УДК 517.98

В. Н. Бобочко (Кировоград. пед. ин-т)

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА*

The uniform asymptotics of solution to a system of singularly perturbed differential equations with strong turning point is constructed. The case is studied where the boundary operator is analytic with respect to a small parameter.

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з сильною точкою звороту. Досліджується випадок, коли граничний оператор є аналітичним відносно малого параметра.

Введение. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - A_\varepsilon W(x,\varepsilon) = h(x),$$

$$E_1 W(m,\varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \hat{W}_m], \tag{1}$$

$$E_2 \frac{dW(x,\varepsilon)}{dx} = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}\hat{W}_m],$$

$$\varepsilon \to +0, \quad x \in I = [0; l], \quad m = 0, l, \quad \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Здесь A_ε — линейный оператор, заданный в пространстве R^n и имеющий вид

$$A_\varepsilon = A_0 + \sum_{s=1}^{p} \varepsilon^s A_s, \tag{2}$$

$W(x,\varepsilon)$ — неизвестная вектор-функция, $h(x)$ — заданная вектор-функция, α_m и $\hat{W}_m$ — известные векторы, E_k, $k = 1, 2$, — диагональные матрицы n-го порядка следующего вида:

$$E_1 = \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}, \qquad E_2 = \operatorname{diag}\{0, 1, \ldots, 1\}.$$

Задачу (1) будем решать при выполнении таких условий.

Условие 1°. $A_k(x)$, $h(x) \in C^\infty[I]$, $k = \overline{0, p}$, где $A_k(x)$ — матрицы операторов A_k в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Условие 2°. Спектр оператора A_0 простой и удовлетворяет условиям

$$\lambda_1(x) \equiv x\tilde{\lambda}_1(x) \le 0 < \lambda_2(x) < \ldots < \lambda_n(x), \qquad \tilde{\lambda}_1(x) < 0, \qquad x \in I. \tag{3}$$

В случае, когда $A_s = 0$, $s = \overline{1, p}$, задача (1) изучена в работе [1]. Если же $A_1 \equiv 0$, а $A_2 \not\equiv 0$, то такая задача изучена в работах [2, 3]. Если же $A_1 \not\equiv 0$, то проведенные исследования показали, что слагаемое εA_1 уже не является второстепенным по сравнению с оператором

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} - A_0.$$

Для скалярного случая это явление впервые было исследовано в работах [4, 5].

---

*Выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук.

© В. Н. БОБОЧКО, 1997

Регуляризация сингулярно возмущенной задачи. Наряду со спектром оператора A_0 введем в рассмотрение спектр оператора $A_0 + \varepsilon A_1$. Пусть $\lambda_i(x, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, — элементы спектра этого оператора, а $b_i(x, \varepsilon)$ и $b_i(x)$ — системы собственных векторов, соответствующие собственным значениям $\lambda_i(x, \varepsilon)$ и $\lambda_i(x) \equiv \lambda_i(x, 0)$.

Спектр оператора A_0 простой. Тогда для любого фиксированного $x \in I$, согласно известной теореме [7, с. 223], при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ выполняются асимптотические равенства

$$\lambda_i(x, \varepsilon) = \lambda_i(x) + \varepsilon\gamma_i(x, \varepsilon), \qquad b_i(x, \varepsilon) = b_i(x) + \varepsilon\beta_i(x, \varepsilon), \tag{4}$$

где функции $\gamma_i(x, \varepsilon)$ и $\beta_i(x, \varepsilon)$ аналитически зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ и достаточно гладкие при $x \in I$.

Для того чтобы выделить все существенно особые многообразия (с. о. м.) относительно особой точки $\varepsilon = 0$, находящейся в решении сингулярно возмущенной задачи (с. в. з.) (1), введем в рассмотрение новую вектор-переменную $t = \{t_{ik}\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2$, компоненты которой определим по формулам

$$t_{jk} = \varepsilon^{-1}(-1)^k \int\limits_{(k-1)l}^{x} \sqrt{\lambda_j(x)}\, dx \equiv \varepsilon^{-1}\varphi_{jk}(x) \equiv \Phi_{jk}(x, \varepsilon), \tag{5}$$

$$t_{11} = t_{12} = t_1 = \varepsilon^{-2/3}\varphi_1(x) \equiv \Phi_1(x, \varepsilon). \tag{6}$$

Заметим, что при исследовании задач с обыкновенной точкой поворота соответствующая регуляризующая функция зависела только от $x \in I$. На структуру регуляризующих компонент t_{jk}, которые соответствуют стабильным элементам спектра оператора A_0, не влияет характер (простая или сильная) точки поворота (см. [1–3]).

