{dA_0(t)}{dt}\right)_{t=0} \frac{t}{\varepsilon} + A_1(0)T \right\}_{n1} \ne 0$$

для всіх $t \in [0; L\varepsilon]$, де T — матриця перетворення матриці $A_0(0)$;

5) матриці $A_r(t)$ $(r = 0, 1, \dots)$ розкладаються на відрізку $[0; L\varepsilon]$ в ряди Тейлора

$$A_r(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^s A_r(0)}{dt^s} t^s, \qquad r = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Для того щоб побудувати розклад розв'язку на відрізку, введемо нову змінну $t_1 = t/s$. Перейдемо до цієї змінної в системі (1). Згрупувавши в правій частині коефіцієнти при однакових степенях ε, з урахуванням розкладу (4) одержимо

$$\varepsilon^{h-1} \frac{dx}{dt_1} = B(t_1, \varepsilon)x + \rho \int_0^L K(t_1\varepsilon; s; \varepsilon) x(s; \varepsilon)\, ds, \tag{5}$$

де

$$B(t_1, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(t_1)\varepsilon^r, \quad B_r(t_1) = \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{s!} \frac{d^s A_{r-s}(0)}{dt^s} t_1^s, \quad r = 0, 1, \ldots .$$

Оскільки $B_0(t_1) = A_0(0)$, то характеристичне рівняння системи (5) має вигляд (4), для якого виконується умова 3. Тоді, використовуючи методику з [3], для системи (5) будуємо n лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t; \varepsilon) = u_i(t_1, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_0^{t_1} \lambda_i(t_1; \mu)\, dt_1 \right) +$$

$$+ \rho \int_0^L p_i(t_1; s; \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_0^{t_1} \lambda_i(s_1; \mu)\, ds_1 \right) ds, \tag{6}$$

де n-вимірні вектори $u_i(t_1; \mu)$, $p_i(t_1; s; \mu)$ і функція $\lambda_i(t_1; \mu)$ допускають розклад за степенями $\mu = \sqrt[n]{\varepsilon}$:

$$u_i(t_1; \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_{ir}(t_1), \quad \lambda_i(t_1; \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \lambda_{ir}(t_1),$$

$$p_i(t_1; s; \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r p_{ir}(t_1; s; \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Коефіцієнти цих розкладів визначаються за допомогою рівнянь

$$u_{i0}(t_1)\lambda_0(t_1) - A_0(0)u_{i0}(t_1) = 0, \tag{8}$$

$$u_{il}(t_1)\lambda_0(t_1) - A_0(0)u_{il}(t_1) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{l-1} u_{ir}(t_1)\lambda_{i;\, l-r}(t_1) + f_{il}(t_1; \varepsilon),$$

$$A_0(0)p_{i0}(t_1; s_1; \varepsilon) + K_0(t_1\varepsilon; s_1)u_{i0}(s_1) = 0, \tag{9}$$

$$A_0(0)p_{il}(t_1; s_1; \varepsilon) = H_{il}(t_1; s; \varepsilon),$$

де

$$H_{il}(t_1; s_1; \varepsilon) = \sum_{r=1}^{l} K_r(t_1\varepsilon; s_1) u_{i;\, l-r}(t_1) -$$

$$- \sum_{r=1}^{l-1} B_i(t_1)\, p_{i;\, l-r}(t_1; s_1; \varepsilon) - \rho \sum_{r=0}^{l-n} \int_0^{t_1} K_i(t_1\varepsilon; s_1)\, p_{i;\, l-r}(t_1; s_1; \varepsilon)\, ds_1,$$

$$f_{il}(t_1) = -\sum_{r=1}^{[l/n]} A_r(t_1) u_{i;\,l-rn}(t_1) - \frac{\partial u_{i;\,l-nh+n}(t_1)}{\partial t_1}.$$

Системи (8), (9) можна розв'язати методом з [4]. Нехай m-те наближення розв'язку системи (1) має вигляд

$$x_{im}(t;\varepsilon) = u_{im}\left(\frac{t}{\varepsilon};\mu\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}}\int_0^{t/\varepsilon}\lambda_{im}(t_1;\mu)\,dt_1\right) +$$

$$+\ \rho\int_0^L p_{im}\left(\frac{t}{\varepsilon};s;\mu\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}}\int_0^{t/\varepsilon}\lambda_{im}(s_1;\mu)\,ds_1\right)ds, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

