УДК 519.21

В. Н. Коваль, Ю. В. Кук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ПРОВЕРКА МНОГИХ ГИПОТЕЗ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНОЙ РАСШИРЕННОЙ НЕРАНДОМИЗИРОВАННОЙ ПРОЦЕДУРЫ

A new procedure is suggested for the test of hypothesis by using optimal statistical criteria.

Запропоновано нову процедуру для перевірки гіпотез за допомогою оптимальних статистичних критеріїв.

В данной работе вводится новое понятие расширенной нерандомизированной процедуры. Необходимость его введения обусловлена вычислительными соображениями с целью упрощения вычислений при проверке многих гипотез и построении процедур проверки, которые можно было бы использовать на практике. Данное понятие апробируется на общей оптимальной процедуре проверки гипотез в смысле Ю. И. Петунина [1].

В статье рассматриваются методы оптимального выбора одной из нескольких возможных гипотез на основе информации, представленной в виде вектора $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, компоненты которого представляют собой полезную информацию, искаженную случайными нормальными возмущениями. Возмущающими факторами могут быть погрешности измерительных приборов, шумы при передаче информации и т. п. Общая оптимальная процедура проверки многих гипотез была предложена Ю. И. Петуниным [1]. Эта процедура обобщает классический метод Неймана – Пирсона [2] проверки одной основной гипотезы при наличии одной конкурирующей гипотезы. Частными случаями этой общей оптимальной процедуры являются широко известные байесовская и минимаксная процедура проверки гипотез.

В статьях [1, 3] определены структуры критических функций оптимальных статистических критериев, а в случаях нерандомизированных процедур — структуры множеств, определяющих эти процедуры. Однако применение оптимальных методов на практике вызывает затруднения, обусловленные сложностью этих структур. Упрощение этих структур является основной целью данной статьи.

1. Пусть совместное распределение выборки $x_1, \ldots, x_n$ принадлежит параметрическому семейству $\mathfrak{F} = \{F_j, \ j = \overline{0, N}\}$. Будем предполагать, что гипотезе H_j соответствует распределение F_j.

Обозначим через T, $T \in R_m$, достаточную статистику для семейства $\mathfrak{F}$ [2]. Рассмотрим важный для практики случай, когда статистика T при справедливости гипотезы H_j, $j = \overline{0, N}$, имеет общую многомерную нормальную плотность $f_j(t)$, $t \in R_m$, по мере Лебега

$$f_j(t) = (2\pi)^{-m/2} (\det K_j)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t - \bar{\mu}_j)' K_j^{-1} (t - \bar{\mu}_j)\right\}, \qquad (1)$$

где K_j — невырожденная корреляционная матрица вектора T, $\bar{\mu}_j = (\mu_j(1), \ldots, \mu_j(m))$ — математическое ожидание T, штрих обозначает операцию транспонирования матрицы.

Обычно процедуры проверки гипотез строятся двух видов: нерандомизированные и рандомизированные. Нерандомизированная процедура принятия гипотезы состоит в разбиении пространства R_m на $N + 1$ непересекающихся измеримых множества $V_0, \ldots, V_N$; если статистика T в результате эксперимента попадает в область V_j, то принимается гипотеза H_j, а остальные отклоняются.

Более общая рандомизированная процедура осуществляется с помощью задания в пространстве R_m измеримой векторной функции

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_N(t)), \quad \varphi_j(t) \geq 0, \quad j = \overline{0, N},$$

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(t) = 1,$$

которая называется критической функцией [2]. Для принятия гипотезы производится дополнительный случайный эксперимент, результатом которого является одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, N$, выпадающих соответственно с вероятностями $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_N(t)$, где t — значение, которое принимает статистика T в результате наблюдения. При выпадении j-го числа принимается гипотеза H_j, а остальные отклоняются.