Таким образом, для построения равномерной асимптотики решения с. в. з. (1), т. е. задачи с сильной точкой поворота, необходимо одновременно использовать элементы спектров двух операторов A_0 и $A_0 + \varepsilon A_1$, чего не было при исследовании с. в. з.

Согласно известной методике (см. работы [1–6]) получим следующую расширенную задачу:

$$\begin{gathered} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{W}(x, t, \varepsilon) = h(x), \qquad M_m = (m, t(m)), \\ E_1 \tilde{W}(M_m, \varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \hat{W}_m], \\ E_2 \frac{dW(M_m, \varepsilon)}{dx} = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}\hat{W}_m]. \end{gathered} \tag{7}$$

Поскольку впоследствии нами будет записан явный вид расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ в его действии на элементы с пространства безрезонансных решений (п. б. р.), то нет необходимости выписывать явный вид этого оператора на данном этапе.

Регуляризация сингулярно возмущенной задачи. Рассмотрим множества (подпространства) функций

$$\begin{gathered} Y_{ri1k} = \left\{ b_i(x, \varepsilon)[v_{rik}(x, \varepsilon)U_k(t_1) + Q_{rik}(x, \varepsilon)u_k'(t_1)] \right\}, \\ Y_{rijk} = \left\{ b_i(x)\lambda_{rijk}(x) \exp t_{jk} \right\}, \qquad X_{ri} = \{ b_i(x, \varepsilon)\omega_{ri}(x, \varepsilon) \}, \\ V_{ri} = \left\{ b_i(x, \varepsilon)[f_{ri}(x, \varepsilon)\Psi(t_1) + g_{ri}(x, \varepsilon)\Psi'(t_1)] \right\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь

$$v_{rik}(x,\varepsilon),\quad Q_{rik}(x,\varepsilon),\quad \alpha_{rijk}(x),\quad f_{ri}(x,\varepsilon),\quad g_{ri}(x,\varepsilon),\quad \omega_{ri}(x,\varepsilon)\ \in C^{\infty}[I],$$

$u_k(t_1)$, $k=1,2,$ — два линейно независимых решения уравнения Эйри, свойства которых описаны в работе [8]. Свойства с. о. м. $\Psi(t_1)$ описаны в работах [1 – 6].

Из подпространства (8) составим новое пространство вида

$$Y_r = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri} = \bigoplus_{i=1}^{n}\left[\bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{j=1}^{n} Y_{rijk}\oplus V_{ri}\oplus X_{ri}\right]. \tag{9}$$

Элемент пространства (9) имеет вид

$$\begin{aligned}W_r(x,t,\varepsilon) = {} & \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\varepsilon)\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[v_{rik}(x,\varepsilon)U_k(t_1)+Q_{rik}(x,\varepsilon)u_k'(t_1)\right]\right\} + \\ & + f_{ri}(x,\varepsilon)\Psi(t_1)+g_{ri}(x,\varepsilon)\Psi'(t_1)+\omega_{ri}(x,\varepsilon)+ \\ & + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}.\end{aligned} \tag{10}$$

Согласно разработанному методу (см. [1 – 5]), необходимо изучить действие расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на элементы с п. б. р. (9). Запишем результат действия оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на элементы пространства (9):

