УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ $\overline{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ

We introduce a notion of $\overline{\psi}$-integrals of 2π-periodic summable functions f, $f \in L$, on the basis of which the space L is decomposed into subsets (classes) $L^{\overline{\psi}}$. We obtain integral representations of deviations of the trigonometric polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ generated by a given Λ-method for summing the Fourier series of functions $f \in L^{\overline{\psi}}$. On the basis of these representations, the rate of convergence of the Fourier series is studied for functions belonging to the sets $L^{\overline{\psi}}$ for the uniform and integral metrics. By using this approach, we find, in particular, the asymptotic equalities for upper bounds of deviations of the Fourier sums on the sets $L^{\overline{\psi}}$, which give solutions of the Kolmogorov–Nikol'skii problem. We also obtain an analog of the well-known Lebesgue inequality.

Вводиться поняття $\overline{\psi}$-інтегралів 2π-періодичних сумовних функцій f, $f \in L$, на основі якого проводиться розбиття простору L на підмножини (класи) $L^{\overline{\psi}}$. Одержані інтегральні зображення відхилень тригонометричних поліномів $U_n(f; x; \Lambda)$, що породжуються даним Λ-методом підсумовування рядів Фур'є від функцій $f \in L^{\overline{\psi}}$, і на їх основі досліджується швидкість збіжності рядів Фур'є для функцій із множин $L^{\overline{\psi}}$ в рівномірній та інтегральних метриках. В цьому напрямі, зокрема, знайдені асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень сум Фур'е на множинах $L^{\overline{\psi}}$, які дають розв'язки задачі Колмогорова–Нікольського, а також одержано аналог відомої нерівності Лебега.

1. Определения и вспомогательные утверждения.

Определение 1. *Пусть L — пространство интегрируемых 2π-периодических функций, $f \in L$ и*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\psi_1(k) A_k(f; x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(f; x)\right), \tag{2}$$

$$\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (2) *для данной функции $f(\cdot)$ и пары $\overline{\psi}$ является рядом Фурье некоторой функции $F \in L$, то F назовем интегралом функции f, порожденным парой $\overline{\psi}$, или просто $\overline{\psi}$-интегралом функции f и условимся писать $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f; \cdot)$.*

Множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначим через $L^{\overline{\psi}}$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\overline{\psi}$-интегралов функций $f \in \mathfrak{N}$.

Определение 2. *Пусть $f \in L$,* (1) *— ее ряд Фурье и пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\psi}^2(k) = \overline{\psi}_1^2(k) + \overline{\psi}_2^2(k) \neq 0, \quad k \in N. \tag{3}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, *то* φ *назовем* $\overline{\psi}$*-производной функции* f *и будем писать* $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f;\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. *Подмножество функций* $f \in L$, *у которых существуют* $\overline{\psi}$*-производные, обозначим через* $\overline{L}^{\overline{\psi}}$. *Если* $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ *и при этом* $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$, *где* $\mathfrak{N} \subset L$, *то полагаем* $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

***Замечание* 1.** Из определения $\overline{\psi}$-интеграла ясно, что для каждой функции, имеющей $\overline{\psi}$-интеграл $F(\cdot)$, ее $\overline{\psi}$-интегралом будет и любая функция $F_1(\cdot)$, отличающаяся от $F(\cdot)$ на любом множестве меры нуль и, с другой стороны, каждый $\overline{\psi}$-интеграл $F(\cdot)$ данной функции $f(\cdot)$ будет $\overline{\psi}$-интегралом и для любой функции $f_1(\cdot)$, отличающейся от $f(\cdot)$ на произвольном множестве меры нуль. Но такая неоднозначность не является принципиальной в данных рассмотрениях и легко устраняется традиционным приемом — путем отождествления функций, эквивалентных относительно меры Лебега. Это замечание, понятно, касается и понятия $\overline{\psi}$-производных. В связи с этим условимся в случае сходимости рядов (2) и/или (4) к суммируемым функциям в качестве функций $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ и/или $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ всегда понимать их суммы.

Связь между $\overline{\psi}$-интегралами и $\overline{\psi}$-производными устанавливается в следующем утверждении.

Предложение 1. *Если* $f \in L$, *ряд* (1) *— ее ряд Фурье и выполнено условие* (3), *то функция* $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$ *имеет* $\overline{\psi}$*-производную и справедливо равенство*

$$D^{\overline{\psi}}(\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}. \tag{5}$$

Если же $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ *и ряд* (1) *— ее ряд Фурье, то функция* $D^{\overline{\psi}}(f;x)$ *имеет* $\overline{\psi}$*-интеграл и при этом*

$$\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}. \tag{6}$$

Доказательство этого предложения проводится простой проверкой с учетом того факта, что если U есть оператор тригонометрического сопряжения, то $UU(A_k(f;x)) = -A_k(f;x)$.

***Замечание* 2.** Вследствие равенства (5) функцию $f(x) - a_0/2$ естественно называть $\overline{\psi}$-производной функции $F(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$ независимо от выполнения условия (3). Таким образом, будем считать, что всегда $D^{\overline{\psi}}(\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)) = f(x) - a_0/2$.

Из соотношений (5) и (6) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $L^0 = \left\{ f \in L\colon \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0 \right\}$. *Тогда для любых пар* $\overline{\psi}$, *удовлетворяющих условию* (3), *справедливо равенство*

$$L^0 \cap \overline{L}^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} L^0. \tag{7}$$

Таким образом, если выполнено (3), то множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L^0$ совпадает с множеством функций, имеющих $\overline{\psi}$-производные (и состоит из $\overline{\psi}$-интегралов от их $\overline{\psi}$-производных).

Чтобы убедиться в справедливости равенства (7), предположим сначала, что $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$. Тогда $f(\cdot)$ имеет $\overline{\psi}$-производную $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ и в силу равенства (6) $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f^{\overline{\psi}};\cdot) = f(\cdot) - a_0/2$, т. е. $f \in L^{\overline{\psi}} L^0$. С другой стороны, если $f \in L^{\overline{\psi}} L_0$, то найдется функция $\varphi \in L^0$ такая, что $f(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi;x)$. В силу равенства (6)

$D^{\overline{\psi}}(f;x) = D^{\overline{\psi}}(\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi;x)) = \varphi(x)$. Таким образом, $f(\cdot)$ имеет $\overline{\psi}$-производную, следовательно, $f\in \overline{L}^{\overline{\psi}}$.

Отметим также, что в силу равенств (5) и (6) оператор $D^{\overline{\psi}}$, ставящий в соответствие каждой функции $f\in L$ с рядом Фурье (1) функцию $\varphi\in L^0$, рядом Фурье которой есть ряд (4), является обратным к оператору $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}$, отображающему функции $f\in L^0$ в функции $F\in L$, ряды Фурье которых имеют вид (2). То есть на множестве $\mathcal{J}\subset L^0$, где существует $\overline{\psi}$-интеграл, при условии (3) справедливо равенство

$$D^{\overline{\psi}}\mathcal{J}^{\overline{\psi}} = I, \tag{8}$$

в котором I — единичный оператор.

Если ряд (1) записать в комплексной форме, то ряд (2) запишется в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{|k|\geq 1}\mu_k c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2},$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} \psi_1(k) - i\psi_2(k), & k\geq 1; \\ \psi_1(|k|) + i\psi_2(|k|), & k\leq -1, \end{cases}$$

а ряд (4) — в виде

$$\sum_{|k|\geq 1}\lambda_k c_k e^{ikx},$$

где

$$\lambda_k = \begin{cases} \dfrac{\psi_1(k) + i\psi_2(k)}{\overline{\psi}(k)}, & k\geq 1; \\ \dfrac{\psi_1(|k|) - i\psi_2(|k|)}{\overline{\psi}(|k|)}, & k\leq -1; \\ \overline{\psi}(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{1/2}. \end{cases}$$

Таким образом, операторы $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}$ и $D^{\overline{\psi}}$ являются мультипликаторами, причем $\mu_k\lambda_k = 1$, $|k|\geq 1$. Заметим, что отсюда непосредственно следует (8).

Определение 3. *Если пара* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) = \frac{1}{2}\sum_{|k|\geq 1}\mu_k e^{ikx} \tag{9}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi(x)$, *то будем писать* $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$.

Предложение 3. *Если* $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$, *то для каждой функции* $f\in L$ *ее* $\overline{\psi}$*-интеграл существует и почти всюду*

$$\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Psi(t)\,dt. \tag{10}$$

Таким образом, элементы множества $L^{\overline{\psi}}$ — это функции, представимые свертками $f*\Psi$, $f\in L$. В частности, справедливо такое утверждение.

Предложение 4. *Пусть* $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$, *и выполняется* (3), *то для каждой функции* $f\in L^{\overline{\psi}}$ *почти всюду выполняется равенство*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + (f^{\overline{\psi}} * \Psi)(x), \tag{11}$$

в котором a_0 *— свободный член разложения Фурье функции* $f(\cdot)$.

Доказательство равенства (10) осуществляется простой проверкой, а равенство (11) следует из (10) с учетом предложения 1.

Ранее автором (см., например, [1–4]) рассматривалось понятие $(\psi, \overline{\beta})$-производных периодических функций, которое вводится следующим образом.

Пусть функция $f \in L$ и ряд (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi = \psi(k)$ и $\overline{\beta} = \beta(k)$ — произвольные фиксированные последовательности чисел из R^1. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \beta_k \frac{\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \beta_k \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k \frac{\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(f;x) - \frac{\sin \beta_k \frac{\pi}{2}}{\overline{\psi}(k)} \tilde{A}_k(f;x) \tag{12}$$

является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f_{\overline{\beta}}^{\psi}(\cdot)$, то ее называют $(\psi, \overline{\beta})$-производной функций $f(\cdot)$. Множество всех функций, имеющих $(\psi, \overline{\beta})$-производные, обозначается через $L_{\overline{\beta}}^{\psi}$. Если $f \in L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ и, кроме того, $f_{\overline{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подпространство из L^0, то полагают $f \in L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$. В случае, когда при некотором $\beta \in R^1$ выполняется тождество $\beta(k) \equiv \beta$, $(\psi, \overline{\beta})$-производная обозначается $f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$, а множества $L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ и $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ — соответственно через L_{β}^{ψ} и $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Понятие $\overline{\psi}$-производной совпадает с понятием $(\psi, \overline{\beta})$-производной в том смысле, что из факта существование одной из них следует существование другой с соответствующими значениями определяющих их параметров. Чтобы в этом убедиться, в силу соотношений (4), (12) достаточно показать, что система

$$\begin{cases} \dfrac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} = \dfrac{1}{\psi(k)} \cos \beta_k \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} = \dfrac{1}{\psi(k)} \sin \beta_k \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad \overline{\psi}^2(k) \neq 0, \ \ \psi(k) \neq 0, \tag{13}$$

при заданной паре $\psi(k)$ и $\beta(k)$ разрешима относительно $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ и при заданных $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ разрешима относительно $\psi(k)$ и $\beta(k)$.

Если заданы значения $\psi(k)$ и $\beta(k)$, то положим

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Ясно, что такие значения удовлетворяют системе (13). Если же задана пара $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, то нужные значения определяются равенствами

$$\psi(k) = \overline{\psi}(k), \qquad \cos \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}(k)},$$
$$\sin \beta_k \frac{\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}(k)}. \tag{15}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Любая* $(\psi, \overline{\beta})$*-производная функции* $f \in L$ *является и* $\overline{\psi}$*-производной, если компоненты* $\psi_1(k)$ *и* $\psi_2(k)$ *подобраны согласно равенствам* (14) *и любая* $\overline{\psi}$*-производная есть* $(\psi, \overline{\beta})$*-производная, если параметры* $\psi(k)$ *и* $\beta(k)$ *определяются формулами* (15). *В обоих случаях выполняются равенства*

$$\overline{L^{\overline{\psi}}} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}, \quad \overline{L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} \quad \forall\, \mathfrak{N} \subset L^0. \tag{16}$$

Заметим, что из формул (14) следует, что (ψ, β)-производная является и $\overline{\psi}$-производной, если

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\frac{\pi}{2}. \tag{14$'$}$$

В частности, известная r-я $(r > 0)$ производная $f_r^{(r)}(\cdot)$ в смысле Вейля функции $f(\cdot)$ есть (ψ, β)-производной при $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$. Следовательно, в силу (14′) $f_r^{(r)}(\cdot)$ будет совпадать с $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, если положить

$$\psi_1(k) = k^{-r}\cos r\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = k^{-r}\sin r\frac{\pi}{2}.$$

Заметим также, что если выполнены эти равенства, то функции

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kx - r\frac{\pi}{2}\right) = B_r(x)$$

называются функциями Бернулли; множество $\overline{L^{\overline{\psi}}}$ в силу предложения 2 совпадает с $L^{\overline{\psi}}L_0$ и элементы этих множеств согласно предложению 4 почти для всех $x \in R^1$ задаются равенствами

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)B_r(t)\,dt = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r^{(r)}(x-t)B_r(t)\,dt,$$

в которых A_0 — некоторая постоянная, и называются r-ми периодическими интегралами функции $f_r^{(r)}(\cdot)$.

Если в предположении (3) положить $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, где

$$\varphi_1(k) = \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}, \quad \varphi_2(k) = \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}, \tag{17}$$

то величины $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ определяются равенствами

$$\psi_1(k) = \frac{\varphi_1(k)}{\overline{\Phi}(k)}, \quad \psi_2(k) = -\frac{\varphi_2(k)}{\overline{\Phi}(k)},$$
$$\overline{\Phi}^2(k) = \varphi_1^2(k) + \varphi_2^2(k). \tag{18}$$

При этом ряд (4) для $f \in L_0$ примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_1(k)A_k(f;x) + \varphi_2(k)\tilde{A}_k(f;x)), \tag{19}$$

а ряд (2) —

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_1(k)}{\overline{\Phi}^2(k)}A_k(f;x) - \frac{\varphi_2(k)}{\overline{\Phi}^2(k)}\tilde{A}_k(f;x)\right). \tag{19$'$}$$

Отсюда видим, что на множестве L^0 при выполнении условия (3) интеграл $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ можно трактовать как производную $D^{\overline{\varphi}}(f;\cdot)$, а производную $D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$ — как интеграл $\mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;\cdot)$. То есть в принципе можно было бы ограничиться и одним из этих понятий — например, понятием $\overline{\psi}$-интеграла, или же поменять местами их названия.

Однако представляется удобным разделение этих понятий и главным поводом к этому может служить традиционное представление о том, что операция интегрирования „улучшает" свойства функции, а операция дифференцирования их „ухудшает". В связи с этим в рамках работы предполагается, что $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ являются бесконечно малыми, а следовательно, $\varphi_1(k)$ и $\varphi_2(k)$ из (17) — бесконечно большими последовательностями. Поэтому факт существования $\overline{\psi}$-интеграла для функции $f \in L$ устанавливается, как правило, без проблем. В то же время наличие у данной функции $\overline{\psi}$-производной предъявляет к ней существенные требования: чем быстрее функции $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ убывают, тем меньше у данной функции шансов иметь $\overline{\psi}$-производную или, что то же самое, попасть в множество $\overline{L}^{\overline{\psi}}$, а значит, согласно предложению 2, и в множество $L^{\overline{\psi}}$.

Различным парам $\overline{\psi}$ и $\overline{\psi}'$ отвечают различные множества $L^{\overline{\psi}}$ и $L^{\overline{\psi}'}$. Для установления взаимосвязи между такими множествами часто бывает полезным следующее определение.

