УДК 512.44

Л. А. Курдаченко, Б. В. Петренко (Дніпропетр. ун-т),
І. Я. Субботін (Лос-Анжелес. ун-т, США)

ПРО ДОПОВНЮВАНІСТЬ ДЕЯКИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГІПЕРЦЕНТРІВ У АРТІНОВИХ МОДУЛЯХ

We prove that, in an Artinian module, the upper FC-hypercentre over infinite FC-hypercentral locally solvable group has a direct complement. Thus, a generalization of one theorem of D. I. Zaitsev and one theorem of Z. Duan is obtained.

Доведено, що в артіновім модулі над нескінченною FC-гіперцентральною локально розв'язною групою верхній FC-гіперцентр має пряме доповнення. Таким чином, отримано узагальнення теорем Д. І. Зайцева і З. Дуана.

Нехай G — группа, Z — кільце цілих чисел, A — ZG-модуль, B, C — ZG-підмодулі такі, що $B \leq C$. Будемо говорити, що C/B — *$\mathcal{F}$-центральний* (відповідно *$\mathcal{F}$-ексцентральний) фактор,* якщо група $G/C_G\,(C/B)$ скінченна (відповідно нескінченна), $\mathcal{F}$ — клас усіх скінченних груп.

Нехай $a \in A$. Будемо говорити, що a — *FC-елемент,* якщо $G/C_G\,(aZG)$ скінченна. Покладемо $FC_{ZG}(A) = \{a \in A \mid a$ — FC-елемент модуля $A\}$. Неважко пересвідчитися в тому, що $FC_{ZG}(A)$ — ZG-підмодуль A. Цей підмодуль називається FC-центром модуля A. Відправляючись від FC-центра, можна побудувати *верхній $\mathcal{F}$-центральний ряд модуля* A:

$$\langle 0 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots A_\gamma,$$

де $A_1 = FC_{ZG}(A)$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha = FC_{ZG}(A/A_\alpha)$, $\alpha < \gamma$ і $FC_{ZG}(A/A_\gamma) = \langle 0 \rangle$.

Останній член A_γ цього ряду назвемо верхнім FC-гіперцентром A і позначимо через $FC^\infty_{ZG}(A)$. Члени цього ряду називаються FC-гіперцентрами.

Будемо говорити, що модуль A має $\mathcal{F}$-розклад, якщо $A = FC^\infty_{ZG}(A) \oplus$ $\oplus\, FC^*_{ZG}(A)$, де $FC^*_{ZG}(A)$ — ZG-підмодуль, кожний ненульовий ZG-фактор якого є $\mathcal{F}$-ексцентральним.

Поняття $\mathcal{F}$-розкладу належить Д. І. Зайцеву [1]. Воно узагальнює поняття C-розкладу і Z-розкладу, які також вивчалися Д. І. Зайцевим та іншими авторами. Початком цієї тематики є теорема Фіттінга. Не заглиблюючись у перелік основних результатів, отриманих у даній області (майже всі вони наведені в [2]), сформулюємо два результати Д. І. Зайцева про існування $\mathcal{F}$-розкладів. В [1] доведено, що $\mathcal{F}$-розклад має артінів ZG-модуль над періодичною локально розв'язною FC-гіперцентральною групою G. В [3] Д. І. Зайцев звільнився від умови періодичності групи G, проте на модуль A накладається більш сильна умова: він повинен мати скінченний композиційний ряд.

У зв'язку з цими результатами виникає питання: чи має $\mathcal{F}$-розклад артінів ZG-модуль над FC-гіперцентральною локально розв'язною групою G?

Відповіді на це питання і присвячена дана стаття. Наведемо спочатку кілька допоміжних результатів.