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{W}_r(x,t,\varepsilon) = \left[R_0+\mu^2R_2+\mu^3R_3+\mu^4R_4+\sum_{s=2}^{p}\mu^{3s}R_{35}\right]W_r(x,t,\varepsilon). \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}R_0W_r(x,t,\varepsilon) = {} & \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{n}[\lambda_j(x)-\lambda_i(x)]\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk} + \\ & + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\varepsilon)\left\{[\lambda_j(x,\varepsilon)-\lambda_i(x,\varepsilon)]\left[\sum_{k=1}^{2}[v_{rik}(x,\varepsilon)U_k(t_1)+Q_{rik}(x,\varepsilon)u_k'(t_1)]+\right.\right. \\ & \left.\left. + f_{ri}(x,\varepsilon)\Psi(t_1)+g_{ri}(x,\varepsilon)\Psi'(t_1)-\lambda_i\omega_{ri}(x,\varepsilon)\right]\right\},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}R_2W_r(x,t,\varepsilon) = {} & -\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\varepsilon)\left\{\left[\tilde{D}_{i1}+\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_1(x)T_{\nu i1}\right]\times\right. \\ & \left.\times\left[g_{ri}(x,\varepsilon)\Psi(t_1)+\sum_{k=1}^{2}Q_{rik}(x,\varepsilon)U_k(t_1)\right]-\varphi_1'^2(x)f_{ri}(x,\varepsilon)\right\},\end{aligned} \tag{13}$$

$$R_3W_r = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\varepsilon)\left[D_{ijk}^{*}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n}T_{\nu ijk}\right]\alpha_{rijk}(x,\varepsilon)\exp t_{jk}, \tag{14}$$

$$R_4W_r(x,t,\varepsilon)= \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\varepsilon)\left[D_{i1}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n}T_{\nu i1}\right]\left[f_{ri}(x,\varepsilon)\Psi'(t_1)+\sum_{k=1}^{2}v_{rik}(x,\varepsilon)U_k'(t_1)\right], \tag{15}$$

$$R_{35} W_r(x, t, \varepsilon) \in Y_{3s}, \quad s = \overline{2, p}, \tag{16}$$

где

$$D_{i1} \equiv 2\varphi_1'(x, \varepsilon)\left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(b_i'(x, \varepsilon), b_i^*(x, \varepsilon)\right)\right] + \varphi_1''(x, \varepsilon),$$

$$\tilde{D}_{i1} \equiv \varphi_1(x, \varepsilon) D_{i1} + \varphi_1'^2(x, \varepsilon),$$

$$D_{ijk} \equiv 2\varphi_{jk}'(x)\left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(b_i'(x, \varepsilon), b_i^*(x, \varepsilon)\right)\right] + \varphi_{jk}''(x), \tag{17}$$

$$D_{ijk}^* \equiv D_{ijk} + A_{1i}(x),$$

$$T_{i\nu 1} \equiv 2\varphi_1'(x, \varepsilon)\left(b_i'(x, \varepsilon), b_\nu^*(x, \varepsilon)\right),$$

$$T_{i\nu jk} \equiv 2\varphi_{jk}'(x, \varepsilon)\left(b_i'(x), b_\nu^*(x)\right).$$

Из тождеств (11) – (17) можно сделать следующие выводы.

Выводы. 1. П. б. р. (9) инвариантны относительно всех операторов R_s, а следовательно, и относительно расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$, записанного в виде тождества (11).

2. Оператор R_0 является главным оператором расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$, представленного в виде тождества (11).

3. Расширенная задача (7) регулярна по малому параметру $\mu > 0$ в пространстве безрезонансных решений (9).

Формализм построения решения расширенной задачи. Поскольку в п. б. р. (9) расширенная задача (7) регулярна относительно малого параметра, то асимптотику решения этой задачи строим в виде ряда

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r W_r(x, t, \varepsilon), \quad W_r(x, t, \varepsilon) \in Y_r. \tag{18}$$

Для определения коэффициентов этого ряда получим следующие задачи:

$$R_0 W_{-2}(x, t, \varepsilon) = 0, \quad E_1 W_{-2}(M_m, \varepsilon) = E_1 \alpha_m,$$

$$G_m W_{-2} \equiv E_2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \varphi_{jk}'(m) \frac{\partial W_{-2}(M_m, \varepsilon)}{\partial t_{jk}} = 0, \tag{19}$$

$$R_0 W_{-1}(x, t, \varepsilon) = 0, \quad E_1 W_{-1}(M_m, \varepsilon) = 0,$$

$$G_m W_{-1} = E_2\left[\alpha_m - \varphi_1'(m, \varepsilon)\frac{\partial W_{-2}(M_m, \varepsilon)}{\partial t_1}\right], \tag{20}$$

$$R_0 W_0(x, t, \varepsilon) = h(x) - R_2 W_{-2}(x, t, \varepsilon), \quad E_1 W_0(M_m, \varepsilon) = E_1 \hat{W}_m,$$

$$G_m W_0 = E_2\left[\hat{W}_m - \varphi_1'(m, \varepsilon)\frac{\partial W_{-1}(M_m, \varepsilon)}{\partial t_{jk}}\right], \tag{21}$$

....