Определение 4. *Будем говорить, что пара* $\overline{\psi}' = (\psi_1', \psi_2')$ *предшествует паре* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, *если* $\overline{L}^{\overline{\psi}'} \supseteq \overline{L}^{\overline{\psi}}$. *В этом случае будем писать* $\overline{\psi}' \leq \overline{\psi}$.

Итак, „старшим" парам отвечают „меньшие" множества (оператор $D^{\overline{\psi}}$ со „старшими" индексами имеет меньшую область определения).

Вопрос о предшествовании пар удобно рассматривать в терминах $(\psi, \overline{\beta})$-производных с учетом предложения 5, устанавливающего взаимосвязь между элементами множеств $\overline{L}^{\overline{\psi}}$ и $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$. Поэтому оказывается полезной следующая перефразировка определения 4 [3, с. 35].

Определение 4′. *Пусть* $\psi = \psi(k)$, $\overline{\beta} = \beta(k)$, $\psi' = \psi'(k)$ *и* $\overline{\beta}' = \beta(k)$ — *произвольные последовательности действительных чисел. Будем говорить, что пара* $(\psi', \overline{\beta}')$ *предшествует паре* $(\psi, \overline{\beta})$, *если* $L^{\psi}_{\overline{\beta}} \subseteq L^{\psi'}_{\overline{\beta}'}$. *В этом случае будем писать* $(\psi', \overline{\beta}') \leq (\psi, \overline{\beta})$.

Вопрос о предшествовании $(\psi, \overline{\beta})$-пар достаточно полно исследован в [3]. Там, в частности, доказано следующее утверждение [3, с. 35].

Предложение 6. *Если функция* $f(\cdot)$ *принадлежит* $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ *и* $(\psi', \overline{\beta}') \leq (\psi, \overline{\beta})$, *то она имеет производную* $f^{\psi'}_{\overline{\beta}'}(\cdot)$, *которая принадлежит множеству* $L^{\psi/\psi'}_{\overline{\beta}-\overline{\beta}'}$, *где* $\psi/\psi' \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(k)/\psi'(k)$, $\overline{\beta}-\overline{\beta}' \overset{\mathrm{df}}{=} \beta(k) - \beta'(k)$, $k \in N$, *причем*

$$S\Big[(f^{\psi'}_{\overline{\beta}'})^{\psi/\psi'}_{\overline{\beta}-\overline{\beta}'}\Big] = S[f^{\psi}_{\overline{\beta}}].$$

Простейшие достаточные условия предшествования пар даются, например, теоремой 10.1 из [3, с. 37].

Всякая ли функция $f \in L$ имеет хоть какую-нибудь $\overline{\psi}$-производную?

Положительный ответ очевиден, если не требуется, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \psi_1(k) = \lim_{k\to\infty} \psi_2(k) = 0, \tag{20}$$

поскольку, положив, к примеру, $\psi_1(k) = \psi_2(k) = 1 \quad \forall k \in N$, будем иметь $f^{\overline{\psi}}(\cdot) = f(\cdot)$. Поэтому интересен случай, когда выполнено условие (20). И тогда ответ также положителен, но уже нетривиален. Он вытекает из утверждения Салема [5] (см., например, [6, с. 243]), для формулировки которого нужны следующие стандартные определения.

Определение 5. *Последовательность действительных чисел* $\lambda = \lambda(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, *называется выпуклой (выпуклой вниз), если*

$$\Delta^2 \lambda(k) = \lambda(k) - 2\lambda(k+1) + \lambda(k+2) \geq 0. \tag{21}$$

Если $\Delta^2 \lambda(k) \leq 0$, *то последовательность* $\lambda(k)$ *называется вогнутой (выпуклой вверх).*

Множество выпуклых вниз последовательностей $\lambda(k)$, для которых

$$\lim_{k \to \infty} \lambda(k) = 0, \tag{22}$$

обозначается через $\mathfrak{M}$. Подмножество непрерывных функций из L обозначается через C.

Предложение 7 (Салем [5]). *Пусть* $f(\cdot)$ *— любая функция из множества* C *(или* L*) и*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье. Тогда всегда можно указать вогнутую последовательность $\lambda = \lambda(k)$, *члены которой, не убывая, стремятся к бесконечности* $(\lambda(k) \uparrow \infty)$, *такую, чтобы ряд*

$$\frac{a_0}{2}\lambda(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

был рядом Фурье непрерывной (или, соответственно, суммируемой) функции $F(\cdot)$.

Можно считать, что в этом утверждении всегда $\lambda(k) \geq 1$. Поэтому, рассматривая пару $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ при $\psi_1(k) \equiv 1/\lambda(k)$ и $\psi_2(k) \equiv 0$ и замечая, что в этом случае $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$ и что для каждой функции $f \in L$ согласно (4)

$$S[f^{\overline{\psi}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(k)} A_k(f; x),$$

из предложения 7 получаем такое утверждение.

Предложение 8. *Каждая функция* $f \in C$ *(или* $f \in L$*) имеет по крайней мере одну* $\overline{\psi}$*-производную* $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, *которая находится в* C *(или же в* L*). При этом пару* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *можно выбрать так, чтобы* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$.

Отсюда следует, что каждая функция $f \in C$ (или $f \in L$) имеет бесконечное множество $\overline{\psi}$-производных, определяющие компоненты которых ψ_1 и ψ_2 принадлежат $\mathfrak{M}$, а сами производные $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ являются непрерывными (или, соответственно, суммируемыми). Более того, так как для $\psi \in \mathfrak{M}$ ряд

$$\frac{\psi(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt, \tag{23}$$

как хорошо известно (см., например, [7, с. 294]), всегда является рядом Фурье суммируемой функции $\Psi(t)$, то вследствие предложения 3 приходим к такому утверждению.

Предложение 9. *Каждая функция* $f \in C$ (*или* $f \in L$) *представима сверткой*

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{24}$$

в которой $\varphi \in C$ (*или* $\varphi \in L$), *а* $\Psi(t)$ — *функция, рядом Фурье которой есть ряд* (23), *причем* $\psi = \psi(k)$ *принадлежит* $\mathfrak{M}$.

Таким образом, справедливы равенства

$$\bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}} = C, \quad C^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} \cap C, \tag{25}$$

и, более того,

$$\bigcup_{\psi \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}_*} = L, \qquad \bigcup_{\psi \in \mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}_*} = C, \quad C^{\overline{\psi}_*} = L^{\overline{\psi}_*} \cap C, \tag{25$'$}$$

где $L^{\overline{\psi}_*}$ — *множества функций, представимых равенством* (24).

Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех тригонометрических полиномов, т. е. функций $f(\cdot)$, представимых равенствами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

в которых n может принимать любое натуральное значение. Понятно, что какова бы ни была пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, удовлетворяющая условию (3), любая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет $\overline{\psi}$-производную. Отсюда, в частности, следует, что множество L всегда не пусто. Ясно также, что $\bigcap_{\overline{\psi}} L = \mathcal{F}$, если $\overline{\psi}$ пробегает все множество пар, удовлетворяющих условию (3). Более того, верно и более сильное утверждение.

Предложение 10. *Справедливо равенство*

$$\bigcap_{\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{F}. \tag{26}$$

Доказательство. Если $f \in \mathcal{F}$, то, как отмечалось, $f \in L^{\overline{\psi}}$ для любой пары, удовлетворяющей условию (3). Поэтому остается показать, что функция $f(\cdot)$, имеющая любую $\overline{\psi}$-производную при $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, должна принадлежать $\mathcal{F}$. Этот факт вытекает из следующего предложения.

Предложение 11. *Если* $f \in L$, *но* $f \,\overline{\in}\, \mathcal{F}$, *то можно указать пару* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *такую, что* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$ *и* $f \,\overline{\in}\, L^{\overline{\psi}}$, *т. е.* $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ *не существует.*

Доказательство. Пусть $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$. Положим

$$a(x) = \sup_{k > x} |a_k|, \qquad b(x) = \sup_{k > x} |b_k|, \quad x \geq 1.$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ кусочно-постоянны, невозрастающие и, так как при $k \to \infty$ коэффициенты Фурье стремятся к нулю, то и

$$\lim_{x \to \infty} a(x) = \lim_{x \to \infty} b(x) = 0.$$

Условие $f \,\overline{\in}\, \mathcal{F}$ равносильно тому, что, по крайней мере, одна из этих функций всегда положительна. Пусть для определенности $a(x) > 0 \ \ \forall\, x \geq 1$.

Обозначим через k_j, $j = 1, 2, \ldots$, точки, занумерованные в порядке их возрастания, в которых функция $a(x)$ меняет значения. Ясно, что $a(k_j) = |a_{k_j}|$. Положим $z_j = (k_j, |a_{k_j}|)$ и построим функцию $l(x)$ следующим образом. Луч l_1, выходящий из z_1 в направлении, противоположном положительному направлению оси ординат, будем вращать против часовой стрелки пока на нем не окажется одна из точек z_j, $j > 1$. Эту точку обозначим через z_{j_1}. Если на луче окажется сразу несколько таких точек, то через z_{j_1} обозначим ту, у которой наибольшая абсцисса. На промежутке $[1, k_{j_1}]$ определим $l(x)$ так, чтобы ее график совпадал с прямой, соединяющей точки z_1 и z_{k_1}. Далее, луч l_2, выходящий из точки z_{j_1}, направление которого совпадает с лучом l_1 в последнем положении, опять будем вращать против часовой стрелки пока он не встретит одну из оставшихся точек z_j, $j > j_1$. Эту точку обозначим через z_{j_2}. Если при этом на луче окажется несколько таких точек, то через z_{j_2} обозначим ту из них, у которой наибольшая абсцисса. На промежутке $[k_{j_1}, k_{j_2}]$ определим $l(x)$ так, чтобы ее график совпадал с прямой, соединяющей точки z_{j_1} и z_{j_2}. Продолжая этот процесс, построим функцию $l(x)$ для всех $x \geq 1$. Она будет характеризоваться такими свойствами:

а) $l(x)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{x \to \infty} l(x) = 0$;

б) $l(k_{j_s}) = a(k_{j_s}) = |a_{k_{j_s}}|$, $s = 1, 2, \ldots$.

Поэтому если положим $\psi_1(k) = l(k)$, то вследствие свойства а) заключаем, что $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а в силу свойства б) имеем

$$\psi_1(k_{j_s}) = |a_{k_{j_s}}|, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Рассмотрим пару $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, в которой $\psi_2(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и соответствующий ей и функции $f(\cdot)$ ряд (4):

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(k)} A_k(f; x).$$

В силу соотношения (27) коэффициенты этого ряда не стремятся к нулю. Значит, он не может быть рядом Фурье никакой функции из L. Следовательно, $\overline{\psi}$-производной с такими параметрами функция $f(\cdot)$ не имеет. Предложение 11, а с ним и предложение 10 доказаны.

Обратим внимание на тот факт, что равенства (25) показывают, что когда пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ пробегает множество $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то множества L и/или C разбиваются на подмножества (классы) $L^{\overline{\psi}}$ и/или $C^{\overline{\psi}}$. Равенство (26) означает, что при такой классификации остаются неразличимыми только тригонометрические полиномы.

2. Интегральные представления отклонений полиномов, порождаемых линейными процессами суммирования рядов Фурье. Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_0^{(n)} \equiv 1$, — произвольная прямоугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in L$, ряд Фурье которой имеет вид (1), сопоставим последовательность рядов

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} A_k(f; x). \tag{28}$$

Таким образом, каждая матрица Λ задает способ построения выражений $U_n(f; x; \Lambda)$, или, другими словами, задает конкретную последовательность операторов $U_n(\cdot; \Lambda)$, определенных на множестве L. В этом случае также говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье. Понятно, что операторы $U_n(\cdot\,;\Lambda)$ являются линейными. Поэтому Λ-методы называют линейными методами (или процессами) суммирования рядов Фурье.

В случае, когда матрицы Λ являются треугольными, т. е. когда $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k > n$, выражения (28) будут тригонометрическими полиномами порядка n:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} A_k(f;x). \tag{28'}$$

Именно в таком виде представляются полиномы, порождаемые классическими методами Фурье, Фейера, Валле Пуссена, Рогозинского и др. В дальнейшем предполагается, что матрицы Λ таковы, что ряды в (28) являются рядами Фурье функции $U_n(f;x;\Lambda)$, которые, таким образом, должны быть суммируемыми.

Ближайшей целью является получение интегральных представлений величин

$$\delta_n(f;x;\Lambda) = f(x) - U_n(f;x;\Lambda) \tag{29}$$

в случае, когда $f(\cdot)$ является $\overline{\psi}$-интегралом некоторой функции $\varphi \in L$ и, следовательно, в силу (2) их ряды Фурье имеют вид

$$S[\delta_n(f;x;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)A_k(\varphi;x) - \psi_2(k)\tilde{A}_k(\varphi;x)). \tag{30}$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 12. *Пусть ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) \tag{31}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) \tag{31'}$$

являются рядами Фурье. Тогда для каждой функции $\varphi \in L$ почти всюду выполняется равенство

$$\delta_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)K_n(t)\,dt, \tag{32}$$

где $f(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi;\cdot)$ и

$$K_n(t) = K_n(\overline{\psi};\Lambda;t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt). \tag{33}$$

Для доказательства формулы (32) достаточно записать ряд Фурье свертки $\varphi * K_n$ и убедиться, что он в точности совпадает с правой частью (30).

Часто оказывается удобным представлять величину $\delta_n(f;x;\Lambda)$ в другом виде — сверткой, определяющейся интегрированием по всей числовой оси.

Пусть M — множество существенно ограниченных функций из L:

$$M = \{\varphi\colon\ \varphi \in L,\ \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup}|\varphi(\cdot)| < \infty\}. \tag{34}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\tau_1(v)$ *и* $\tau_2(v)$ — *функции, непрерывные при всех* $v \geq 0$ *и их преобразования*

$$\hat{\tau}_{1+}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(v)\cos vt\,dv, \qquad \hat{\tau}_{2-}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(v)\sin vt\,dv \tag{35}$$

абсолютно суммируемы на всей числовой оси $(\hat{\tau}_{1+}, \hat{\tau}_{2-} \in L(R))$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{1+}(t)|dt < \infty; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{2-}(t)|dt < \infty. \tag{36}$$

Тогда для каждой функции $\varphi \in M$ *свертка*

$$(\psi * \hat{\tau})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\hat{\tau}(t)\,dt, \tag{37}$$

в которой

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_{1+}(t) + \hat{\tau}_{2-}(t) \tag{38}$$

и интеграл понимается как предел интегралов по расширяющимся симметричным промежуткам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}, \tag{39}$$

является непрерывной 2π*-периодической функцией:* $\varphi * \tau \in C$ *и*

$$S[\varphi * \hat{\tau}] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tau_1(k)A_k(\varphi; x) + \tau_2(k)\tilde{A}_k(\varphi; x)\right), \tag{40}$$

где $A_k(\varphi; x) = a_k(\varphi)\cos kx + b_k(\varphi)\sin kx$, $\tilde{A}_k(\varphi; x) = U A_k(\varphi; x)$, $a_k(\varphi)$ *и* $b_k(\varphi)$ — *коэффициенты Фурье функции* $\varphi(\cdot)$.

Доказательство. Включение $\varphi * \hat{\tau} \in C$ есть простое следствие того факта, что $\varphi \in M$, и соотношений (36), вследствие которых $\hat{\tau} \in L(R')$. Поэтому остается показать справедливость (40). С этой целью вычислим коэффициенты Фурье α_k и β_k функции (37). Произведение $\varphi(x-t)\hat{\tau}(t)$ абсолютно интегрируемо в полосе $x \in [-\pi, \pi]$; $t \in R^1$. Поэтому, используя теорему Фубини об изменении порядка интегрирования, имеем

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos kx\,dx\,dt =$$

$$= a_k\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\cos kt\,dt - b_k\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\sin kt\,dt, \tag{41}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\sin kx\,dx\,dt =$$

$$= a_k\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\sin kt\,dt + b_k\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\cos kt\,dt. \tag{41'}$$

Далее воспользуемся следующим фактом из теории интегралов Фурье.