Лема 1. *Нехай G — група, A — ZG-модуль, B — ZG-підмодуль модуля A, тоді $FC^\infty_{ZG}(B) \leq FC^\infty_{ZG}(A)$.*

Лема 2. *Нехай G — група, A — ZG-модуль, B_1, B_2 — ZG-підмодулі модуля A такі, що $B_1 \leq B_2$. Якщо кожний ненульовий ZG-фактор B_1 і B_2/B_1 є $\mathcal{F}$-ексцентральним, то кожний ненульовий ZG-фактор модуля B_2 також є $\mathcal{F}$-ексцентральним.*

Наслідок 1. *Нехай* $\{B_\alpha | \alpha \leq \gamma\}$ *— зростаюча послідовність* ZG*-підмодулів* A, *що задовольняє наступну умову: якщо* E, C *— такі* ZG*-підмодулі, що* $B_\alpha \leq C \leq E \leq B_{\alpha+1}$, $E \neq C$, $\alpha < \gamma$, *то* E/C *—* $\mathcal{F}$*-ексцентральний фактор. Тоді будь-який ненульовий* ZG*-фактор* B_γ *буде* $\mathcal{F}$*-ексцентральним.*

Наслідок 2. *Нехай* $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ *— система таких* ZG*-підмодулів* A, *що будь-який ненульовий* ZG*-фактор* B_λ *є* $\mathcal{F}$*-ексцентральним для довільного* $\lambda \in \Lambda$. *Тоді кожний ненульовий* ZG*-фактор підмодуля* $B = \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *також є* $\mathcal{F}$*-ексцентральним.*

Наслідок 3. *Нехай* $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ *— система таких* ZG*-підмодулів* A, *що* B_λ *має* $\mathcal{F}$*-розклад для довільного* $\lambda \in \Lambda$. *Тоді* $B = \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *також має* $\mathcal{F}$*-розклад.*

Наслідок 4. *Модуль* A *має найбільший* ZG*-підмодуль, що має* $\mathcal{F}$*-розклад.*

Доведення цих тверджень є майже очевидними.

Лема 3. *Нехай* G *— група,* H *— її нормальна підгрупа скінченного індексу,* A *—* ZG*-модуль,* B *— такий* ZH*-підмодуль, що* $A = BZG$. *Якщо* ZH*-підмодуль* B *має* $\mathcal{F}$*-розклад, то й* ZG*-модуль* A *має* $\mathcal{F}$*-розклад.*

Доведення. Нехай $\{g_1, \ldots, g_n\}$ — повна система представників суміжних класів групи G за підгрупою H, тоді $A = Bg_1 + \ldots + Bg_n$. Якщо C, D — ZH-підмодулі, $D \leq C$, $L = C_H(C/D)$, $g \in G$, то $C_H(Cg/Dg) = g^{-1}Lg$, тому $H/C_H(Cg/Dg) = H/g^{-1}Lg \cong H/L$. Звідси випливає, що якщо C/D — $\mathcal{F}$-центральний (відповідно $\mathcal{F}$-ексцентральний) ZH-фактор, то Cg/Dg — також $\mathcal{F}$-центральний (відповідно $\mathcal{F}$-ексцентральний) ZH-фактор. Звідси випливає, що ZH-підмодуль Bg_i має $\mathcal{F}$-розклад, $1 \leq i \leq n$.

З наслідку 3 випливає, що ZH-модуль A має $\mathcal{F}$-розклад.

Нехай $a \in FC_{ZH}(A)$, $A_0 = aZH$, $A_1 = aZH$. Тоді $A_1 = A_0g_1 + \ldots + A_0g_n$. Нехай $U = C_H(A_0)$; тоді група H/U скінченна. З рівності $C_H(A_0g) = g^{-1}C_H(A_0)g$ випливає, що $H/C_H(A_0g) = H/g^{-1}Ug \cong H/U$, тому група $H/C_H(A_0g)$ є скінченною для довільного $g \in G$. Зокрема, $ag \in FC_{ZH}(A)$, тобто $FC_{ZH}(A)$ — ZG-підмодуль A. Далі

$$C_H(A_1) = \bigcap_{1\leq i\leq n} g_i^{-1}Ug_i,$$

тому із скінченності G/H випливає скінченність $G/C_G(A_1)$. Це означає, що $FC_{ZH}(A) \leq FC_{ZG}(A)$. Зворотне включення є очевидним, тому $FC_{ZH}(A) = FC_{ZG}(A)$. Звідси випливає рівність $FC^\infty_{ZH}(A) = FC^\infty_{ZG}(A)$.