Точечных краевых условий в общем случае недостаточно для однозначной разрешимости полученных итерационных задач (19) – (21). Однако, по аналогии с работами [1–3], можно показать, что серия итерационных задач (19) – (21) асимптотически корректна в п. б. р. (9).

Оценка остаточного члена асимптотики решения. Запишем решение расширенной задачи (7) в виде

$$\tilde{W}(x,t,\varepsilon) \equiv \tilde{W}_{\varepsilon q}(x,t,\varepsilon) + \tilde{\xi}_{q+1}(x,t,\varepsilon), \tag{22}$$

где $\tilde{W}_{\varepsilon q}(x,t,\varepsilon)$ — частичная q-сумма ряда (18), а $\tilde{\xi}_{q+1}(x,t,\varepsilon)$ — остаток ряда.

Проведем сужение в тождестве (22) при $t=\Phi(x,\varepsilon)$. Имеем

$$W(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv W(x,\varepsilon) \equiv W(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) \equiv$$

$$\equiv W_{\varepsilon q}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \xi_{q+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon). \tag{23}$$

Теорема. *Пусть:* а) *выполняются условия* 1° *и* 2°; б) $b_{11}(m,\varepsilon)\neq 0$; $\left|\tilde{B}(m)\right|\neq 0$, $m=0,l$, *где*

$$\tilde{B}(x) = \begin{pmatrix} b_{22}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n2}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon>0$:

1) *изложенным выше методом с помощью вектор-переменной* t *с. в. з.* (1) *поставлена в соответствие расширенная задача* (7); 2) *в п. б. р.* (9) *расширенная задача* (7) *является регулярно возмущенной относительно малого параметра* $\mu>0$; 3) *решение расширенной задачи* (7) *представимо в виде ряда* (18), *коэффициенты которого принадлежат п. б. р.* (9); 4) *ряд* (18) *и его сужение при* $t=\Phi(x,\varepsilon)$ *являются асимптотическими рядами решений расширенной задачи* (9) *и с. в. з.* (1); 5) *справедлива оценка* $|||\,\xi_{q+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\,|||\leq \leq K\mu^{q+1}$, *где постоянная* K *не зависит от малого параметра и* $x\in I$; 6) *построенное решение задачи* (1) *является равномерно пригодным для всех* $x\in I$, *т. е. включая и точку поворота* $x=0$; 7) *на любом компакте отрезка* I, *не содержащем точку* $x=0$, *выполняется предельное равенство* $\lim_{\varepsilon\to+0}W(x,\varepsilon)=\omega(x)$, *где* $\omega(x)$ — *решение вырожденного уравнения* $-A\,\omega(x)=h(x)$.

Замечание. Пусть $\left(h(0), b_1^*(0,0)\right)=0$, т. е. решение вырожденного уравнения является гладкой функцией для всех $x\in I$. Проведенные исследования показали, что в этом случае $\alpha_0=\alpha_l=0$ и асимптотический ряд решения с. в. з. (1) не содержит отрицательных степеней малого параметра.

1. *Бобочко В. Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1505–1515.
2 *Бобочко В. Н.* Нестабильная точка поворота в системе дифференциальных уравнений с аналитическим оператором // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение: Сб. науч. тр. Ин-та математики НАН Украины. – Киев, 1995. – С. 31–33.
3. *Бобочко В. Н.* Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 2. – С. 147–160.
4. *Бобочко В. Н.* Сильная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Теория функций. Дифференц. уравнения в мат. моделировании. – 1993. – С. 26.
5. *Бобочко В. Н., Матвеев Н. М.* Уравнение Лиувилля с сильной точкой поворота // Качественная теория сложных систем. – 1994. – С. 30–49.
6. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
9. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых основных видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1952. – **7**, вып. 6. – С. 3–96.

Получено 31.01.96