Определение 1. *Процедуру проверки конкурирующих гипотез* $H_0, \ldots, H_N$ *назовем расширенной нерандомизированной процедурой, если поочередно проверяется каждая из гипотез следующим образом. На* i*-м шаге проверяется истинность или ложность гипотезы* H_i. *Для этого пространство* R_m *преобразуется с помощью некоторого отображения* $\mathfrak{L}_i$ *в пространство* R_k, $k \geq m$, *при этом вектор значений достаточной статистики* $T \in R_m$ *преобразуется во вспомогательный вектор* $\hat{Y}_i \in R_k$. *Кроме того, строится система множеств* $W_j \subset R_k$, $j = \overline{0, N}$, *таких, что их прообразы* $V_j = \mathfrak{L}_j^{-1}(W_j)$, $j = \overline{0, N}$, *образуют непересекающиеся измеримые множества в* R_m, $\bigcup_{j=0}^{N} V_j = R_m$. *Если на* i*-м шаге вектор* $\hat{Y}_i$ *попадает в* W_i, *то принимается гипотеза* H_i, *и процедура проверки гипотез заканчивается. В противном случае гипотеза* H_i *отклоняется и переходят к проверке гипотезы* H_{i+1} *аналогичным образом на* $(i+1)$*-м шаге.*

Легко видеть, что обычная нерандомизированная процедура является частным случаем расширенной нерандомизированной процедуры. Действительно, для этого в расширенной нерандомизированной процедуре выберем в качестве $\mathfrak{L}_i$ тождественное преобразование. Тогда $V_i = W_i$, $\hat{Y}_i = T$, $i = \overline{0, N}$.

Легко также видеть, что расширенная нерандомизированная процедура является частным случаем рандомизированной процедуры с критической функцией $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_N(t))$, заданной в пространстве R_m, с компонентами

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in V_i = \mathfrak{L}_i^{-1}(W_i); \\ 0 & \text{при} \quad t \overline{\in} V_i = \mathfrak{L}_i^{-1}(W_i). \end{cases}$$

Отметим, что в отличие от обычной нерандомизированной процедуры объединение множеств W_i, $i = \overline{0, N}$, в расширенной нерандомизированной процедуре может не совпадать со всем пространством R_k. Действительно, пусть, например, для проверки 3-х гипотез H_0, H_1, H_2 используется одномерная достаточная статистика T и нерандомизированный критерий с системой критических множеств $V_0 = (-\infty, a)$, $V_1 = [a, b]$, $V_2 = (b, \infty)$, $V_i \in R_1$, $i = \overline{0, 2}$.

Рассмотрим расширенный нерандомизированный критерий со следующей системой множеств в пространстве R_2:

$$W_0 = (-\infty, a) \times (-\infty, a), \quad W_1 = [a, b] \times [a, b], \quad W_2 = (b, \infty) \times (b, \infty),$$

где $\times$ — знак прямого произведения множеств. В качестве отображений $\mathfrak{L}_i$ возьмем следующие отображения: $\mathfrak{L}_0$ отображает $x \in R_1$ в $x \times (-\infty, a) \in R_2$, $\mathfrak{L}_1 : x \in R_1$ в $x \times [a, b] \in R_2$, $\mathfrak{L}_2 : x \in R_1$ в $x \times (b, \infty) \in R_2$. Легко видеть, что $\mathfrak{L}_i^{-1}(W_i) = V_i$, $i = \overline{0, 2}$, $\bigcup_{i=0}^{2} W_i$ не равно R_2, хотя $\bigcup_{i=0}^{2} V_i = R_1$.

Отметим также, что в отличие от обычной нерандомизированной процедуры в расширенной нерандомизированной процедуре множества W_i, $i = \overline{0, N}$, могут пересекаться и даже совпадать в пространстве R_k. Для иллюстрации этого несколько изменим приведенный выше пример. Пусть для проверки 3-х гипотез H_i, $i = \overline{0, 2}$, используются одномерная достаточная статистика $T \in R_1$ и нерандомизированный критерий с системой критических множеств $V_0 = (-\infty, 0] \bigcup (2, \infty)$, $V_1 = (0, 1]$, $V_2 = (1, 2]$. Рассмотрим расширенный нерандомизированный критерий со следующей системой множеств в пространстве R_2:

$$W_0 = V_0 \times V_0, \quad W_1 = W_2 = (0, 1] \times (0, 1].$$

В качестве отображений $\mathfrak{L}_i$, $i = \overline{0, 2}$, возьмем следующие отображения: $\mathfrak{L}_0$ отображает $x \in R_1$ в $x \times V_0 \in R_2$, $\mathfrak{L}_1 : x \in R_1$ в $x \times (0, 1] \in R_2$, $\mathfrak{L}_2 : x \in R_1$ в $(x-1) \times (0, 1] \in R_2$.