Предложение 13. *Пусть* $\gamma(v)$ — *функция, непрерывная при всех* $v \geq 0$, *и ее преобразования*

$$\hat{\gamma}_+(t) = \int_0^\infty \gamma(v)\cos vt\,dv, \qquad \hat{\gamma}_-(t) = \int_0^\infty \gamma(v)\sin vt\,dv$$

абсолютно суммируемы на R^1. *Тогда в каждой точке* $v \in [0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_+(t)\cos vt\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_-(t)\sin vt\,dt = \gamma(v) \tag{42}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_+(t)\sin vt\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}_-(t)\cos vt\,dt = 0. \tag{42$'$}$$

Это утверждение в теории приближений использовали Б. Надь [8], С. А. Теляковский [9] и др.

С учетом равенств (38), (42) и (42$'$) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\cos kt\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\tau}_{1+}(t) + \hat{\tau}_{2-}(t))\cos kt\,dt = \tau_1(k), \tag{43}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(t)\sin kt\,dt = \tau_2(k). \tag{43$'$}$$

Поэтому, возвращаясь к соотношениям (41) и (41$'$), находим

$$\alpha_k = a_k\tau_1(k) - b_k\tau_2(k), \qquad \beta_k = a_k\tau_2(k) + b_k\tau_1(k).$$

Следовательно,

$$S[\varphi * \hat{\tau}] = \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k\tau_1(k) - b_k\tau_2(k))\cos kx + (a_k\tau_2(k) + b_k\tau_1(k))\sin kx) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_1(k)A_k(\varphi; x) + \tau_2(k)\tilde{A}_k(\varphi; x)). \tag{44}$$

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем будем считать, что системы чисел $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$, $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, являются сужениями на множестве натуральных чисел некоторых непрерывных функций $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ и $\lambda_n(v)$ непрерывного аргумента v.

Полагая в лемме 1 $\tau_1(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi_1(v)$ и $\tau_2(v) = (1 - \lambda_n'(v))\psi_2(v)$, $\lambda_n(k) = \lambda_n'(k) = \lambda_k^{(n)}$, получаем такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции*

$$\tau_1(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi_1(v) \quad \text{и} \quad \tau_2(v) = (1 - \lambda_n'(v))\psi_2(v), \tag{45}$$
$$\lambda_n(k) = \lambda_n'(k) = \lambda_k^{(n)}$$

удовлетворяют всем требованиям леммы 1. *Тогда если функция* $f(\cdot)$ *является* $\overline{\psi}$*-интегралом* ($\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$) *некоторой функции* $\varphi \in M$, *то интеграл*

$$\Phi_n(f; \hat{\tau}_n; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t)\hat{\tau}_n(t)\,dt, \tag{46}$$

в котором

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ((1-\lambda_n(v))\psi_1(v)\cos vt + (1-\lambda_n'(v))\psi_2(v)\sin vt)\,dv, \tag{47}$$

является непрерывной 2π-периодической функцией и при этом

$$S[\Phi_n(f;\hat{\tau}_n;x)] = \sum_{k=1}^\infty (1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)A_k(\varphi;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(\varphi;x)) =$$
$$= S[\delta_n(f;x;\Lambda)]. \tag{48}$$

Рассмотрим теперь свертку (37) в случае, когда $\varphi \in L$. Ясно, что в таком случае условия (36) уже не обеспечивают даже существования интегралов (37). Поэтому функцию $\hat{\tau}(t)$ подчиним кроме условий (36) следующему дополнительному условию: функция

$$\hat{\tau}^*(t) = \begin{cases} \sup\limits_{x\ge t}|\hat{\tau}(x)|, & t>0; \\ \sup\limits_{x\le t}|\hat{\tau}(x)|, & t<0, \end{cases} \tag{49}$$

является интегрируемой на множестве $|t|>A$, где A — некоторое положительное число ($\hat{\tau}^* \in L(|t|>A)$).

При таких предположениях, повторяя рассуждения из [3, с. 54, 55], придем к выводу, что для каждого $\varphi \in L$ свертка (37) определяет функцию из L, для которой справедливо равенство (40) и, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть функции $\tau_1(v)$ и $\tau_2(v)$ из* (45) *удовлетворяют всем требованиям леммы* 1 *и, кроме того, функция $\hat{\tau}_n^*(t)$, построенная для функции* (47) *по правилу* (49), *принадлежит $L(|t|>A)$. Тогда для каждой функции $f(\cdot)$, являющейся $\overline{\psi}$-интегралом некоторой функции φ из L, функция* (46) *принадлежит L и выполняется равенство* (48).

Если $f\in L^{\overline{\psi}}M$ и выполнены условия теоремы 1, то для каждого $n\in N$ функции $\Phi_n(f;\tau_n;x)$ принадлежат C. Поэтому левая часть в (48) — ряд Фурье непрерывной функции. Следовательно, если $f(\cdot)$ и $U_n(f;x;\Lambda)$ также непрерывны, то из (48) заключаем, что в каждой точке $x\in R^1$ справедливо равенство

$$f(x) - U_n(f;x;\Lambda) = \int_{-\infty}^\infty f^{\overline{\psi}}(x-t)\hat{\tau}_n(t)\,dt. \tag{50}$$

Поэтому, полагая $C^{\overline{\psi}}M = L^{\overline{\psi}}M\bigcap C$, из теоремы 1 выводим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f\in C^{\overline{\psi}}M$ и функции $\tau_i(\cdot)$, $i=1,2$, определяющиеся равенствами* (45), *удовлетворяют всем требованиям леммы* 1. *Тогда в каждой точке $x\in R^1$ справедливо равенство* (50) *при условии, что $U_n(f;\cdot;\Lambda)\in C$ (которое всегда выполняется, если Λ — треугольная матрица)*.

Из теоремы 1′ получаем такое следствие.

Теорема 2′. *Пусть $f\in L^{\overline{\psi}}$ и $\hat{\tau}_i^*(\cdot)$ удовлетворяют всем требованиям теоремы* 1′. *Тогда равенство* (50) *справедливо почти всюду на R^1.*

Отметим, что в случае, когда пары $\overline{\psi} = (\psi_1,\psi_2)$ определяют (ψ,β)-производные ($\beta = \text{const}$), утверждения теорем $1-2'$ получены автором ранее (см., например, [3], § 2, 3); в случае, когда еще и $\psi(k) = k^{-r}$, $r>0$, равенство (50) установлено Надем [8] (при $\beta = r$) и С. А. Теляковским [9] (при $\beta \in R^1$).

3. Представление отклонений сумм Фурье на множествах $C^{\overline{\Psi}}M$ и $L^{\overline{\Psi}}$. Сначала заметим, что для справедливости представления (50) для заданной последовательности $U_n(f; x; \Lambda)$ при выборе функций $\tau_1(v)$ и $\tau_2(v)$ в соотношении (45) важным есть только то, что они непрерывны при $v \geq 0$ и их преобразования (35) принадлежат $L(R)$ (и $\hat{\tau}_n^* \in L(|t| > A)$ в случае $f \in L^{\overline{\Psi}}$). Ясно, что такие функции не единственны. Это обстоятельство можно использовать и подбирать $\tau_1(v)$ и $\tau_2(v)$ так, чтобы было удобнее исследовать правую часть (60). В частности, чтобы получить интегральное представление отклонений сумм Фурье

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

от $f \in C^{\overline{\Psi}}M$, достаточно в качестве $\tau_1(v)$ и $\tau_2(v)$ взять любые непрерывные функции $\tau_1(v)$ и $\tau_2(v)$, удовлетворяющие (36) и такие, что

$$\tau_i^{(1)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n; \\ \psi_i(k), & k \geq n, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{51}$$

Руководствуясь этими соображениями, получим интегральные представления величин

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x), \tag{52}$$

когда $f \in C^{\overline{\Psi}}M$ и $f \in L^{\overline{\Psi}}$, а пары $\overline{\Psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таковы, что $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ (или $-\psi_1 \in \mathfrak{M}$), а $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ (или $-\psi_2 \in \mathfrak{M}$) и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty. \tag{53}$$

Сразу же отметим, что несимметричность условий для функций ψ_1 и ψ_2 в последующих рассуждениях по существу связана с тем, что условие (53), как хорошо известно, при $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ является необходимым (и, разумеется, достаточным) для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \sin kt$ был рядом Фурье, в то время как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) \cos kt$ является рядом Фурье при $\psi_1 \in \mathfrak{M}$.

В дальнейшем через $\mathfrak{M}$ будем обозначать множество функций $\psi(\cdot)$, для которых функции $|\psi(v)|$ являются выпуклыми при всех $v \geq 1$ и

$$\lim_{v \to \infty} \psi(v) = 0, \tag{54}$$

а через $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, подчиненных еще условию

$$\int_1^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t} dt < \infty. \tag{55}$$

Ясно, что если $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то значения $\psi_2(k)$ удовлетворяют соотношению (53).

Приведем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}$, n *— любое натуральное число,* $c \in \in [0, n)$ *и*

$$\tau_i(c\,;v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c; \\ \dfrac{v-c}{n-c}\psi_i(n), & c \le v \le n; \\ \psi_i(v), & v \ge n, \ i = 1, 2. \end{cases} \tag{56}$$

Тогда преобразования

$$\hat{\tau}_{1+}(c;t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(c;v)\cos vt\,dv \quad \text{и} \quad \hat{\tau}_{2-}(c;t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(c;v)\sin vt\,dv \tag{57}$$

абсолютно интегрируемы на R^1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{1+}(c;t)|dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{2-}(c;t)|dt < \infty. \tag{58}$$

Кроме того, функции $\hat{\tau}^*_{1+}(c;t)$ *и* $\hat{\tau}^*_{2-}(c;t)$, *построенные по правилу* (49), *принадлежат* $L(|t| > A)$.

Эта лемма фактически доказана в [3]. Второе из соотношений (58) — результат леммы 4.1 из [3, с. 58] при $\beta = 1$, первое — утверждение леммы 5.1 из [3, с. 64]. Включение $\hat{\tau}^*_{1+} \in L(|t| > A)$ вытекает из соотношения (5.11) в [3, с. 65], согласно которому

$$\hat{\tau}^*_{1+}(c;t) = O(1)t^{-2}, \tag{59}$$

а включение $\hat{\tau}^*_{1+} \in L(|t| > A)$ — из соотношения (4.23) в [3, с. 60] при $\beta = 1$, в силу которого также

$$\hat{\tau}^*_{2-}(c;t) = O(1)t^{-2}. \tag{59$'$}$$

В (59) и (59′) $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по t.

Положим в лемме 2 $c = n-1$. Тогда согласно (56)

$$\tau_i(n-1, v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le n-1; \\ (v-n+1)\psi_i(n), & n-1 \le v \le n; \\ \psi_i(v), & v \ge n, \ i = 1, 2, \end{cases} \tag{60}$$

и поэтому

$$\tau_i(n-1, k) = \begin{cases} 0, & k < n; \\ \psi_i(k), & k \ge n, \ i = 1, 2. \end{cases} \tag{60$'$}$$

Таким образом, выполняется условие (51) и, следовательно, левая часть (50) — величина $\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x)$. Поэтому на основании теорем 2 и 2′ с учетом леммы 2 приходим к такому утверждению.

Теорема 3. *Если* $f \in C^{\overline{\psi}}M$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *то в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t)\hat{\tau}_n(t)\,dt, \tag{61}$$

в котором

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\tau_1(n-1,v)\cos vt + \tau_2(n-1,v)\sin vt\right)dv, \tag{62}$$

и $\tau_i(n-1, v)$, $i = 1, 2$, *определяются формулой* (60).

Если же $f \in L^{\overline{\psi}}$ и, по-прежнему, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то равенство (61) *выполняется почти всюду.*

Утверждение этой теоремы в случаях, когда $f \in C^{\psi}_{\beta}M$ и $f \in L^{\psi}_{\beta}$, доказано автором ранее (см., например, [3, с. 61, 65]).

Пусть $\mathcal{F}_n$ — множество тригонометрических полиномов порядка $\le n$. Если $\tau_{n-1}(\cdot) \in \mathcal{F}_{n-1}$, то, учитывая равенства (60′) и (40), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{n-1}(x-t)\hat{\tau}_n(t)\,dt = 0. \tag{63}$$

Поэтому равенство (61) может быть записано в виде

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt, \tag{64}$$

где $\tau_{n-1}(\cdot)$ — любая функция из $\mathcal{F}_{n-1}$. В частности, справедливо равенство

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt. \tag{64′}$$

В силу (60)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau_1(n-1,v)\cos vt\,dv = \frac{\psi_1(n)}{\pi}\int_{n-1}^{n} (v-n-1)\cos vt\,dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_n^{\infty} \psi_1(v)\cos vt\,dv \overset{\text{df}}{=} \mathcal{J}_1(n,t)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_1,n,t)_0. \tag{65}$$

Вычисляя первый из интегралов, находим

$$\mathcal{J}_1(n,t)_0 = \frac{\psi_1(n)}{\pi}\left(\frac{t-\sin t}{t^2}\sin nt + \frac{1-\cos t}{t^2}\cos nt\right). \tag{66}$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau_2(n-1,v)\sin vt\,dv = \mathcal{J}_1(n,t)_1 + \mathcal{J}_2(\psi_2,n,t)_1, \tag{67}$$

где

$$\mathcal{J}_1(n,t)_1 = \frac{\psi_2(n)}{\pi}\left(-\frac{t-\sin t}{t^2}\cos nt + \frac{1-\cos t}{t^2}\sin nt\right) \tag{68}$$

и

$$\mathcal{J}_2(\psi_2,n,t)_1 = \frac{1}{\pi}\int_n^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\,dv. \tag{69}$$

Теперь воспользуемся леммой 1.1 из [3, с. 43], в силу которой для каждой $\varphi \in L$ выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\frac{t-\sin t}{t^2}\,dt = 0, \tag{70}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt, \tag{71}$$

где интегралы понимаются в смысле их главных значений, т. е. как в (39). Поэтому, учитывая равенства (66), (68), (70) и (71), для каждой $\varphi \in L$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathcal{J}_1(n,t)_0\,dt = \frac{\psi_1(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt, \tag{72}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathcal{J}_1(n,t)_1\,dt = \frac{\psi_2(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt. \tag{73}$$

В частности, если при каждом x положим $\varphi(t) = f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)$, то из (72) и (73) найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t))(\mathcal{J}_1(n,t)_0 + \mathcal{J}_1(n,t)_1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t))(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\,dt. \tag{74}$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x))(\mathcal{J}_1(n,t)_0 + \mathcal{J}_1(n,t)_1)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x))(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\,dt. \tag{74'}$$

Объединяя утверждения теоремы 3 и равенства (64), (64′), а также (65), (67), (74) и (74′) и полагая

$$\delta_n(u) = \delta_n(f^{\overline{\psi}}; t_{n-1}, x) = f^{\overline{\psi}}(u) - t_{n-1}(u), \tag{75}$$

$$\delta_0(u) = \delta_0(f^{\psi}; u) = f^{\psi}(u) - f^{\psi}(u+t), \quad t \in R^1, \tag{75'}$$

приходим к такому факту.