Нехай $B = B_1 \oplus B_2$, де $B_1 = FC^\infty_{ZH}(B)$, $B_2 = FC^*_{ZH}(B)$. Тоді $B_2g_1 + \ldots + B_2g_n$ — ZG-підмодуль A. З наслідку 2 отримуємо включення $B_2g_1 + \ldots + B_2g_n \leq FC^*_{ZH}(A)$. З леми 1 випливає, що $B_1g_1 + \ldots + B_1g_n \leq FC^\infty_{ZH}(A)$, так що $FC^*_{ZH}(A) = B_2g_1 + \ldots + B_2g_n$, зокрема $FC^*_{ZH}(A)$ — ZG-підмодуль A. Нехай U, V — ZG-підмодулі $FC^*_{ZH}(A)$ такі, що $U \geq V$, $U \neq V$. Тоді U/V — ненульовий ZH-фактор $FC^*_{ZH}(A)$, тобто $H/C_H(U/V)$ — нескінченна група. Звідси випливає, що $G/C_G(U/V)$ також нескінченна. Це означає, що $FC^*_{ZH}(A) = FC^*_{ZG}(A)$. Лему доведено.

Наступний результат є добре відомим.

Лема 4. *Нехай G — FC-гіперцентральна група, H — скінченно породжена підгрупа G. Тоді H майже нільпотентна.*

Лема 5. *Нехай G — локально майже нільпотентна група, $1 \neq g \in \zeta(G)$ — скінченно породжений ZG-модуль. Якщо $C_A(g) \neq \langle 0 \rangle$, то $A \neq A(g-1)$.*

Доведення. Нехай $A = a_1 ZG + \ldots + a_n ZG$. Припустимо, що $A = A(g-1)$; тоді знайдуться елементи $b_i \in A$ з властивістю $a_i = b_i(g-1)$, $1 \leq i \leq n$. Нехай $0 \neq c \in C_A(g)$. Виберемо в групі G скінченно породжену підгрупу H з властивостями $g \in H$, c, $b_1, \ldots, b_n \in a_1 ZH + \ldots + a_n ZH$. Покладемо $B = a_1 ZH + \ldots + a_n ZH$. Нехай U — максимальний ZH-підмодуль B з властивістю $c \notin U$; тоді B/U — монолітичний ZH-модуль. Оскільки U майже нільпотентна і B/U — скінченно породжений ZH-модуль, то B/U є скінченним (див., наприклад, [4, с. 153]). Розглянемо відображення $\varphi : \bar{b} \to \bar{b}(g-1)$, $\bar{b} \in B/U$. Оскільки $g \in \zeta(G)$, то φ — ZH-ендоморфізм B/U. З леми Фіттінга (див., наприклад, [5, 5.3]) отримуємо розклад $B/U = Z_1/U \oplus Z_2/U$, де Z_1, Z_2 — ZH-підмодулі B, для яких $(Z_1/U)(g-1)^k = \langle 0 \rangle$ для деякого натурального k, $(Z_2/U)(g-1) = Z_2/U$. З вибору c випливає, що $c + U \in Z_1/U$, зокрема $Z_1/U \neq \langle 0 \rangle$, але тоді $(c+U)ZH \leq Z_1/U$. Оскільки $Z_1/U \bigcap Z_2/U = \langle 0 \rangle$, то $B/U = Z_1/U$, зокрема $B(g-1) \neq B$.

З іншого боку, нехай $b \in B$, тоді $b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ для деяких $x_1, \ldots, x_n \in ZH$. Маємо

$$b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b_1(g-1)x_1 + \ldots + b_n(g-1)x_n = (b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n)(g-1),$$

до того ж $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n \in B$. Це означає, що $b \in B(g-1)$, тобто $B = B(g-1)$. З отриманої суперечності випливає, що $A \neq A(g-1)$. Лему доведено.

Теорема. *Нехай G — нескінченна FC-гіперцентральна локально розв'язна група, A — артінів ZG-модуль. Тоді A має $\mathcal{F}$-розклад.*

Доведення. Припустимо, що A не має $\mathcal{F}$-розкладу. Нехай $\mathfrak{R} = \{B \mid B$ — ZG-підмодуль A, що не має $\mathcal{F}$-розкладу$\}$. Оскільки $A \in \mathfrak{R}$, то $\mathfrak{R} \neq 0$. А оскільки A артінів, то множина $\mathfrak{R}$ має мінімальний елемент C. З наслідку 4 маємо, що C містить найбільший ZG-підмодуль M, що має $\mathcal{F}$-розклад. З вибору C випливає, що M — максимальний ZG-підмодуль C. Нехай D — власний ZG-підмодуль C, тоді $D \notin \wp$, тому D має $\mathcal{F}$-розклад і $D \leq M$.