де

$$u_{im}(t_1;\mu) = \sum_{r=0}^{m}\mu^r u_{ir}(t_1), \qquad p_{im}(t_1;s;\mu) = \sum_{r=0}^{m}\mu^r p_{ir}(t_1;s;\varepsilon),$$

$$\lambda_{ir}(t_1;\mu) = \sum_{r=0}^{m}\mu^r\lambda_{ir}(t_1).$$

На відрізку $[L\varepsilon; L]$ корені $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, характеристичного рівняння (3) за припущенням є простими. Тоді на цьому відрізку n лінійно незалежних формальних розв'язків системи (1) побудуємо у вигляді

$$y_i(t;\varepsilon) = v_i(t;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_{L\varepsilon}^{t}\xi_i(t;\varepsilon)\,dt\right) +$$

$$+\ \rho\int_0^L q_i(t;s;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_{L\varepsilon}^{t}\xi_i(t;\varepsilon)\,dt\right)ds, \tag{11}$$

де $v_i(t;\varepsilon)$, $q_i(t;s;\varepsilon)$ — n-вимірні вектори і $\xi_i(t;\varepsilon)$ — скалярна функція, які припускають розклад

$$v_i(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r v_{ir}(t), \qquad q_i(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r q_{ir}(t;s),$$

$$\xi_i(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\xi_{ir}(t). \tag{12}$$

Функції $v_{ir}(t)$, $q_{ir}(t)$, $\xi_{ir}(t)$ визначаються методом з [3]. Побудуємо m-ті наближення, які відповідають формальному розв'язку (11)

$$y_{im}(t;\varepsilon) = v_{im}(t;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_{L\varepsilon}^{t}\xi_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right) +$$

$$+\ \rho\int_{L\varepsilon}^{L} q_{im}(t;s;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_{L\varepsilon}^{t}\xi_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right)ds$$

і одержуються за допомогою обриву розкладу (12) на m-му місці; m-те наближення загального розв'язку при $t\in[0;L\varepsilon]$ має вигляд

$$\overline{x}_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} x_{im}(t;\varepsilon)\, a_i(\varepsilon),$$

а на відрізку $[L\varepsilon; L]$

$$\overline{y}_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} y_{im}(t;\varepsilon)\, b_i(\varepsilon),$$

де $a_i(\varepsilon)$, $b_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, — довільні числа.

Виберемо числа $a_i(\varepsilon)$ з початкової умови (2), яка рівносильна співвідношенню

$$\overline{x}_m(0;\varepsilon) = x_0. \tag{13}$$

Побудовані m-ті наближення $\overline{x}_m(t;\varepsilon)$ і $\overline{y}_m(t;\varepsilon)$ на відрізках $[0; L\varepsilon]$ і $[L\varepsilon; L]$ склеїмо у точці $t = L\varepsilon$. Цього можна досягнути за допомогою рівності

$$\overline{x}_m(L\varepsilon;\varepsilon) = \overline{y}_m(L\varepsilon;\varepsilon). \tag{14}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $1-5$ *і співвідношення* (14), *то задача Коші для системи інтегро-диференціальних рівнянь* (1) *і* (2) *має* m-*те наближення розв'язку у вигляді*

$$x_m(t;\varepsilon) = \begin{cases} \overline{x}_m(t;\varepsilon) & \text{при } 0 \le t \le L\varepsilon, \\ \overline{y}_m(t;\varepsilon) & \text{при } L\varepsilon < t \le L. \end{cases}$$

Якщо знаменник Фредгольма ядра $A_0^{-1}(t)\, K_0(t;s)$ дорівнює нулю, то функції $q_i(t;s;\varepsilon)$ в розкладі (12) подамо у вигляді

$$q_i(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=-1}^{\infty} \varepsilon^r q_{ir}(t;s),$$

де $q_{ir}(t;s)$ знаходяться за методом з [4].

Нехай $t = L$ є точкою повороту системи (1), тобто корені характеристичного рівняння (3) збігаються при $t = L$: $\lambda_i(L) = p_0$, $i = \overline{1, n}$, і різні при $t \in [0; L)$. Припустимо виконання умов $1-4$ у точці $t = L\varepsilon$, а також те, що матриці $A_r(t)$, $r = 0, 1, \ldots$, розкладаються в ряди Тейлора в околі $t = L$:

$$A_r(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s A_r(t)}{dt^s} \right|_{t=L} (t-L)^s.$$

Знайдемо асимптотичний розв'язок задачі Коші системи (1) з початковою умовою

$$x(L;\varepsilon) = x_0. \tag{15}$$

Для того щоб побудувати розклад розв'язку при $t \in [L - L\varepsilon; L]$, введемо нову змінну $t_1 = (t-L)/\varepsilon$, якщо $t_1 \in [-L; 0]$. Тоді система (1) зводиться до (5), де

$$B_r(t_1) = \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s A_{r-s}}{dt^s} \right|_{t=L} t_1^s.$$