Следствие 1. *Если $f \in C^{\overline{\psi}}M$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то в каждой точке $x \in R^1$ выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x-t)(\mathcal{J}_2(\psi_1;n;t)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_2;n;t)_1)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x-t)(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\,dt, \tag{76}$$

где $\Delta(u)$ есть либо $f^{\overline{\psi}}(u)$, либо $\delta_n(u)$ из (75), либо $\delta_0(u)$ из (75′),

$$\mathcal{J}_2(\psi_1;n;t)_0 = \frac{1}{\pi}\int_{n}^{\infty} \psi_1(v)\cos vt\,dv \tag{77}$$

$$\mathcal{J}_2(\psi_2;n;t)_1 = \frac{1}{\pi}\int_{n}^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\,dv. \tag{77'}$$

Если же $f \in L^{\overline{\psi}}$ и, по-прежнему, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то равенство (76) выполняется почти всюду.

4. Поведение величин $\rho_n(f;x)$ на подмножествах из $C^{\overline{\Psi}}M$. В этом пункте на основании утверждения следствия 1 находятся асимптотические равенства для величин

$$\mathscr{E}_n(F) = \sup_{f \in F} |\rho_n(f;x)|, \tag{78}$$

когда $f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ есть либо единичный шар S_M в пространстве M, $S_M = \{\varphi\colon \|\varphi\|_M \le 1\}$, либо класс H_ω функции $\varphi(\cdot)$ из C, удовлетворяющих для любых x и t условию

$$|\varphi(x) - \varphi(x+t)| \le \omega(|t|), \tag{79}$$

где $\omega(\cdot)$ — заданный модуль непрерывности.

Находится также для множеств $C^{\overline{\Psi}}C$ аналог известного неравенства Лебега с точной константой при главном члене:

$$\forall f \in C \quad \|\rho_n(f;x)\| \le \frac{4}{\pi^2}(\ln n + K)E_n(f)_C, \quad \|\varphi\|_C = \max_x |\varphi(x)|, \tag{80}$$

где K — определенная постоянная, а $E_n(f)_C$ — величина наилучшего приближения функции $f(\cdot)$ функциями из $\mathcal{F}_n$ в пространстве C:

$$E_n(f)_C = \inf_{t_n \in \mathcal{F}_n} \|f(\cdot) - t_n(\cdot)\|_C. \tag{81}$$

Прежде всего заметим, что поскольку для любой константы K $\rho_n(K;x) \equiv 0$, то в названных задачах вместо множеств $\mathfrak{N}$ достаточно брать множества $\mathfrak{N}^0$ функций $\varphi \in \mathfrak{N}$, ортогональных константе, т. е. вместо S_M — множество S_M^0, вместо H_ω — класс H_ω^0, вместо C — множество C^0. Но тогда согласно предложению 5 справедливы равенства

$$C^{\overline{\Psi}}S_M^0 = C_\beta^\psi S_M^0, \quad C^{\overline{\Psi}}H_\omega^0 = C_\beta^\psi C^0, \quad C^{\overline{\Psi}}C^0 = C_\beta^\psi C^0 \tag{82}$$

каждый раз, когда

$$\frac{\psi_2(k)}{\psi_1(k)} = \mathrm{const}\left(= \mathrm{tg}\,\beta\frac{\pi}{2}\right). \tag{83}$$

Таким образом, если выполнено (83), то соответствующие классы $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}^0$ совпадают с классами $C_\beta^\psi\mathfrak{N}^0$. Для классов $C_\beta^\psi\mathfrak{N}^0$ перечисленные задачи рассматривались ранее и их решения содержатся в работах [1–4]. Поэтому по существу остается рассмотреть случай, когда условие (83) не выполняется.

Заметим также, что, как следует из определения 1, каждая функция $f \in L^{\overline{\Psi}}L^0$ представима в виде $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$, где $f_1 \in L_0^{\psi_1}$ и $f_2 \in L_1^{\psi_2}$, и так как для любых $f_1, f_2 \in L$ $\rho_n(f_1 + f_2;x) = \rho_n(f_1;x) + \rho_n(f_2;x)$, то для любой функции $f \in L^{\overline{\Psi}}L^0$ справедливо неравенство

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \|\rho_n(f_1;x)\|_C + \|\rho_n(f_2;x)\|_C, \tag{84}$$

в котором $f_1(\cdot) = \mathcal{J}_0^{\psi_1}(f^{\overline{\Psi}};\cdot)$ и $f_2(\cdot) = \mathcal{J}_1^{\psi_2}(f^{\overline{\Psi}};x)$, где через $\mathcal{J}_\beta^\psi(\varphi;\cdot)$ обозначен оператор $\mathcal{J}^{\overline{\Psi}}(\varphi;\cdot)$ в случае, когда $\psi_1(k) = \psi(k)\cos(\beta\pi/2)$ и $\psi_2(k) = \psi(k)\sin(\beta\pi/2)$. Используя известную информацию о каждом слагаемом правой части (84) и руководствуясь этими неравенствами, можно получить оценку сверху величин $\|\rho_n(t;x)\|_C$ и в общем виде. Однако полученная таким путем оценка, хоть и будет точной по порядку, но не будет точной в смысле констант у главных членов выражений для этих величин и, следовательно, не даст решения поставленных задач.

Здесь рассматривается случай, когда $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ принадлежат $\mathfrak{M}$. Будем пользоваться следующим утверждением, которое по существу является перефразировкой теоремы 2 из [1] и леммы 1 из [4].

Лемма 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in R$ *и* $\alpha = \alpha(n)$ *— произвольная последовательность действительных чисел, для которой* $n\alpha(n) \geq \alpha_0 > 0$. *Тогда если* $\varphi \in S_M^0$, *то для любого* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\delta_n(\varphi;x;\psi;\beta) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\ =$$

$$=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}\varphi(x-t)\frac{\sin(nt-\beta\pi/2)}{t}\,dt\ +\ b_n^{\psi}(a;\varphi;x), \tag{85}$$

причем

$$|b_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)| \leq O(1)(|\psi(n)|+Q_n^{\psi}(\alpha)). \tag{86}$$

Если $\varphi \in H_\omega^0$, *то для любого* $n \in N$, *в каждой точке* x

$$\delta_n(\varphi;x;\psi;\beta) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\int\limits_{n}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\ =$$

$$=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin(nt-\beta\pi/2)}{t}\,dt\ +\ d_n^{\psi}(a;\varphi;x), \tag{85$'$}$$

причем

$$|d_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)| \leq O(1)(|\psi(n)|+Q_n^{\psi}(\alpha))\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{86$'$}$$

Если же $\varphi \in C^0$, *то для любого полинома* $t_{n-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_{n-1}$, *при любом* $n \in$ $\in N$ *в каждой точке* x

$$\delta_n(\varphi;x;\psi;\beta) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}r_n(x-t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}r_n(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\ =$$

$$=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}r_n(x-t)\frac{\sin(nt-\beta\pi/2)}{t}\,dt\ +\ g_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x), \tag{85$''$}$$

где

$$r_n(v) = \varphi(v)-t_{n-1}(v), \tag{87}$$

$$\|g_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)\|_C \leq O(1)(|\psi(n)|+Q_n^{\psi}(\alpha))\,\|r_n\|_C, \tag{86$''$}$$

$$Q_n^{\psi}(\alpha) = \left| \int\limits_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t}\,dt + \int\limits_{\alpha(n)}^{\infty} t^{-1}(\psi(n) - \psi(n+t^{-1}))\,dt \right|, \qquad (88)$$

$O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n.

Сопоставляя величины $\rho_n(f;x)$ из (76) и $\delta_n(\varphi;x;\psi;\beta)$, видим, что для каждой $f \in C^{\overline{\Psi}}M$ при любом $n \in N$ в каждой точке x

$$\rho_n(f;x) = \delta_n(f^{\overline{\Psi}};x;\psi_1,0) + \delta_n(f^{\overline{\Psi}};x;\psi_2,1). \qquad (89)$$

Поэтому из леммы 3 получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $\alpha = \alpha(n)$ *и* $\alpha' = \alpha'(n)$ — *две произвольные последовательности действительных чисел, для которых* $n\,\alpha(n) \geq \alpha_0 > 0$ *и* $n\alpha'(n) \geq \alpha'_0 > 0$. *Тогда если* $f \in C_{\beta}^{\overline{\Psi}} \overset{\mathrm{df}}{=} C^{\Psi}S_M^0$, *то для любого* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha(n)} f^{\overline{\Psi}}(x-t)\frac{\sin nt}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha'(n)} f^{\overline{\Psi}}(x-t)\frac{\cos nt}{t}\,dt + b_n^{\psi_1}(\alpha;f^{\overline{\Psi}};x) + b_n^{\psi_2}(\alpha';f^{\overline{\Psi}};x), \qquad (90)$$

причем

$$\begin{aligned} \|b_n^{\psi_1}(\alpha;f^{\overline{\Psi}};x)\|_C &\leq O(1)(|\psi_1(n)| + Q_n^{\psi_1}(\alpha)), \\ \|b_n^{\psi_2}(\alpha';f^{\overline{\Psi}};x)\|_C &\leq O(1)(|\psi_2(n)| + Q_n^{\psi_2}(\alpha')). \end{aligned} \qquad (91)$$

Если $f \in C^{\overline{\Psi}}H_{\omega}^0$, *то для любого* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha(n)} (f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x))\frac{\sin nt}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha'(n)} (f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x))\frac{\cos nt}{t}\,dt +$$

$$+ d_n^{\psi_1}(\alpha;f^{\overline{\Psi}};x) + d_n^{\psi_2}(\alpha';f^{\overline{\Psi}};x), \qquad (90')$$

причем

$$\begin{aligned} \|d_n^{\psi_1}(\alpha;f^{\overline{\Psi}};x)\|_C &\leq O(1)(|\psi_1(n)| + Q_n^{\psi_1}(\alpha))\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \\ \|d_n^{\psi_2}(\alpha';f^{\overline{\Psi}};x)\|_C &\leq O(1)(|\psi_2(n)| + Q_n^{\psi_2}(\alpha'))\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \qquad (91')$$

Если же $f \in C^{\overline{\Psi}}C^0$, *то для любого полинома* $t_{n-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_{n-1}$ *при любом* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha(n)} \delta_n(x-t)\frac{\sin nt}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\alpha'(n)} \delta_n(x-t)\frac{\cos nt}{t}\,dt + g_n^{\psi_1}(\alpha;f^{\overline{\Psi}};x) + g_n^{\psi_2}(\alpha';f^{\overline{\Psi}};x), \qquad (90'')$$

где $\delta_n(v) = f^{\overline{\Psi}}(n) - t_{n-1}(n)$ *и*

$$
\begin{aligned}
&\|g_n^{\psi_1}(\alpha; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C \le O(1)(|\psi_1(n)| + Q_n^{\psi_1}(\alpha))\|\delta_n\|_C, \\
&\|g_n^{\psi_2}(\alpha'; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C \le O(1)(|\psi_2(n)| + Q_n^{\psi_2}(\alpha'))\|\delta_n\|_C.
\end{aligned} \tag{91''}
$$

Величины $Q_n^{\psi}(\cdot)$ *определяются равенством* (88), *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n.

Аппроксимационные характеристики множеств $\overline{\psi}$-интегралов явным образом выражаются через компоненты $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, а также через специальную функцию $\eta(t) = \eta(\psi; t)$, которая для данной функции $\psi \in \mathfrak{M}$ определяется равенством

$$
\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad t \ge 1. \tag{92}
$$

Важной является и следующая характеристика функций $\psi \in \mathfrak{M}$, которая задается формулой

$$
\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \ge 1. \tag{93}
$$

На промежутке $[t, \eta(t)]$ в силу (92) функция $|\psi(t)|$ уменьшается ровно в два раза, поэтому величина $\mu(t)$ в [3] была названа модулем полураспада функции $\psi(\cdot)$.

Оказывается, что величины $\eta(t)$ и $\mu(t)$ достаточно полно аккумулируют информацию о функциях $\psi \in \mathfrak{M}$ и, в частности, о тех свойствах, которые определяют порядок приближений элементов $L^{\overline{\psi}}$.

Для дальнейшего, используя величину (93), из множества $\mathfrak{M}$ выделим три подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$. Эти подмножества часто встречаются в работах автора и его последователей, однако, ради удобства приведем их определения. Ко множеству $\mathfrak{M}_c$ относятся все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых можно найти такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$), что

$$
0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 < \infty; \tag{94}
$$

ко множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, для которых $0 < \mu(\psi; t) \le \le \text{const} < \infty$. Так как $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_c$, то полагаем $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_c$. Через $\mathfrak{M}_\infty$ обозначается подмножество функций ψ из $\mathfrak{M}$, для которых $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно и неограниченно возрастает

$$
\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{95}
$$

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_c$ являются функции $\psi(z) = t^{-r}$, $r > 0$, $t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t + e)$, $\varepsilon \in R^1$, и др., множества $\mathfrak{M}'_0$ — функции $\ln^{\varepsilon}(t + e)$ при $\varepsilon < 0$. Множеству $\mathfrak{M}_\infty$ принадлежат функции $\exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

Для функций $\psi \in \mathfrak{M}_X$, где X обозначает либо c, либо 0, либо ∞, установлен целый ряд фактов (см., например, [3], §3.5). Нужные из этих фактов будем приводить по мере их использования, а прежде всего, отметим следующие.

Предложение 14. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} = \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty$, *то* $\psi \in \mathfrak{M}'$, *т. е.* $\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset \subset \mathfrak{M}'$.

Предложение 15. *Пусть* F — *подмножество функций* $\psi \in \mathfrak{M}$, *для которых*

$$\eta'(t) = \eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \leq \text{const}, \quad t \geq 1, \tag{96}$$

$$\eta'(t) \overset{\text{df}}{=} \eta'(t+0). \tag{97}$$

Тогда для любой $\psi \in F$ *найдется постоянная* K *такая, что при всех* $t \geq 1$

$$\mu(\psi; t) \geq K > 0, \tag{98}$$

и, кроме того, справедливо включение

$$\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset F \subset \mathfrak{M}'. \tag{99}$$

Включение $\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset \mathfrak{M}'$ доказано в [3, с. 95]; включение $F \subset \mathfrak{M}'$ — в [10, с. 112]; включение $\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset F$ — в [11, с. 215].

Дальнейшие результаты будут получены на основании равенств (90), (90′) и (90″) при условии, что $\psi_1, \psi_2 \in F$, следовательно, согласно (99) и для функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, принадлежащих $\mathfrak{M}_{c,\infty}$.

Итак, предположим, что ψ_1 и ψ_2 принадлежат F и, кроме того, предположим сначала, что найдутся постоянные K_1 и K_2 такие, что

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(\psi_1; n) - n}{\eta(\psi_2; n) - n} \leq K_2 < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{100}$$

Возьмем в утверждении следствия 2 в качестве $\alpha(n)$ и $\alpha'(n)$ величины

$$\alpha = \alpha(n) = \left(\eta(\psi_1; n) - n\right)^{-1},$$

$$\alpha' = \alpha'(n) = \left(\eta(\psi_2; n) - n\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{101}$$

Согласно (98) эти последовательности удовлетворяют требованиям следствия 2. В [1, с. 134] показано, что

$$Q_n^{\psi}(\gamma) \leq K|\psi(n)| \quad \forall \psi \in F,$$

$$\gamma = \gamma(n) = \left(\eta(\psi; n) - n\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots , \tag{102}$$

где $Q_n^{\psi}(\gamma)$ — величина, определяющаяся равенством (88), а K — некоторая постоянная. Учитывая эти факты и неравенства (91), для каждой $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ находим

$$\|b_n^{\psi_1}(\alpha; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C + \|b_n^{\psi_2}(\alpha'; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C \leq O(1)\,\overline{\psi}(n),$$

$$\overline{\psi}^2(n) = \psi_1^2(n) + \psi_2^2(n). \tag{103}$$

Аналогично в силу (91′) и (102) для каждой $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega^0$

$$\|d_n^{\psi_1}(\alpha; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C + \|d_n^{\psi_2}(\alpha'; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C \leq O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{104}$$

и в силу (91″) для каждой $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$

$$\|g_n^{\psi_1}(\alpha; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C + \|g_n^{\psi_2}(\alpha'; f^{\overline{\psi}}; x)\|_C \leq O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\|\delta_n\|_C . \tag{105}$$

В этих соотношениях $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n.