Нехай $M = M_1 \oplus M_2$ — $\mathcal{F}$-розклад M, де $M_1 = FC^{\infty}_{ZG}(M)$, $M_2 = FC^{*}_{ZG}(M)$.

Припустимо спочатку, що $G/C_G(C/M)$ — нескінченна група, і розглянемо фактор-модуль C/M_2. Іншими словами, припустимо, що $M = FC^{\infty}_{ZG}(M)$. Можна також припустити, що $C_G(C) = \langle 1 \rangle$. Покладемо $S = \mathrm{Soc}_{ZG}(C)$. Оскільки S має $\mathcal{F}$-розклад, то $S \neq C$, тобто $S \leq M$. Підмодуль S розкладається у пряму суму скінченної множини простих підмодулів, тому включення $S \leq FC^{\infty}_{ZG}(C)$ означає, що індекс $|G : C_G(S)|$ є скінченним. Зокрема $C_G(S) \neq \langle 1 \rangle$. Оскільки G — FC-гіперцентральна, то $C_G(S) \bigcap FC(G) \neq \langle 1 \rangle$ [6], (лема 3). Нехай $1 \neq x \in C_G(S) \bigcap FC(G)$. Тоді $\langle x \rangle^G$ — скінченно породжена FC-підгрупа. Оскільки G локально розв'язна, то $\langle x \rangle^G$ містить у собі неодиничну G-інваріантну абелеву підгрупу X. Звідси маємо, що індекс $|G : C_G(S) \bigcap G_G(X)|$ є скінченним. Покладемо $H = C_G(X) \bigcap G_G(S)$, тоді H — нормальна підгрупа скінченного індексу і $X \leq \zeta(H)$. Оскільки C/M — простий ZG-модуль, то $C/M =$

$= \bigoplus_{1 \le i \le n} (B/M)g_i$ для деяких елементів $g_1, \dots, g_n \in G$ і деякого простого ZH-модуля B/M [7] (лема).

З рівності $C_H((B/M)g_i) = g_i^{-1} C_H(B/M) g_i$ отримуємо

$$C_H(C/M) = \bigcap_{1 \le i \le n} g_i^{-1} C_H(B/M) g_i.$$

Це означає, що фактор-група $H/C_H(B/M)$ є нескінченною.

Якщо припустити, що B має $\mathcal{F}$-розклад як ZH-модуль, то з леми 3 випливає, що BZG має $\mathcal{F}$-розклад. Оскільки $B \not\subseteq M$, то $BZG = C$, а це суперечить вибору C. Таким чином, B не має $\mathcal{F}$-розкладу як ZH-модуль.

З теореми A з [8] маємо, що A — артінів ZH-модуль. Нехай $S_1 = \mathrm{Soc}_{ZH}(C)$; очевидно, що S_1 — ZG-модуль C. Оскільки S_1 має $\mathcal{F}$-розклад як ZH-модуль, то з леми 3 отримуємо, що S_1 має $\mathcal{F}$-розклад як ZG-модуль, тому $S_1 \le M$, тобто $S_1 \le FC^{\infty}_{ZG}(C) = FC^{\infty}_{ZH}(C)$. Далі $S \le S_1$ [7] (лема). Нехай $S_1 = L_1 \oplus \dots \dots \oplus L_t$, де L_i — простий ZH-підмодуль, $1 \le i \le t$. Оскільки $X \le H$, то $L_i \omega(ZH)$ — ZH-підмодуль L_i (тут $\omega(ZH)$ — фундаментальний ідеал групового кільця ZX), тому або $L_i \omega(ZH) = \langle 0 \rangle$, або $L_i \omega(ZH) = L_i$. Звідси отримуємо розклад $S = C_{S_1}(X) \oplus S_1 \omega(ZX)$. Оскільки S_1 — ZG-підмодуль, а підгрупа X нормальна в G, то $C_{S_1}(X)$ і $S_1 \omega(ZX)$ — ZG-підмодулі S_1. Якщо припустити, що $S_1 \omega(ZX) \ne \langle 0 \rangle$, то $S_1 \omega(ZX) \cap \mathrm{Soc}_{ZH}(C) \ne \langle 0 \rangle$, оскільки C є артіновим ZG-модулем. Але $\mathrm{Soc}_{ZH}(C) \le C_{S_1}(X)$. Це показує, що $S_1 \le C_C(X)$.