Оскільки $B_0(t_1) = A_0(L)$, то характеристичне рівняння при $t = L$ має кратний корінь з одним кратним елементарним дільником. Тоді, використовуючи методику з [3] для системи (5), будуємо загальний розв'язок при $t \in [L - L\varepsilon; L]$ у вигляді

$$x_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}\left(u_{im}\left(\frac{t-L}{\varepsilon};\mu\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}}\int_0^{(t-L)/\varepsilon}\lambda_{im}(t_1;\mu)\,dt_1\right)+\right.$$

$$\left.+\rho\int_0^L p_{im}\left(\frac{t-L}{\varepsilon};s;\mu\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}}\int_0^{(t-L)/\varepsilon}\lambda_{im}(s_1;\mu)\,ds_1\right)ds\right)a_i(\varepsilon).$$

Функції $u_{im}(t_1;\mu)$, $\lambda_{im}(t_1;\mu)$, $p_{im}(t_1;s;\mu)$ зображаються і визначаються так само, як (1) у випадку нульової точки повороту.

На відрізку $[0; L - L\varepsilon]$ корені $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, характеристичного рівняння прості, тому згідно з [3] розв'язок знайдемо у вигляді

$$y_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_{im}(t;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h}}\int_{L-L\varepsilon}^{t}\xi_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right)+\right.$$

$$\left.+\rho\int_0^L q_{im}(t;s;\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h}}\int_{L-L\varepsilon}^{t}\xi_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right)ds\right)b_i(\varepsilon).$$

Числа $a_i(\varepsilon)$ виберемо з початкової умови (15), яка рівносильна співвідношенню

$$x_m(0;\varepsilon) = x_0. \tag{16}$$

Побудовані m-ті наближення $x_m(t;\varepsilon)$ і $y_m(t;\varepsilon)$ на відрізках $[L - L\varepsilon; L]$ і $[0; L - L\varepsilon]$ поєднаємо у точці $L - L\varepsilon$. Цього можна досягнути за допомогою рівності

$$x_m(L - L\varepsilon;\varepsilon) = y_m(L - L\varepsilon;\varepsilon). \tag{17}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай $t = L$ є точкою повороту системи* (1) *і виконуються умови $1-5$ в точці $t = L$. Тоді при виконанні співвідношення* (17) *задача Коші для системи* (1) *з початковою умовою* (16) *має m-те наближення загального розв'язку у вигляді*

$$\overline{x}_m(t;\varepsilon) = \begin{cases} y_m(t;\varepsilon) & \text{при } 0 \le t \le L - L\varepsilon, \\ x_m(t;\varepsilon) & \text{при } L - L\varepsilon < t \le L. \end{cases}$$

Дві точки повороту. Припустимо, що характеристичне рівняння (3) має n коренів $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, які різні при $t \in (0; L)$ і збігаються при $t = 0$ і $t = L$: $\lambda_i(0) = p_1$, $\lambda_i(L) = p_2$. Припустимо також, що виконуються умови: 1) елементи

$$\left\{T_1^{-1}\left(\frac{dA_0(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=0}\frac{t}{\varepsilon} + A_1(0)T_1\right\}_{n1}$$

для всіх $t \in [0; L\varepsilon)$ і

$$\left\{T_2^{-1}\left(\frac{dA_0(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=L}\frac{(t-L)}{\varepsilon} + A_1(L)T_2\right\}_{n1}$$

не дорівнюють нулю; T_1 і T_2 — матриці перетворення матриці $A_0(t)$ відповідно при $t=0$ і $t=L$; 2) матриці $A_r(t)$, $r=0, 1, \ldots$, розкладаються відповідно на відрізках $t \in [0; L\varepsilon]$ і $t \in [L-L\varepsilon; L]$ в ряди

$$A_r(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^s A_r(t)}{dt^s}\bigg|_{t=0} t^s, \quad A_r(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^s A_r(t)}{dt^s}\bigg|_{t=L} (t-L)^s, \quad r=0, 1, \ldots .$$