Далее заметим, что вследствие условия (100) и равенств (101)

$$\left|\int\limits_{\alpha(n)}^{\alpha'(n)} \frac{dt}{t}\right| = \left|\ln \frac{\alpha(n)}{\alpha'(n)}\right| = O(1). \tag{106}$$

Это позволяет заменить интегралы в равенствах (90), (90′) и (90″) на интегралы, которые берутся по одинаковым промежуткам $|t| \geq \alpha(n)$ или $|t| \geq \alpha'(n)$. Погрешности при таких заменах не будут превышать величин остаточных членов, т. е. соответствующих правых частей неравенств (103) – (105).

Поэтому согласно следствию 2 справедливо такое утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (100). *Тогда если* $f \in C_\infty^{\overline{\Psi}}$, *то при любом* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f; x) = \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + O(1)\overline{\Psi}(n), \tag{107}$$

если $f \in C^{\overline{\Psi}} H_\omega^0$, *то при любом* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f; x) = \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} (f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x)) \frac{\sin(nt + \gamma_n)}{t} dt + $$

$$+ O(1)\overline{\Psi}(n)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{108}$$

Если же $f \in C^{\overline{\Psi}} C^0$, *то для каждого* $n \in N$ *при любом* $t_{n-1}(\cdot) \in \mathcal{F}_{n-1}$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f; x) = \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} (f^{\overline{\Psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + $$

$$+ O(1)\overline{\Psi}(n) \| f^{\overline{\Psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_C. \tag{109}$$

В равенствах (107) – (109)

$$\overline{\Psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}, \quad \alpha(n) = (\eta(\psi_1; n) - n)^{-1},$$
$$\gamma_n = \operatorname{arctg} \frac{\psi_1(n)}{\psi_2(n)} \tag{110}$$

и $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n. *В равенствах* (107) – (109) *вместо* $\alpha(n)$ *можно использовать величину* $\alpha'(n) = (\eta(\psi_2; n) - n)^{-1}$.

Переходя непосредственно к нахождению асимптотических равенств для величин (78), заметим, что классы $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ инвариантны относительно сдвига аргумента: если $f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$, то при любом $h \in R^1$ функция $f_1(x) = f(x+h)$ также принадлежит $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}) = \sup\{|\rho_n(f; x)| : f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\} =$$
$$= \sup\{|\rho_n(f; 0)| : f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\}, \tag{111}$$

т. е. величина $\mathcal{E}_n(C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N})$ не зависит от значения x. Учитывая это замечание, вследствие равенства (107) имеем

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}}) = \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \left(\sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt \right| + O(1) \right). \tag{112}$$

Аналогично в силу равенств (108) и (111) получаем

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\Psi}} H_\omega^0) =$$

$$= \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \left(\sup_{\varphi \in H_\omega^0} \left| \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt \right| + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \right). \tag{113}$$

Величины верхних граней в (112) и (113) найдены в [1, с. 126, 130]:

$$\sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt \right| = \frac{4}{\pi} \ln^+ \frac{\pi}{\alpha(n)} + O(1), \tag{114}$$

где $\ln^+ t = \max(\ln t, 0)$,

$$\sup_{\varphi \in H_\omega^0} \left| \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} S_n(\omega) \ln^+ \frac{\pi}{\alpha(n)} + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{115}$$

$$S_n(\omega) = \Theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt, \quad \frac{2}{3} \leq \Theta_\omega \leq 1, \tag{116}$$

причем $\Theta_\omega = 1$, если $\omega = \omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Объединяя равенства (107) и (108), а также (112) – (116), получаем такое утверждение.

Теорема 4. *Если* $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (100), *то величины*

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup\{ |\rho_n(t; x)| : f \in C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} \}, \quad \mathfrak{N} = M^0 \cup H_\omega^0,$$

не зависят от значения x и при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi^2} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n), \tag{117}$$

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0) = \frac{2\overline{\psi}(n)}{\pi^2} S_n(\omega) \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{118}$$

в которых $\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1; n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, *либо* $\eta(\psi_2; n) = \psi_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$, $S_n(\omega)$ *— величина, определяющаяся соотношением* (116), *и* $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные по* n.

Теперь получим аналоги равенств (117) и (118), когда, по-прежнему, ψ_1, $\psi_2 \in F$, а вместо (100) выполняется условие: найдется такое $\varepsilon > 0$, что при всех $t \geq t_0 \geq 1$ либо

$$\frac{\eta(\psi_1; t) - t}{\eta(\psi_2; t) - t} \geq 2(K_1 + \varepsilon), \tag{119}$$

либо

$$\frac{\eta(\psi_2; t) - t}{\eta(\psi_1; t) - t} \geq 2(K_2 + \varepsilon), \tag{119'}$$

где K_i, $i = 1, 2$, — любые постоянные, для которых при любом $t \geq 1$ справедлива оценка $\eta'(\psi_i; t) \leq K_i$. (Ясно, что это условие и условие (100) не исключают друг друга и могут выполняться одновременно.)

Сделаем одно общее замечание. Если $\psi(\cdot)$ — любая функция из $\mathfrak{M}$, то, как уже отмечалось, на промежутке $[t, \eta(t)]$ она уменьшается ровно в два раза. Поэтому

$$|\psi'(\eta(t))|(\eta(t)-t) \le \frac{|\psi(t)|}{2} =$$

$$= \int_t^{\eta(t)} |\psi'(\tau)|\, d\tau \le |\psi'(t)|(\eta(t)-t). \tag{120}$$

Если, к тому же, $\psi \in F$, то в силу (96) найдется постоянная K такая, что при всех $t \ge 1$ $\eta'(t) \le K$. Значит,

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \le K < \infty \tag{121}$$

или $|\psi'(t)| \le 2K|\psi'(\eta(t))|$. Следовательно, в силу (120) для каждой $\varphi \in F$ в каждой точке $t \ge 1$

$$\frac{|\psi'(t)|}{K}(\eta(t)-t) \le |\psi(t)| \le 2|\psi'(t)|(\eta(t)-t)$$

или

$$\frac{1}{2}(\eta(t)-t)^{-1} \le -\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \le K(\eta(t)-t)^{-1}. \tag{122}$$

Проинтегрировав это соотношение по промежутку (t_0, t), где t_0 — любое число, $t_0 \ge 1$, найдем

$$-K\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau)-\tau} \le \ln\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)} \le -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau)-\tau}.$$

Отсюда приходим к такому утверждению.

Предложение 16. *Если $\psi \in F$, то для любого $t_0 \ge 1$ справедливо соотношение*

$$|\psi(t_0)| \exp\left(-K\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau)-\tau}\right) \le$$

$$\le |\psi(t)| \le |\psi(t_0)| \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau)-\tau}\right), \tag{123}$$

в котором $\eta(\cdot) = \eta(\psi;\cdot)$ и K — постоянная из (121) (*так как $\eta'(t) \ge 1/2$, то и $K \ge 1/2$*).

Если теперь $\psi_1, \psi_2 \in F$ и выполнено (119), то на основании (123) находим

$$\left|\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right| \le \left|\frac{\psi_2(t_0)}{\psi_1(t_0)}\right| \exp\left(K_1\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\psi_1;\tau)-\tau} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\psi_2;\tau)-\tau}\right) =$$

$$= \left|\frac{\psi_2(t_0)}{\psi_1(t_0)}\right| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\eta(\psi_1;\tau)-\tau}\left(K_1 - \frac{\eta(\psi_1;\tau)-\tau}{2\eta(\psi_2;\tau)-\tau}\right) d\tau\right) \le$$

$$\le O(1)\exp\left(-\varepsilon\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}\frac{\tau\, d\tau}{\eta(\psi_1;\tau)-\tau}\right).$$

Учтем теперь, что в силу предложения 15 найдется α_0 такое, что при всех $\tau \geq 1$

$$\mu(\psi_1; \tau) = \frac{\tau}{\eta(\psi_1; \tau) - \tau} \geq \alpha_0 > 0. \tag{124}$$

Поэтому для произвольного $t \geq t_0$

$$\left|\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right| \leq O(1) \exp(-\varepsilon\alpha_0 \ln t) = O(1)\, t^{-\varepsilon\alpha_0}, \tag{125}$$

где $O(1)$ — некоторая величина, равномерно ограниченная по t.

Таким образом, если для двух функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ из F выполняется условие (119), то будет справедливым и соотношение (125), согласно которому можно утверждать, что найдется число $r > 0$ такое, что при всех $t \geq 1$ будет $|\psi_1(t)| \geq O(1)|\psi_2(t)|\, t^r$. Понятно, что в случае, когда вместо (119) выполняется условие (119′), найдется число $r > 0$ такое, что при всех $t \geq 1$ будет $|\psi_2(t)| \geq O(1)|\psi_1(t)|\, t^r$.

Учитывая это замечание, докажем следующее утверждение.

Теорема 4′. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$. *Тогда если выполнено условие* (119), *то при* $n \to \infty$ *выполняются асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \frac{4|\psi_1(n)|}{2} \ln^+(\eta(\psi_1; n) - n) + O(1)|\psi_1(n)|, \tag{126}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0) = \frac{2|\psi_1(n)|}{\pi^2} S_n(\omega) \ln^+(\eta(\psi_1; n) - n) + O(1)|\psi_1(n)|\, \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{127}$$

в которых величины $\eta(\psi_1; n)$, $\eta(\psi_2; n)$, $S_n(\omega)$ *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 4.

Если же выполнено условие (119′), *то в правых частях* (126) *и* (127) *следует заменить* $\psi_1(\cdot)$ *на* $\psi_2(\cdot)$.

Доказательство. Как и выше, в равенствах (90) и (90′) положим $\alpha = \alpha(n) = (\eta(\psi_1; n) - n)^{-1}$, $\alpha' = \alpha'(n) = (\eta(\psi_2; n) - n)^{-1}$. Тогда справедливы оценки (103) и (104). Величина $\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})$, как уже отмечалось, не зависит от x, поэтому в силу соотношений (90), (90′) и (103) и (104) имеем

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left| -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} \hat{\varphi}(t) \frac{\sin nt}{t}\, dt \; + \right.$$

$$\left. + \; \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha'(n)} \hat{\varphi}(t) \frac{\cos nt}{t}\, dt \right| + O(1)\overline{\psi}(n) v_n(\mathfrak{N}), \tag{128}$$

где $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ и $v_n(\mathfrak{N}) = 1$, если $\mathfrak{N} = S_M^0$, и $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, $v_n(\mathfrak{N}) = \omega(1/n)$, если $\mathfrak{N} = H_\omega^0$. Согласно равенству (114)

$$\sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} \varphi(t) \frac{\sin t}{t}\, dt \right| =$$

$$= \frac{4|\psi_1(n)|}{\pi^2} \ln^+(\eta(\psi_1(n)) - n) + O(1)|\psi_1(n)|, \tag{129}$$

$$\sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha'(n)} \varphi(t) \frac{\sin t}{t}\, dt \right| =$$

$$= \frac{4|\psi_2(n)|}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_2(n))-n) + O(1)|\psi_2(n)|. \tag{129'}$$

Если выполнено условие (119), то выполнено и (125). Следовательно, как уже отмечалось, можно указать такое $r>0$, что при достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$|\psi_2(n)| \le K|\psi_1(n)|n^{-r}, \quad K<\infty. \tag{130}$$

Но в таком случае с учетом того, что $\mu(\psi_2; n) \ge \alpha_0 > 0$,

$$|\psi_2(n)|\ln^+\eta(\psi_2(\cdot)-n) \le K|\psi_1(n)|n^{-r}\ln^+\eta(\psi_2(n)-n) =$$

$$= K|\psi_1(n)|n^{-r}\ln^+\frac{n}{\mu(\psi_2;n)} = O(1)|\psi_1(n)|. \tag{131}$$

Таким образом, согласно (128)–(131)

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}}) = \frac{4|\psi_1(n)|}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n)-n) + O(1)(|\psi_1(n)|+\overline{\psi}(n)).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (130), получаем (126). Воспользовавшись вместо (114) равенством (115) и выписав аналоги равенств (129)и (129′) в случае, когда $\varphi \in H_\omega$, с учетом соотношений (130) и (131) получим и равенство (127). Ясно, что заключение теоремы 4′ при выполнении условия (119′) устанавливается аналогично. Теорема 4′ доказана.

Заметим, что в доказательстве теоремы 4′ условие (119) использовалось только для установления соотношения (131). Поэтому если выполнено (131), то справедливы и равенства (126) и (127). Заметим также, что вследствие оценки $\mu(\psi_2; n) \ge \alpha_0 > 0$, из соотношения $|\psi_2(n)|\ln n = O(1)|\psi_1(n)|$ следует $|\psi_2(n)|\ln^+(\eta(\psi_2;n)-n) = O(1)|\psi_1(n)|$. Поэтому справедливо такое утверждение.

Теорема 4″. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$. *Тогда если при* $n \to \infty$ *выполняется равенство*

$$|\psi_2(n)|\ln^+(\eta(\psi_2;n)-n) = O(1)|\psi_1(n)|, \tag{132}$$

то выполняются и равенства (126) *и* (127). *В частности, эти равенства справедливы, когда*

$$|\psi_2(n)|\ln n = O(1)|\psi_1(n)|. \tag{132'}$$

Если поменять местами $\psi_1(\cdot)$ *и* $\psi_2(\cdot)$ *в условиях, следует сделать то же и в правых частях равенств.*

Теоремы 4 – 4″ устанавливают асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}})$ и $\mathscr{E}_n(C^{\overline{\Psi}}H_\omega^0)$ и, следовательно, характеризуют поведение величин $\rho_n(f;x)$ на *заданном классе функций.* Следующее утверждение является аналогом известного неравенства Лебега, дающего оценку сверху величин $\|\rho_n(f;x)\|_C$ для *каждой (индивидуальной) функции* $f \in C^{\overline{\Psi}}C^0$.

Теорема 5. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$. *Тогда если выполняется условие* (100), *то для каждой* $f \in C^{\overline{\Psi}}C^0$ *при любом* $n \in N$ *справедливо неравенство*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\right)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\Psi}})_C, \tag{133}$$

в котором $\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n))^{1/2}$, $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1;n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, *либо* $\eta(\psi_2;n) = \psi_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$, $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Если выполняется условие (119), *то для каждой* $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при любом* $n \in N$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n)-n)+O(1)\right)\psi_1(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_C. \tag{134}$$

Если же выполняется условие (119′), *то в правой части* (134) *следует заменить* $\psi_1(\cdot)$ *на* $\psi_2(\cdot)$.