Покладемо $\mathfrak{I} = \{ Q \mid Q$ — ZH-підмодуль B, що не має $\mathcal{F}$-розкладу$\}$. Оскільки $B \in \mathfrak{I}$, то $\mathfrak{I} \ne \varnothing$. Оскільки B — артінів ZH-модуль, то $\mathfrak{I}$ має мінімальний елемент E. З леми 3 випливає, що $E \not\subseteq M$, тому $B = E + M$ (враховуючи, що B/M — простий ZH-модуль). З наслідку 4 отримуємо, що E містить у собі найбільший ZH-підмодуль E_1, що має $\mathcal{F}$-розклад. З леми 3 маємо $E_1 ZG \le M$, тобто $E_1 \le E \cap M$. Оскільки $E/E \cap M \cong E + M/M = B/M$ — простий ZH-модуль, а фактор-група $H/C_H(B/M)$ нескінченна, то $E_1 = E \cap M$.

З того факту, що C — артінів ZH-модуль, отримуємо співвідношення $E \cap \cap \mathrm{Soc}_{ZH}(C) \ne \langle 0 \rangle$, зокрема $E \cap C_C(X) \ne \langle 0 \rangle$. З лем 4 і 5 маємо, що $E(g-1) \ne E$ для будь-якого $1 \ne g \in X$. Розглянемо відображення

$$\varphi\colon\ a + E_1 \to a(g-1) + E_1(g-1), \qquad a \in E.$$

Оскільки $g \in \zeta(H)$, то φ — ZH-гомоморфізм E/E_1 на $E(g-1)/E_1(g-1)$. Але E/E_1 — простий ZH-модуль, так що або $\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle 0 \rangle$, або $\mathrm{Ker}\,\varphi = E/E_1$. У першому випадку $E/E_1 \cong E(g-1)/E_1(g-1)$. Із співвідношення $E \ne E(g-1)$ маємо $E(g-1) \le E_1 \le FC_{ZH}(E)$. Але фактор-група $H/C_H(E/E_1)$ нескінченна. Таким чином, $\mathrm{Ker}\,\varphi = E/E_1$. Це означає, що $E(g-1) = E_1(g-1)$. У цьому випадку $E = C_E(g) + E_1$, зокрема, $C_E(g) \not\subseteq E_1$. Оскільки будь-який власний ZH-підмодуль E входить у E_1, то $E = C_E(g)$ для будь-якого $1 \ne g \in X$. Іншими словами, $E \le C_C(X)$. Оскільки X — нормальна підгрупа G, то $C_C(X)$ — ZG-підмодуль C. Із співвідношень $E \not\subseteq M$, $E \le C_C(X)$ отримуємо рівність $C = C_C(X)$, тобто $X \le C_G(C) = \langle 1 \rangle$. Суперечність.

Розглянемо тепер випадок, коли фактор-група $G/C_G(C/M)$ є скінченною.

Тепер будемо розглядати фактор-модуль C/M_1. Іншими словами, можна припустити, що $M = FC^*_{ZG}(M)$. Знову можна вважати, що $C_G(C) = \langle 1 \rangle$.

Оскільки $G/C_G(C/M)$ скінченна, то $C_G(C/M) \neq \langle 1 \rangle$. Звідси випливає $C_G(C/M) \cap FC(G) \neq \langle 1 \rangle$ [5] (лема 3). Нехай $1 \neq x \in C_G(C/M) \cap FC(G)$. Тоді $\langle x \rangle^G$ — скінченно породжена FC-підгрупа. З того, що G — локально розв'язна група, отримуємо, що $\langle x \rangle^G$ містить у собі неодиничну G-допустиму абелеву підгрупу X.