Знайдемо асимптотичний розв'язок задачі Коші системи (1) з початковою умовою (2), коли $t_1=0$, $t_2=L$ є точками повороту. Для того щоб побудувати розклад розв'язку при $t \in [0; L\varepsilon]$, тобто в околі точки повороту $t=0$, введемо нову змінну $t_1 = t/\varepsilon$, де $t_1 \in [0; L]$. Тоді система (1) зводиться до системи (5). При $t \in [0; L\varepsilon]$ корені характеристичного рівняння системи (5) кратні з одним кратним елементарним дільником, тому, застосовуючи [3], m-те наближення загального розв'язку знайдемо у вигляді

$$x_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{im}\left(\frac{t}{\varepsilon};\mu\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_0^{t/\varepsilon} \lambda_{im}(t_1;\mu)\, dt_1 \right) + \right.$$
$$\left. + \rho \int_0^L p_{im}\left(\frac{t}{\varepsilon}; s; \mu\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_0^{t/\varepsilon} \lambda_{im}(t_1;\mu)\, dt_1 \right)\right) a_i(\varepsilon).$$

На відрізку $[L-L\varepsilon; L]$ корені характеристичного рівняння кратні, а тому введемо нову змінну $t_2 = (t-L)/\varepsilon$, де $t_2 \in [-L; 0]$. Згідно з [3] m-те наближення загального розв'язку в околі точки повороту $t=L$ знайдемо у вигляді

$$y_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{im}^{(1)}\left(\frac{t-L}{\varepsilon};\mu\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_L^{t_2} \lambda_{im}^{(1)}(t_2;\mu)\, dt_2 \right) + \right.$$
$$\left. + \rho \int_0^L p_{im}^{(1)}(t_2; s; \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h-1}} \int_{-L}^{t_2} \lambda_{im}(t_2;\mu)\, dt_2 \right) ds \right) b_i(\varepsilon).$$

На відрізку $[L\varepsilon; L-L\varepsilon]$ корені характеристичного рівняння прості, тому згідно з [3] розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_m(t;\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \left(v_{im}(t;\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h}} \int_{L\varepsilon}^{t} \xi_{im}(t;\varepsilon)\, dt \right) + \right.$$
$$\left. + \rho \int_0^L q_{im}(t; s; \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^{h}} \int_{L\varepsilon}^{t} \xi_{im}(t;\varepsilon)\, dt \right) ds \right) c_i(\varepsilon),$$

де $c_i(\varepsilon)$ — довільні величини.

Виберемо числа $a_i(\varepsilon)$ з початкової умови (2), яка рівносильна співвідношенню

$$x_m(0;\varepsilon) = x_0. \tag{18}$$

Побудовані m-ті наближення $x_m(t;\varepsilon)$ і $z_m(t;\varepsilon)$ відповідно на відрізках $[0; L\varepsilon]$ і $[L\varepsilon; L-L\varepsilon]$ поєднаємо у точці $t = L\varepsilon$. Цього можна досягти вибором чисел $c_i(\varepsilon)$ з умови

$$x_m(L\varepsilon;\varepsilon) = z_m(L\varepsilon;\varepsilon); \tag{19}$$

m-ті наближення $z_m(t;\varepsilon)$ і $y_m(t;\varepsilon)$, побудовані відповідно на відрізках $[L\varepsilon; L-L\varepsilon]$ і $[L-L\varepsilon; L]$, поєднаємо у точці $t = L - L\varepsilon$. Це можна зробити за рахунок вибору чисел $b_i(\varepsilon)$ з умови

$$z_m(L-L\varepsilon;\varepsilon) = y_m(L-L\varepsilon;\varepsilon). \tag{20}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай* $t_1 = 0$, $t_2 = L$ — *точки повороту системи* (1) *і виконуються умови* 1 – 3. *Тоді при виконанні співвідношень* (19), (20) *задача Коші системи* (1) *з початковою умовою* (2) *має* m*-те наближення* $\overline{x}_m(t;\varepsilon)$ *розв'язку у вигляді*

$$\overline{x}_m(t;\varepsilon) = \begin{cases} x_m(t;\varepsilon) & \text{при } 0 \le t \le L\varepsilon, \\ y_m(t;\varepsilon) & \text{при } L\varepsilon < t \le L - L\varepsilon, \\ z_m(t;\varepsilon) & \text{при } L - L\varepsilon < t \le L. \end{cases}$$

За допомогою методу з [5] доведено асимптотичний характер формальних розв'язків у розумінні Крилова – Боголюбова – Митропольського.

1. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1989. – 287 с.
2. *Шкиль Н. И., Завизион Г. В.* Асимптотическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной при наличии точки поворота // Докл АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 31–35.
3. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.
4. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – К.: Вища шк., 1985. – 248 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 412 с.

Одержано 13.03.96