Для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *при каждом* $n \in N$ *в пространстве* $C^{\overline{\psi}}C^0$ *найдется функция* $F(x) = F(f;n;x)$ *такая, что* $E_n(F^{\overline{\psi}})_C = E_n(f^{\overline{\psi}})_C$ *и для нее соотношения* (133) *и* (134) *становятся равенствами.*

Доказательство. Чтобы установить оценку (133), воспользуемся равенством (109), взяв в нем вместо $t_{n-1}(\cdot)$ многочлен $t_{n-1}^*(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ в пространстве C. Тогда для любой $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ при каждом $n \in N$ будем иметь

$$\rho_n = \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\alpha(n)}(f^{\overline{\psi}}(x-t)-t_{n-1}^*(x-t))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt + {}$$

$$+\; O(1)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_C. \tag{135}$$

В [4, с. 505–507] доказано, что если $n\alpha(n) \ge \alpha_0 > 0$, то для любых $\varphi \in C^0$ и $\gamma_n \in R^1$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{|t|\ge\alpha(n)}(\varphi(x-t)-t_{n-1}^*(x-t))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt\right| \le$$

$$\le \left(\frac{4}{\pi}\ln^+\frac{1}{\alpha(n)}+O(1)\right)E_n(\varphi)_C, \tag{136}$$

где $t_{n-1}^*(\cdot)$ — полином из $\mathcal{T}_{n-1}$, осуществляющий наилучшее приближение в пространстве C функции $\varphi(\cdot)$.

Объединяя соотношения (135) и (136) и учитывая условие (100), убеждаемся в справедливости оценки (133).

Чтобы установить неравенство (134), используем равенство (90″) в случае, когда $t_{n-1}(\cdot) = t_{n-1}^*(\cdot)$, где $t_{n-1}^*(\cdot)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, а $\alpha(n)$ и $\alpha'(n)$ выбраны согласно (101).

С учетом оценки (105) находим

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\alpha(n)}\delta_n^*(x-t)\frac{\sin nt}{t}\,dt + {}$$

$$+\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\alpha'(n)}\delta_n^*(x-t)\frac{\cos nt}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_C, \tag{137}$$

$$\delta_n^*(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}^*(\cdot).$$

В силу неравенства (136) для любой $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ заключаем

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha(n)} \delta_n^*(x-t) \frac{\sin nt}{t} \, dt \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ (\eta(\psi_1; n) - n) + O(1) \right) |\psi_1(n)| E_n(f^{\overline{\psi}})_C \tag{138}$$

и

$$\left| \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \alpha'(n)} \delta_n^*(x-t) \frac{\cos nt}{t} \, dt \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ (\eta(\psi_2; n) - n) + O(1) \right) |\psi_2(n)| E_n(f^{\overline{\psi}})_C . \tag{138′}$$

Если выполнено (119), то согласно (131) $\psi_2(n) \ln^+(\eta(\psi_2; n) - n) = O(1) \psi_1(n)$.

Поэтому, сопоставляя соотношения (137)–(138′), получаем (134). Понятно, что если вместо условия (119) выполняется (119′), то в правой части (134) следует заменить $\psi_1(\cdot)$ на $\psi_2(\cdot)$.

Заключительная часть утверждения теоремы следует из того, что, как показано в [4, с. 507, 508], при каждом $n \in N$ во множестве C^0 имеется функция $\varphi^*(\cdot)$, для которой соотношение (136) является равенством. Теорема 5 доказана.

Сделаем несколько замечаний. Теоремы 4–5 установлены при условии, что $\psi_1, \psi_2 \in F$. Рассмотрим эти утверждения в случае, когда ψ_1 и ψ_2 являются элементами множества $\mathfrak{M}_C$. В этом случае в силу (93) и (94) условие (100) выполняется автоматически и для любой $\psi \in \mathfrak{M}_C$

$$\ln^+(\eta(\psi; n) - n) = \ln n + \ln^+ \frac{\eta(\psi; n) - n}{n} = \ln n + O(1), \tag{139}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n. Поэтому из теоремы 4 вытекает такое следствие.

***Следствие* 4.** *Если* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, *то равенства* (117) *и* (118) *принимают вид*

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi^2} \ln n + O(1) \overline{\psi}(n) \tag{140}$$

и соответственно

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0) = \frac{2\overline{\psi}(n)}{\pi^2} S_n(\omega) \ln n + O(1) \overline{\psi}(n) \, \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{140′}$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то с учетом (94) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau) - \tau} \geq K_1 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = K_1 \ln \frac{t}{t_0}, \qquad \eta(\tau) = \eta(\psi; \tau),$$

аналогично

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\eta(\tau) - \tau} \leq K_2 \ln \frac{t}{t_0}.$$

Поэтому, полагая, к примеру, $t_0 = 1$, согласно соотношению (123) в этом случае при любых $t \geq 1$ находим

$$K_1 t^{-r_1} \leq |\psi(t)| \leq K_2 t^{-r_2},$$

где r_1 и r_2 — некоторые положительные числа, а K_1 и K_2 — величины, равномерно ограниченные по t, причем $K_1 > 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 17. *Для любой функции* $\psi(\cdot)$ *из* $\mathfrak{M}_C$ *ее модуль убывает не медленнее, чем* t^{-r_2}, *и не быстрее, чем функция* t^{-r_1} *при некоторых значениях* $r_1 > 0$ *и* $r_2 > 0$.

В частности, $\mathfrak{M}_C$ принадлежат функции $\psi(t) = t^{-r_1}$, $r > 0$, $\psi(t) = t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t+e)$, $\varepsilon > R^1$, и др. В случае, когда $\psi_1(t) = t^{-r}\cos r\pi/2$, $\psi_2(t) = t^{-r}\sin r\pi/2$, класс $C_\infty^{\overline{\psi}}$ совпадает с классом W_r^r функций $f(\cdot)$ из C, r-е производные в смысле Вейля которых почти всюду ограничены единицей: $\|f^r\|_M \leq 1$, а класс $C^{\overline{\psi}}H_\omega^0$ — с классом $W_r^r H_\omega^0$ функций $f(\cdot)$ из C, r-е производные в смысле Вейля которых находятся в множестве H_ω^0. В этом случае равенства (140) и (140′) имеют вид

$$\mathcal{E}_n(W_r^r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O(1)n^{-r} \tag{141}$$

и соответственно

$$\mathcal{E}_n(W_r^r H_\omega^0) = \frac{2}{\pi^2 n^r} S_n(\omega)\ln n + O(1)n^{-r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{141′}$$

При $r = 1, 2, \ldots$ равенство (141) было получено А. Н. Колмогоровым [12], а равенство (141′) — С. М. Никольским [13, 14] и А. В. Ефимовым [15].

Эти исследования А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского положили начало новому направлению в теории приближения функций, связанному с нахождением асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}\, U_n(\cdot\,;\Lambda)) = \sup\{\|f(x) - U_n(\cdot\,;\Lambda)|_X : f \in \mathfrak{N}\}, \tag{142}$$

где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функционального пространства X, а $U_n(\cdot\,;\Lambda)$ — операторы, порождаемые Λ-методами суммирования рядов Фурье.

В случае, когда для величин (142) в явном виде найдена функция $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; n)$ такая, что при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \varphi_n(n) + o(\varphi(n)),$$

говорим, что решена задача Колмогорова – Никольского (задача К-Н) для класса $\mathfrak{N}$ и метода $U_n(\cdot\,;\Lambda)$ в пространстве X.

Эта задача имеет богатую историю, с которой можно познакомиться, например, по книгам [3, 16].

Учитывая эту терминологию, можно сказать, что равенства (140) и (141′) дают решение задачи К-Н для классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}}H_\omega^0$ и сумм Фурье в пространстве C при любых $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$.

Если $\psi \in F\backslash\mathfrak{M}_C$, то в этом случае величина $\mu(\psi; t)$ может неограниченно возрастать. При этом возможны такие варианты:

$$\lim_{n\to\infty} (\eta(\psi; n) - n) = \infty, \tag{143}$$

$$\eta(\psi; n) - n \le K < \infty. \tag{143'}$$

Кроме того, если $\psi_1(\cdot)$ и/или $\psi_2(\cdot)$ принадлежат $F \setminus \mathfrak{M}_C$, то условие (100) автоматически выполняться уже не будет.

Типичными примерами функций $\psi(\cdot)$ из $F \setminus \mathfrak{M}_C$ являются функции $\psi_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$. Элементарные преобразования показывают, что

$$\eta(\psi_r; t) - t = t^{1-r}\left(\frac{\ln 2}{\alpha r} + O(1)\right), \tag{144}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по t. Отсюда видно, что при $r \in (0, 1)$ для $\psi_2(\cdot)$ выполняется условие (143), а при $r \ge 1$ — условие (143′).

Принимая во внимание эти замечания, заключаем, что если $\psi_1, \psi_2 \in F \setminus \mathfrak{M}_C$, то равенства (117) и (118) дают решение задачи К-Н в том и только в том случае, когда $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ удовлетворяют условию (143), а равенства (126) и (127) — тогда и только тогда, когда выполняется условие (143) для функции $\psi_1(\cdot)$. В случаях, когда вместо (143) выполняется условие (143′), оба слагаемых правых частей соотношений (117), (118), (126) и (127) имеют одинаковый порядок и, следовательно, для решения задачи К-Н эти соотношения надо уточнять, чему и будет посвящен следующий пункт работы, а пока сделаем еще несколько замечаний.

Если функция $\psi \in \mathfrak{M}$ такова, что она убывает к нулю быстрее любой степенной функции:

$$\lim_{k \to \infty} k^r \psi(k) = 0 \qquad \forall\, r \in R^1, \tag{145}$$

то ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \cos kx, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) \sin kx \tag{146}$$

можно дифференцировать любое число раз и в результате опять будут равномерно сходящиеся ряды. Отсюда заключаем, что если для функций $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$ выполнено условие (145), то функции $f(\cdot)$, принадлежащие множествам $L^{\overline{\Psi}}$, являясь свертками функции $\varphi \in L$ с ядрами вида (146), будут бесконечно дифференцируемыми.

Обозначим через F' подмножество функций $\varphi \in F$, для которых

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \lim_{t \to \infty} \mu(\psi; t) = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{\eta(\psi; t) - t} = \infty. \tag{147}$$

Если $\psi \in F'$, то в силу (123) для всех $t \ge 1$ и $r > 0$ имеем

$$t^r |\psi(t)| \le |\psi(1)| \exp\left(-\frac{1}{2}\int_1^t \frac{d\tau}{\eta(\tau) - \tau} + r\int_1^t \frac{d\tau}{\tau}\right) =$$

$$= |\psi(1)| \exp\left(\frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{\tau}\left(2r - \frac{\tau}{\eta(\tau) - \tau}\right) d\tau\right).$$

Отсюда вследствие (147) заключаем, что $t^r \psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 18. *Если $\psi_1, \psi_2 \in F'$, то функции $f \in L^{\overline{\Psi}}$ являются бесконечно дифференцируемыми.*

Обозначим через F_c подмножество функций $\psi \in F$, для которых

$$\lim_{t\to\infty} \left(\eta(\psi;t) - t\right) = c, \quad c \in [0,\infty), \tag{148}$$

и докажем следующее утверждение.

Предложение 19. *Пусть $\psi_1 \in F_{c_1}$ и $\psi_2 \in F_{c_2}$. Тогда любая функция $f(\cdot)$, принадлежащая множеству $C^{\overline{\psi}}$, является следом на действительной оси функции $F(z)$, регулярной в полосе*

$$|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right). \tag{149}$$

Если при этом $c_1 = c_2 = 0$, то $F(z)$ — регулярная во всей комплексной области, т. е. $F(z)$ — целая функция.

Доказательство. Исходным моментом здесь является хорошо известный в теории регулярных функций факт (см., например, [17, с. 263]), заключающийся в том, что если для коэффициентов $c_k = c_k(f)$ ряда Фурье функции $f \in L$ выполнены условия

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln|c_k|^{-1/k} = a, \qquad \varliminf_{k\to\infty} \ln|c_{-k}|^{-1/k} = b, \tag{150}$$

то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$ сходится равномерно и абсолютно внутри полосы $-a < \operatorname{Im} z < b$ и представляет там регулярную функцию.

Если $\psi \in F_c$, то в силу (148)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_1^t \frac{d\tau}{\eta(\psi;\tau)-\tau} = \lim_{t\to\infty} \left(\eta(\psi;t)-t\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & c \neq 0; \\ \infty, & c = 0, \end{cases} \tag{151}$$

а в силу (123) при всех $t \ge 1$

$$\frac{1}{2t}\int_1^t \frac{d\tau}{\eta(\psi;\tau)-\tau} \le \frac{\ln|\psi(1)|}{t} + \ln|\psi(t)|^{-1/t} \le \frac{K}{t}\int_1^t \frac{d\tau}{\eta(\psi;\tau)-\tau}. \tag{152}$$

Поэтому для любой $\psi \in F_c$

$$\frac{1}{2c} \le \varliminf_{t\to\infty} \ln|\psi(t)|^{-1/t} \le \frac{K}{c} \tag{153}$$

при $c \neq 0$ и

$$\varliminf_{t\to 0} \ln|\psi(t)|^{-1/t} = \infty \tag{153'}$$

при $c = 0$.

Предположим сначала, что $c_1 c_2 \neq 0$, и рассмотрим тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{ikt}, \qquad \mu_k = \begin{cases} \psi_1(k) - i\psi_2(k), & k \ge 1; \\ \psi_1(k) + i\psi_2(k), & k \le 1. \end{cases} \tag{154}$$

При каждом $k \in N$ имеем

$$\ln|\mu_k|^{-1/k} = -\frac{1}{k}\ln\overline{\psi}(k) = -\frac{1}{k}\ln\left(\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)\right)^{1/2} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{k}\ln 2\max(|\psi_1(k)|; |\psi_2(k)|) =$$

$$= -\frac{1}{k}\ln 2 + \min(\ln(|\psi_1(k)|^{-1/k}, \ln|\psi_2(k)|^{-1/k}).$$

Следовательно, с учетом (152) находим

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln|\mu_k|^{-1/k} \geq \min\left(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\right) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right). \tag{155}$$

Аналогично получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln|\mu_{-k}|^{-1/k} \geq \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right). \tag{155'}$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{ikz}$ равномерно и абсолютно сходится в полосе (149) и представляет там регулярную функцию. В частности, ряд (154) сходится равномерно к своей сумме $\Psi(t)$. Поэтому согласно предложению 3 любая функция $f \in L^{\overline{\psi}}$ является сверткой функции $\Psi(t)$ с некоторой суммируемой функцией $\varphi(\cdot)$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$S[f] = A_0 + \sum_{|k|\geq 1} d_k e^{ikx}, \quad d_k = \mu_k c_k(\varphi),$$

где μ_k — величины, определенные в (154), а $c_k(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\cdot)$. Поскольку при $|k|\to\infty$ $c_k(\varphi)\to 0$, то для величин d_k будут справедливы аналоги оценок (155) и (155′):

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln|d_k|^{-1/k} \geq \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right)$$

и

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln|d_{-k}|^{-1/k} \geq \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right).$$

Отсюда следует, что ряд $A_0 + \sum_{|k|\geq 1} d_k e^{ikz}$ равномерно и абсолютно сходится в полосе (149). Тем самым доказана справедливость утверждения в случае $c_1 c_2 \neq 0$. Ясно, что доказательство остается без изменений и в том случае, когда одно из значений c_1 или c_2, или же оба есть нули, только на этот раз вместо (152) следует использовать равенство (153′).

5. Приближение суммами Фурье $\overline{\psi}$-интегралов, порождающих целые функции. В этом пункте рассматриваются приближения суммами Фурье $\overline{\psi}$-интегралов при условии, что функции $|\psi_1(\cdot)|$ и $|\psi_2(\cdot)|$ принадлежат к множеству F_0, т. е. в том случае, когда согласно предложению 19 элементы множеств $L^{\overline{\psi}}$ являются сужениями на действительную ось функций, регулярных во всей комплексной плоскости. В этом случае функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ убывают столь быстро, что в остатке $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$ доминирующим является первый член его разложения в ряд Фурье.