Покладемо $H_1 = C_G(C/M) \cap C_G(X)$, тоді індекс $|G : H_1|$ є скінченним і $X \leq \zeta(H_1)$. Оскільки C/M — простий ZH_1-модуль, то $C/M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (B/M)g_i$, де B/M — простий ZH_1-модуль, $g_1, \ldots, g_n \in G$ [7] (лема). Оскільки $B \not\subseteq M$, то $BZG = C$. З леми 3 випливає, що ZH_1-модуль B не має $\mathcal{F}$-розкладу. Покладемо $\mathfrak{I}_1 = \{Q \mid Q — ZH_1\text{-підмодуль } B, \text{ що не має } \mathcal{F}\text{-розкладу}\}$, тоді $\mathfrak{I}_1 \neq \varnothing$. З теореми A [8] випливає, що C — артінів ZH_1-модуль, тому множина $\mathfrak{I}_1$ має мінімальний елемент U. Тоді $U \not\subseteq M$, так що $B = U + M$. Нехай U_1 — найбільший ZH_1-підмодуль U, що має $\mathcal{F}$-розклад, тоді знову $U_1 = U \cap M$. До того ж, U_1 містить у собі будь-який власний ZH_1-підмодуль U.

Нехай $1 \neq g \in X$. Розглянемо відображення $\psi\colon a + U_1 \to a(g-1) + U_1(g-1)$, $a \in U$. З того, що $g \in \zeta(H_1)$, випливає, що φ — ZH_1-гомоморфізм U/U_1 на $U(g-1)/U_1(g-1)$. Оскільки $g \in C_G(C/M)$, то $U(g-1) \leq U \cap M = U_1$. Якщо $U(g-1) \neq U_1(g-1)$, то $H_1/C_{H_1}(U(g-1)/U_1(g-1))$ — нескінченна група. Із співвідношення $U(g-1) \neq U_1(g-1)$ випливає, що $\operatorname{Ker}\psi = \langle 0 \rangle$, тобто $U/U_1 \cong ZH_1 U(g-1)/U_1(g-1)$. Але $H_1/C_{H_1}(U/U_1)$ — скінченна група. З отриманої суперечності маємо $U(g-1) = U_1(g-1)$. Тому $U = C_U(g) + U_1$. Звідси знову випливає рівність $U = C_U(g)$ для довільного $1 \neq g \in X$. Таким чином, $U \leq C_C(X)$. Оскільки X — нормальна підгрупа, то $C_C(X)$ — ZG-підмодуль. Із співвідношень $U \leq C_C(X)$, $U \not\subseteq M$, тоді випливає $C = C_C(X)$. Це означає, що $\langle 1 \rangle \neq X \leq C_G(C) = \langle 1 \rangle$. Знову отримуємо суперечність. Теорему доведено.

Наслідок 5 [1]. *Нехай G — нескінченна локально розв'язна періодична FC-гіперцентральна група, A — артінів ZG-модуль. Тоді A має $\mathcal{F}$-розклад.*

Наслідок 6 [9]. *Нехай нескінченна група G має зростаючий ряд нормальних підгруп, нескінченні фактори якого — циклічні групи. Якщо G локально розв'язна, то будь-який артінів ZG-модуль має $\mathcal{F}$-розклад.*

1. *Зайцев Д. И.* Гиперконечные расширения абелевых групп // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 17–26.
2. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 2. – С. 75–114.
3. *Зайцев Д. И.* О прямых разложениях бесконечных абелевых групп с операторами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 303–309.
4. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt. 2. – Berlin: Springer, 1972. – 257 p.
5. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. – М.: Мир, 1986. – 542 с.
6. *Курдаченко Л. А.* О некоторых классах групп со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1050–1056.
7. *Зайцев Д. И.* О существовании прямых дополнений в группах с операторами // Исследования по теории групп . – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 26–44.
8. *Wilson J. S.* A some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1990. – **144**, № 1. – P. 19–21.
9. *Duan Z. Y.* Extension of Abelian-by-hyper-(cyclic or finite) groups // Comm. Algebra. – 1992. – **20**, № 8. – P. 2305–2321.

Получено 23.04.96