Благодаря этому удается получить асимптотические равенства для величин

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \| \rho_n(f;x)\|_X, \quad \mathfrak{N} \subset L^0,$$

дающие решения соответствующей задачи Колмогорова – Никольского как в случае, когда $X = C$, так и в случае, когда $X \doteq L_p$, $p \in [1, \infty]$. Через L_p, $p \geq 1$, как обычно, обозначаются подмножества функций $\varphi \in L$ с конечной нормой $\| \varphi \|_p$, где

$$\| \varphi \|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\| \varphi \|_\infty \stackrel{\text{df}}{=} \| \varphi \|_M = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|.$$

Если $\psi_1, \psi_2 \in F_0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx)$$

сходится равномерно к сумме $\Psi(x)$, поэтому для любой $f \in L^{\overline{\psi}}$ согласно предложению 12 почти всюду выполняется равенство

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t) \Psi_n(t)) \, dt,$$

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt).$$

Если $f \in C^{\overline{\psi}}$, то это равенство справедливо в каждой точке x.

Функция $\Psi_n(t)$ ортогональна любому тригонометрическому полиному $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$, поэтому

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \Psi_n(t) \, dt. \tag{156}$$

Воспользовавшись теперь неравенством Хаусдорфа – Юнга для сверток (см., например, [7, с. 67])

$$y * z = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} y(x-t) z(t) \, dt,$$

$$\pi \| y * z \|_s \leq \| y \|_p \| z \|_q, \quad 1 \leq p \leq s \leq \infty,$$

$$q^{-1} = 1 - p^{-1} + s^{-1}, \quad y \in L_p, \quad z \in L_q,$$

для любой функции $y \in L^{\overline{\psi}} L_p$, $1 \leq p \leq s \leq \infty$, получим

$$\|\rho(f;x)\|_s = \|(f^{\overline{\psi}} - t_{n-1}) * \Psi_n\|_s \leq \pi^{-1} \|f^{\overline{\psi}} - t_{n-1}\|_p \|\Psi_n\|_q.$$

Но $q^{-1} \in [0, 1]$, значит,

$$\| \Psi_n \|_q \leq \| \psi_n \|_M (2\pi)^{1/q} \leq 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \overline{\psi}(k),$$

$$\overline{\psi}(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\| \rho_n(f; x) \|_s \leq 2 \| f^{\overline{\psi}} - t_{n-1} \| \sum_{k=n}^{\infty} \overline{\psi}(k).$$

Если $1 \leq s < p \leq \infty$, то в силу неравенства Гельдера для любой $\varphi \in L_p$ $\| \varphi \|_s \leq \leq (2\pi)^{(p-s)/ps} \| \varphi \|_p$. Поэтому

$$\| \varphi_n(f; x) \|_s \leq 2\pi \| (f^{\overline{\psi}} - t_{n-1}) * \Psi_n \|_p \leq 2 \| f^{\overline{\psi}} - t_{n-1} \|_p \| \Psi_n \|_1 \leq$$
$$\leq 4\pi \| f^{\overline{\psi}} - t_{n-1} \|_p \| \Psi_n \|_M .$$

Таким образом, если $1 \leq p,\ s \leq \infty$, то для любой $f \in L^{\overline{\psi}} L_p$

$$\| \rho_n(f; x) \|_s \leq 4\pi \| f^{\overline{\psi}} - t_{n-1} \|_p \sum_{k=n}^{\infty} \overline{\psi}(k).$$

Выбирая в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином $t_{n-1}^*(\cdot)$ наилучшего приближения в L_p производной $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F_0$ *и* $1 \leq p,\ s \leq \infty$. *Тогда если* $f \in L^{\overline{\psi}} L_p$, *то справедливо неравенство*

$$\| \rho_n(f; x) \|_s \leq 4\pi E_n(f^{\overline{\psi}})_p \sum_{k=n}^{\infty} \overline{\psi}(k),$$
$$E_n(\varphi)_p = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \| \varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_p. \tag{157}$$

Если B — некоторый класс функций, то полагаем

$$\mathcal{E}_n(B)_s = \sup \{ \| \rho_n(\varphi; x) \|_s : \varphi \in B \},$$

$$A_n(B)_s = \sup \left\{ \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos nt \, dt \right\|_s : \varphi \in B \right\}.$$

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F_0$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_n(L^{\overline{\psi}} S_p^0)_s = \overline{\psi}(n) A_n(S_p^0)_s + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k), \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \tag{158}$$

где

$$S_p^0 = \{ \varphi : \| \varphi \|_p \leq 1,\ \varphi \perp 1 \}, \quad \overline{\psi}(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{1/2},$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\overline{\psi}} H_{\omega_p}^0)_s = \overline{\psi}(n) A_n(H_{\omega_p}^0)_s + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k), \tag{159}$$

$$1 \leq p, s \leq \infty,$$

$H_{\omega_p} = \{\varphi: \varphi \perp 1, \|\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)\|_p \le \omega(t)\}$, $\omega(t)$ — *заданный модуль непрерывности.*

В частности,

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}} S_1^0)_1 = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k), \tag{158'}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}^0)_1 = \overline{\psi}(n) \frac{2\theta_\omega^{(1)}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + $$

$$+ O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k), \tag{159'}$$

где $\theta_\omega^{(1)} \in [1/2, 1]$, *причем* $\theta_\omega^{(1)} = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности;*

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}} S_M^0)_C = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k) \tag{160}$$

и

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0) = \overline{\psi}(n) \frac{2\theta_\omega}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + $$

$$+ O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k), \tag{161}$$

где $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклая функция. В равенствах* (158)–(161) *через* $O(1)$ *обозначены величины, равномерно ограниченные по всем рассматриваемым параметрам.*

Доказательство. Эта теорема является аналогом теоремы 2 из [18]. Ее доказательство во многом напоминает доказательство упомянутой теоремы. Прежде всего, при любом $n \in N$ имеем

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\, dt + \rho_{n+1}(f; x). \tag{162}$$

Понятно, что при любых $n \in N$ и p, s, $1 \le p, s \le \infty$,

$$\sup_{f \in L^{\overline{\psi}} S_p^0} E_n(f^{\overline{\psi}})_p = \sup_{\varphi \in S_p^0} E_n(\varphi)_p \le \sup_{\varphi \in S_p^0} \|\varphi\|_p \le 1 \tag{163}$$

и, как хорошо известно, для каждой $\varphi \in H_{\omega_p}^0$

$$E_n(\varphi)_p = O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{163'}$$

Далее заметим, что

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\, dt \right\|_s =$$

$$= \left\| \frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \cos nt \, dt \right\|_s, \tag{164}$$

а также

$$\sup_{f \in L^{\overline{\Psi}} S_p^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \cos nt \, dt \right\|_s = A_n(S_p^0)_s, \tag{165}$$

и

$$\sup_{f \in L^{\overline{\Psi}} H_{\omega_p}^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x-t) \cos nt \, dt \right\|_s = A_n(H_{\omega_p}^0)_s. \tag{165$'$}$$

Рассматривая верхние грани обеих частей (162) по классам $L^{\overline{\Psi}} S_p^0$ и $L^{\overline{\Psi}} H_{\omega_p}^0$ и принимая во внимание формулы (163)–(165′), получаем равенства (158) и (159).

В [20, с. 788, 789] показано, что

$$A_n(S_1^0)_1 = \frac{4}{\pi}, \qquad A_n(H_{\omega_1}^0)_1 = \frac{2\theta_\omega^{(1)}}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt. \tag{166}$$

Первое из этих равенств — следствие из теоремы С. М. Никольского [19, с. 215]; второе — результат В. И. Бердышева из [20]. Объединяя соотношения (158), (159) и (166), получаем равенства (158′) и (159′).

Величина $A_n(S_M^0)_C$ найдена в [18, с. 788]. Она равна $4/\pi$. Там же на основании результатов Лебега [21] и А. В. Ефимова [15] отмечено, что

$$A_n(H_\omega^0)_C = \frac{2\theta_\omega}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt. \tag{166$'$}$$

Поэтому, рассматривая верхние грани обеих частей (162) по классам $C^{\overline{\Psi}} S_M^0$ и $C^{\overline{\Psi}} H_\omega^0$ и принимая во внимание соотношения (163) и (163′), получим равенства (160) и (161). Теорема 7 доказана.

При любых $1 \le p,\ s \le \infty$ имеем

$$\begin{aligned} A_n(S_p^0)_s &= \sup_{\varphi \in S_p^0} \|a_n(\varphi)\cos nx + b_n(\varphi)\sin nx\|_s = \\ &= \sup_{\varphi \in S_p^0} \|(a_n^2(\varphi) + b_n^2(\varphi))^{1/2} \cos(nx + \gamma_n)\|_s = \\ &= \|\cos x\|_s \sup_{\varphi \in S_p^0} (a_n^2(\varphi) + b_n^2(\varphi))^{1/2}. \end{aligned} \tag{167}$$

Аналогично

$$A_n(H_{\omega_p}^0)_s = \|\cos x\|_s \sup_{\varphi \in H_{\omega_p}^0} (a_n^2(\varphi) + b_n^2(\varphi))^{1/2}. \tag{167$'$}$$

Величина $\|\cos x\|_s$ известна (см., например, [22, с. 138]):

$$\|\cos x\|_s^s = 4 \int\limits_0^{\pi/2} |\cos x|^s \, dx = 2\pi^{1/2} \frac{\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma(s/2+1)}. \tag{168}$$

Таким образом, для нахождения величин $A_n(S_p^0)_s$ и $A_n(H_{\omega_p}^0)_s$ достаточно найти величины $\alpha_n(S_p^0)_s = \sup\limits_{\varphi\in S_p^0}(a_n^2(\varphi)+b_n^2(\varphi))^{1/2}$ и $\alpha_n(H_{\omega_p}^0)_s = \sup\limits_{\varphi\in H_{\omega_p}^0}(a_n^2(\varphi)+b_n^2(\varphi))^{1/2}$.

Если $\|\varphi\|_2 \le 1$, то в силу равенства Парсеваля $(a_n^2(\varphi)+b_n^2(\varphi))^{1/2} \le \pi^{-1/2}$. В то же время функция $\varphi^*(t) = \pi^{-1/2}\cos nt$ принадлежит S_2^0. Поэтому

$$\sup_{\varphi\in S_2^0}(a_n^2(\varphi)+b_n^2(\varphi))^{1/2} = \pi^{-1/2}.$$

Следовательно, в силу (167) и (168), при любом $s\ge 1$ имеем

$$A_n(S_2^0)_s = 2\frac{\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma(s/2+1)}. \tag{169}$$

В частности, $A_n(S_2^0)_2 = 1$.

Кроме отмеченных в соотношениях (160), (166), (166′) и (169) точных значений величин $A_n(S_p^0)_s$ и $A_n(H_{\omega_p}^0)_s$ нам неизвестно. Для величин $A_n(S_p^0)_s$ в общем случае можно указать оценки

$$\frac{\|\cos\|_s}{\|\cos\|_p} \le A_n(S_p^0)_s \le \frac{4}{\pi}, \quad 1\le p\le s\le\infty, \tag{170}$$

$$1 \le A_n(S_p^0)_s \le 8, \quad 1\le s<p\le\infty. \tag{170′}$$

Заметим, что при $p=s=2$, при $p=s=1$ и при $p=s=\infty$ оценка (170) является точной, стало быть, в общем случае ее улучшить нельзя. Оценка сверху в (170) получается посредством применения неравенства Хаусдорфа–Юнга:

$$A_n(S_p^0)_s = \sup_{\varphi\in S_p^0}\|\varphi(\cdot)*\cos n(\cdot)\|_s \le \pi^{-1}\|\varphi\|_p\|\cos(\cdot)\|_q \le \frac{4}{\pi}.$$

Так же просто получается оценка сверху и в (170′). Получим оценку снизу. Имеем

$$A_n(S_p^0)_s \ge \sup\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos nt\,dt\right\|_s,$$

где верхняя грань распространена на функции $\varphi(\cdot)$ из S_p, которые представимы в виде $\varphi(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt$, где a_n и b_n — некоторые числа и $\|\varphi\|_p = 1$, т. е.

$$A_n(S_p^0)_s \ge \sup\left\{\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(a_n\cos n(x-t)+b_n\sin n(x-t))\cos nt\,dt\right\|_s : \right.$$

$$\left.\|a_n\cos nt + b_n\sin nt\|_p = 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\|a_n\cos nt + b_n\sin nt\|_s : \|a_n\cos nt + b_n\sin nt\|_p = 1\right\} =$$

$$= \|\cos t\|_s \sup\left\{\sqrt{a_n^2+b_n^2} : \left(\sqrt{a_n^2+b_n^2} = \|\cos t\|_p^{-1}\right)\right\} = \frac{\|\cos t\|_s}{\|\cos t\|_p}.$$

Отсюда сразу следует справедливость оценок снизу в (170) и (170′).

Для величин $A_n(H^0_{\omega_p})_s$ справедливо неравенство

$$\frac{\|\cos t\|_s}{3\pi^2}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt \le A_n(H^0_{\omega_p})_s \le \frac{4}{\pi}\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_p}} E_0(\varphi)_p. \tag{171}$$

Действительно, пусть $\varphi \in H^0_{\omega_p}$ и $t^*_{n-1}(\cdot)$ — полином наилучшего приближения функции $\varphi(\cdot)$ в пространстве L_p. Тогда, применяя неравенство Хаусдорфа – Юнга, будем иметь

$$A_n(H^0_{\omega_p})_s = \sup_{\varphi\in H^0_{\omega_p}}\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi(x-t) - t^*_{n-1}(x-t))\cos nt\,dt\right\|_s \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in H^0_{\omega_p}} \pi^{-1}\|\varphi(\cdot) - t^*_{n-1}(\cdot)\|_p\|\cos t\|_q \le \frac{4}{\pi}\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_p}} E_0(\varphi)_p.$$

Для получения оценки снизу воспользуемся равенством (167′), в силу которого

$$A_n(H^0_{\omega_p})_s \ge \|\cos t\|_s \sup_{\varphi\in H}|a_n(\varphi)|, \tag{172}$$

где H — подмножество четных функций из $H^0_{\omega_p}$.

Пусть теперь $H_\omega = \{\varphi:\ \varphi\in C,\ \|\varphi(x+t) - \varphi(t)\|_C \le \omega(t)\}$. Тогда, каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$, существует функция $\varphi^*(t)$ такая, что $\varphi^*\in H_\omega$, $\varphi^*\perp 1$, для которой виполняется равенство (см., например, [16, с. 30])

$$|a_n(\varphi^*)| = \frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt. \tag{173}$$

Для функций $\varphi^*(\cdot)$ имеем

$$\|\varphi^*(x+t) - \varphi^*(t)\|_p \le \omega(t)(2\pi)^{1/p} \le 2\pi\omega(t).$$

Значит, функция $f^*(\cdot) = \varphi^*(\cdot)/2\pi$ принадлежит H_{ω_p}. Поэтому согласно (172) и (173)

$$A_n(H^0_{\omega_p}) \ge \|\cos t\|_s|a_n(f^*)| = \frac{\|\cos t\|_s}{2\pi}|a_n(\varphi^*)| =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_s}{3\pi^2}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt.$$

Как известно, всегда можно указать константы K_1 и K_2, не зависящие от $n\in$ $\in N$ такие, что

$$\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt \;\geq\; K_1\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sup_{\varphi \in H^0_{\omega_p}} E_n(\varphi)_p \;\leq\; K_2\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому в силу (171) всегда

$$C_1\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \;\leq\; A_n(H^0_{\omega_p})_s \;\leq\; C_2\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{174}$$

где C_1 и C_2 — величины, не зависящие от $n \in N$ и $C_1 > 0$.

Принимая во внимание соотношения (170), (170′) и (174), заключаем, что при всех $p, s \geq 1$ и при $n \in N$

$$C_1\,\overline{\psi}(n) \;\leq\; \overline{\psi}(n)\,A_n(S^0_p)_s \;\leq\; C_2\,\overline{\psi}(n), \tag{175}$$

$$C_1\,\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \;\leq\; \overline{\psi}(n)\,A_n(H^0_{\omega_p}) \;\leq\; C_2\,\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{175′}$$

Покажем теперь, что если $\psi_1, \psi_2 \in F_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{\psi}(n))^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k) \;=\; 0. \tag{176}$$

Имеем

$$(\overline{\psi}(n))^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\psi}(k) \;\leq$$

$$\leq\; |\psi_1(n)|^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\psi_1(x)| + |\psi_2(n)|^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\psi_2(k)|. \tag{177}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} (\eta(\psi_1; k) - k) = 0$, то при достаточно больших значениях k будем иметь $\eta(\psi_1; k) - k < 1$. Поэтому при достаточно больших n

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\psi_i(k)| \;\leq\; |\psi_i(n+1)| + \frac{1}{2}|\psi_i(n+1)| + \frac{1}{4}|\psi_i(n+1)| + \ldots \;\leq$$

$$\leq\; 2\,|\psi_i(n+1)|, \qquad i = 1, 2. \tag{178}$$

В то же время в силу (123) при всех $t \geq 1$

$$\frac{\psi_i(t+1)}{\psi_i(t)} \;\leq\; \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^{t+1} \frac{d\tau}{\eta(\psi_i;\tau) - \tau}\right) \;\leq\; \exp\left(-\frac{1}{2}\,\varphi_i^*(t)\right),$$

где

$$\varphi_i^*(t) \;\leq\; \inf_{x \geq t} (\eta(\psi_i; x) - x)^{-1}.$$

Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_i(t+1)}{\psi_i(t)} \;=\; 0, \qquad i = 1, 2. \tag{179}$$

Объединяя соотношения (177)–(179), получаем равенство (176), а сопоставляя соотношения (175), (175′) и (176), заключаем, что равенства (158)–(161) всегда дают решения задачи Колмогорова–Никольского.

В заключение отметим, что в случае, когда $\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\pi/2$, $\psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\pi/2$, $\psi \in F$, $\beta \in R^1$, утверждение теоремы 7 совпадает с утверждением теоремы 2 из [18]. Равенства (158′) и (160) с остаточным членом в несколько другой форме доказаны ранее А. С. Теляковским [23].

6. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье в пространстве L. Здесь получены асимптотические равенства для величин

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})_1 = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \|\rho_n(f;x)\|_1, \qquad \|\varphi\|_1 \overset{\text{df}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\,dt, \tag{180}$$

$\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$, где $S_{n-1}(f;x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(\cdot)$, когда $\mathfrak{N}$ есть либо единичный шар S_1 в пространстве L: $S_1 = \{\varphi\colon \|\varphi\|_1 \le 1\}$, либо класс H_{ω_1} функций из L, удовлетворяющих условию $\|\varphi(\cdot+t) - \varphi(\cdot)\|_1 \le \omega(t)$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Получен также для множества $L^{\overline{\psi}}$ аналог неравенства Лебега в пространстве L.

Основные результаты содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 8. *Пусть $\psi_1, \psi_2 \in F$ и, кроме того, существуют постоянные K_1 и K_2 такие, что при всех $n \in N$*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1;n) - n}{\eta(\psi_2;n) - n} \le K_2 < \infty. \tag{181}$$

Тогда при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}S_1)_1 = \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi^2}\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n), \tag{182}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}H_{\omega_1})_1 = \frac{2\overline{\psi}(n)}{\pi^2}S_n(\omega)_1\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{183}$$

в которых $\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, $\eta(n)$ есть либо $\eta(\psi_1;n) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, либо $\eta(\psi_2;n) = \psi_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n и

$$S_n(\omega)_1 = \frac{2\Theta_\omega}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt, \qquad \Theta_\omega \in [1/2, 1],$$

причем $\Theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Теорема 8′. *Пусть $\psi_1, \psi_2 \in F$. Пусть, далее, найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при всех $t \ge t_0 \ge 1$ будет выполняться неравенство*

$$\frac{\eta(\psi_1;t) - t}{\eta(\psi_2;t) - t} \ge 2(K_1 + \varepsilon), \tag{184}$$

где K_1 — любая постоянная, для которой при всех $t \ge 1$ справедлива оценка $\eta'(\psi_i;t) \le K_1$. Тогда при $n \to \infty$ выполняются асимптотические равенства

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}S_1) = \frac{4|\psi_1(n)|}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n) - n) + O(1)|\psi_1(n)|, \tag{182′}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\psi}}H_{\omega_1})_1 = \frac{2|\psi_1(n)|}{\pi^2} S_n(\omega)_1 \ln^+(\eta(\psi_1;n)-n) + O(1)|\psi_1(n)|\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (183')$$

Величины $\eta(\psi_1;n)$, $\eta(\psi_2;n)$, $S_n(\omega)_1$ *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 8. *Если поменять местами функции* $\psi_1(\cdot)$ *и* $\psi_2(\cdot)$ *в условии* (184), *следует сделать то же и в правых частях соотношений* (182′) *и* (183′).

Теорема 8″. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$. *Тогда если при* $n \to \infty$ *выполняются равенства*

$$|\psi_2(n)|\ln^+(\eta(\psi_2;n)-n) = O(1)|\psi_1(n)| \quad \text{или}$$
$$|\psi_2(n)|\ln n = O(1)|\psi(n)|, \quad (185)$$

то выполняются и равенства (182′) *и* (183′). *Если поменять местами* $\psi_1(\cdot)$ *и* $\psi_2(\cdot)$ *в* (185), *следует сделать то же и в правых частях* (182′) *и* (183′).

Теорема 9. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$. *Тогда если выполняется условие* (181), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in N$ *справедливо неравенство*

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\right)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})_1, \quad (186)$$

в котором величины $\overline{\psi}(n)$, $\eta(n)$ *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 8, *а* $E_n(f^{\overline{\psi}})_1$ — *величина наилучшего приближения функции* $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ *с помощью тригонометрических полиномов порядка* $(n-1)$ *в пространстве* L:

$$E_n(f^{\overline{\psi}})_1 = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1.$$

Если выполнено условие (184), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in N$

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n)-n) + O(1)\right)|\psi_1(n)|E_n(f^{\overline{\psi}})_1. \quad (187)$$

Если же поменять местами функции $\psi_1(\cdot)$ *и* $\psi_2(\cdot)$ *в условии* (184), *то следует сделать то же и в правой части* (187).

Неравенства (186) *и* (187) *асимптотически точны: константу* $4/\pi^2$ *уменьшить нельзя.*

Доказательство теорем 8 – 9 проводится по той же схеме, по которой установлены теоремы 4 – 5. Именно, сначала сформулируем аналог леммы 3, который получается путем объединения утверждений теоремы 12.1 из [3, с. 146] и леммы 1′ из [4, с. 509].

Лемма 4. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}'$, $\beta \in R^1$ *и* $\alpha = \alpha(n)$ — *произвольная последовательность чисел, для которой* $n\alpha(n) \ge \alpha_0 > 0$. *Тогда если* $\varphi \in S_1$, *то при любом* $n \in N$ *почти в каждой точке* x *выполняется равенство* (85), *в котором*

$$\|b_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)\|_1 \le O(1)(|\psi(n)| + Q_n^{\psi}(\alpha)). \quad (188)$$

Если $\varphi \in H_{\omega_1}$, *то при любом* $n \in N$ *почти в каждой точке выполняется равенство* (85′), *в котором*

$$\|d_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)\|_1 \le O(1)(|\psi(n)| + Q_n^{\psi}(\alpha))\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (188')$$

Если же $\varphi \in L^0$, *то для любого полинома* $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$, *при любом* $n \in N$

почти всюду выполняется равенство (85″), *в котором* $r_n(v) = \varphi(v) - t_{n-1}(v)$ *и*

$$\|q_n^{\psi}(\alpha;\varphi;x)\|_1 \le O(1)(|\psi(n)| + Q_n^{\psi}(\alpha))\|r_n\|_1. \tag{188″}$$

В оценках (188)–(188″)

$$|Q_n^{\psi}(\alpha)| = \left|\int\limits_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t}\,dt + \int\limits_{\alpha(n)}^{\infty} t^{-1}(\psi(n) - \psi(n+t^{-1}))\,dt\right|,$$

а $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n.

В силу равенств (89) из леммы 4 получаем такое следствие.

***Следствие* 5.** *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $\alpha = \alpha(n)$ *и* $\alpha' = \alpha'(n)$ — *две произвольные последовательности действительных чисел, для которых* $n\,\alpha(n) \ge \alpha_0 > 0$ *и* $n\,\alpha'(n) \ge \alpha_0' > 0$. *Тогда если* $f \in L_1^{\overline{\psi}} \overset{\text{df}}{=} L^{\psi}L^0$, *то при любом* $n \in N$ *почти в каждой точке* x *выполняется равенство* (90); *при этом справедливы оценки* (91) *при условии замены в них* $\|\cdot\|_C$ *на* $\|\cdot\|_1$.

Если $f \in L^{\overline{\psi}}H_{\omega_1}$, *то при любых* $n \in N$ *почти в каждой точке* x *выполняется равенство* (90′) *и оценки* (91′), *если в последних заменить* $\|\cdot\|_C$ *на* $\|\cdot\|_1$.

Если же $f \in L^{\psi}$, *то при любом* $n \in N$ *почти всюду справедливо равенство* (90″) *и оценки* (91′), *если в последних опять заменить* $\|\cdot\|_C$ *на* $\|\cdot\|_1$.

Продолжая следовать схеме рассуждений, изложенных в п. 4, получаем аналог следствия 3.

Лемма 5. *Пусть* $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (181). *Тогда если* $f \in L_1^{\overline{\psi}}$, *то при любом* $n \in N$ *почти всюду*

$$\rho_n(f;x) = \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\ge\alpha(n)} f^{\overline{\psi}}(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n). \tag{189}$$

Если же $f \in L^{\overline{\psi}}H_{\omega}$, *то при любом* $n \in N$ *почти всюду*

$$\rho_n(f;x) = \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\ge\alpha(n)} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{190}$$

Если же $f \in L^{\psi}$, *то при любом* $n \in N$ *почти всюду*

$$\rho_n(f;x) = \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{|t|\ge\alpha(n)} (f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1. \tag{191}$$

В равенствах (189)–(191)

$$\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}, \quad \alpha(n) = (\eta(\psi_1;n) - n)^{-1},$$

$$\gamma_n = \operatorname{arctg}\frac{\psi_1(n)}{\psi_2(n)}$$

и $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n. *В соотношениях* (189)–(191) *вместо* $\alpha(n)$ *можно использовать величину* $\alpha'(n) = (\eta(\psi_2; n) - n)^{-1}$.

Рассматривая верхние грани на множествах $L_1^{\overline{\Psi}}$ и $L^{\overline{\Psi}}H_{\omega_1}$ обеих частей соответственно равенств (189) и (190) и учитывая, что, как показано в [3, с. 146–151],

$$\sup_{\varphi\in S_1}\left\|\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}\varphi(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt\right\|_1 = \frac{4}{\pi}\ln^+\frac{n\pi}{\alpha(n)} + O(1) \tag{192}$$

и

$$\sup_{\varphi\in H_{\omega_1}}\left\|\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt\right\|_1 =$$

$$= \frac{20}{\pi}\ln\frac{n\pi}{\alpha(n)}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{192'}$$

получаем равенства (182) и (183), что и завершает доказательство теоремы.

Чтобы доказать теорему $8'$, сначала заметим, что вследствие леммы 4 и следствия 5 справедлив аналог соотношения (128):

$$\mathscr{E}_n(L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}) = \sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}\left\|-\frac{\psi_1(n)}{\pi}\cdot\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}\hat{\varphi}(x-t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\,+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\alpha'(n)}\hat{\varphi}(x-t)\frac{\cos nt}{t}\,dt\right\|_1 + O(1)\overline{\psi}(n)v_n(\mathfrak{N}), \tag{193}$$

где $\hat{\varphi}(x-t) = \varphi(x-t)$ и $v_n(\mathfrak{N}) = 1$, если $\mathfrak{N} = S_1$, и $\hat{\varphi}(x-t) = \varphi(x-t) - \varphi(x)$ и $v_n(\mathfrak{N}) = \omega(1/n)$, если $\mathfrak{N} = H_{\omega_1}$.

Поэтому, учитывая соотношения (192), (192′) и (193), а также оценку (130), и повторяя рассуждения, с помощью которых в п. 4 завершалось доказательство теоремы $4'$, получаем оценки (182′) и (183′). Утверждение теоремы $8''$ следует из теоремы $8'$ аналогично тому, как из теоремы $4'$ вытекает утверждение теоремы $4''$.

Для установления оценки (186) воспользуемся равенством (191), положив в нем $t_{n-1}(\cdot) = t^*_{n-1}(\cdot)$, где $t^*_{n-1}(\cdot)$ — полином из $\mathcal{F}_{n-1}$, осуществляющий наилучшее приближение производной $f^{\overline{\Psi}}(\cdot)$ в пространстве L. Тогда для каждой $f\in L^{\overline{\Psi}}$ при любом $n\in N$ найдем

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \leq \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\left\|\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}(f^{\overline{\Psi}}(x-t) - f^{\overline{\Psi}}(x))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt\right\|_1 +$$

$$+ O(1)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\Psi})_1. \tag{194}$$

В [4, с. 509] показано, что если $n\alpha(n)\geq\alpha_0>0$, то для каждой $\varphi\in L$

$$\left\|\int\limits_{|t|\geq\alpha(n)}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\,dt\right\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi} E_n(\varphi)_1 \ln^+ \frac{n\pi}{\alpha(n)} + O(1)\, E_n(\varphi)_1 . \tag{195}$$

Сопоставляя оценки (194) и (195), получаем неравенство (186). Выписав аналог соотношения (137) и на основании неравенства (195) получив аналоги в пространстве L оценок (138) и (138′), придем к оценке (187). Неулучшаемость константы $4/\pi^2$ в неравенствах (186) и (187) следует из равенств (182) и (182′).

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101–136.
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР. – 1984. – **277**, № 5. – С. 1074–1077.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 449–510.
5. *Salem R.* Essais sur les séries trigonometriques // Actual. Sci. et Industr. – 1940. – № 862.
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
8. *Nagy B.* Sur une classe générale de procèdes de sommation pour les séries de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – **1**, № 3. – P. 14–62.
9. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **2**. – С. 61–97.
10. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102–112.
11. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210–222.
12. *Колмогоров А. Н.* Zur Crossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 521–526.
13. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1–76.
14. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1948. – **12**, № 3. – С. 259–278.
15. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Там же. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243–296.
16. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
17. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
18. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах целых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 783–789.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в средах // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
20. *Бердышев В. И.* Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Там же. – 1965. – **29**, № 3. – С. 505–526.
21. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchée des fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz // Bull. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184–210.
22. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегрирования. – М.: Наука, 1964. – 228 с.
23. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510–518.

Получено 15.05.96