Легко видеть, что прообразы $\mathfrak{L}_i^{-1}(W_i) = V_i$, $i = \overline{0, 2}$, $V_i \bigcap V_j = \varnothing$, $i \neq j$. Но $W_1 = W_2$. Хотя эти множества совпадают, однако при проверке гипотез H_1 и H_2 используют различные образы достаточной статистики T. В первом случае $\mathfrak{L}_1 T$, во втором $\mathfrak{L}_2 T$, поэтому получают те же результаты, что и при использовании обычного нерандомизированного критерия.

Суть использования расширенной нерандомизированной процедуры вместо обычной нерандомизированной и рандомизированной процедур состоит в том, что выбором отображений $\mathfrak{L}_i$, $i = \overline{0, N}$, можно добиться существенного упрощения структуры областей W_i, $i = \overline{0, N}$, расширенного нерандомизированного критерия по сравнению с V_i, $i = \overline{0, N}$, фигурирующими в обычном нерандомизированном критерии, что важно для практики.

Обозначим через $L_i(j)$, $i, j = \overline{0, N}$, $i \neq j$, неотрицательные числа, определяющие потери, связанные с принятием гипотезы H_i, когда на самом деле справедлива гипотеза H_j. Пусть $P(H_i \mid H_j)$ — вероятность принятия гипотезы H_i при условии, что верна гипотеза H_j. Рассмотрим вектор риска $r_\varphi = (r_\varphi(0), \ldots, r_\varphi(N))$, где

$$r_\varphi(j) = M_j L_i(j) = \sum_{i=0,\, i \neq j}^{N} L_i(j) P(H_i | H_j).$$

Здесь M — знак математического ожидания. Пусть $\| u \|$ — произвольная норма, определенная в $(N+1)$-мерном векторном пространстве E_{N+1}, а Φ — множество всех критических функций. Согласно [1] будем говорить, что критерий для проверки альтернативных гипотез H_i, $i = \overline{0, N}$, отвечающий критической функции φ^*, является оптимальным статистическим критерием по норме $\| u \|$, $u \in E_{N+1}$, если норма вектора риска r_{φ^*} минимальна в классе всех критериев, соответствующих критическим функциям $\varphi \in \Phi$:

$$\| r_{\varphi^*} \| = \inf_{\varphi \in \Phi} \| (r_\varphi(0), \ldots, r_\varphi(N)) \|.$$

Теорема 1. *Пусть гипотезе H_i, $i = \overline{0, N}$, соответствует многомерная* *нормальная плотность $f_i(t)$ достаточной статистики T с корреляционной матрицей K_i. Предположим, что потери не зависят от i: $L_i(j) = L_j$, $i \neq j$. Тогда для любой нормы, определенной в пространстве E, существует оптимальный статистический критерий, проверяющий истинность конкурирующих альтернативных гипотез $H_0, \ldots, H_N$ в форме расширенной нерандомизированной процедуры, которая строится следующим образом:*

1) *на i-м шаге при проверке истинности гипотезы H_i достаточная статистика T преобразовывается в вектор из пространства R_{mN}:*

$$\hat{Y}_i = (\hat{Y}_i(0),\ldots, \hat{Y}_i(i-1), \hat{Y}_i(i+1),\ldots, \hat{Y}_i(N)), \tag{2}$$

компоненты которого являются векторами из пространства R_m и вычисляются по формуле

$$\hat{Y}_i(j) = A_i(j)(T-\overline{\mu}_i), \qquad \hat{Y}_i(j) \in R_m, \tag{3}$$

где матрица $A_i(j)$ удовлетворяет условиям

$$A_i(j)\,K_i\,A_i'(j) = I, \qquad A_i(j)\,K_j\,A_i'(j) = \Lambda_{ij}; \tag{4}$$

здесь I — единичная матрица, Λ_{ij} — диагональная матрица, элементами которой являются корни $\lambda_{ij}(1), \ldots, \lambda_{ij}(m)$, $\lambda_{ij}(1) \geq \ldots \geq \lambda_{ij}(m)$, характеристического уравнения $\det(K_i - \lambda K_j) = 0$, штрих обозначает операцию транспонирования;

2) *множество $W_i \subset R_{mN}$ имеет следующую структуру:*

$$W_i = \{\, Y_i,\ Y_i = (Y_i(0), \ldots, Y_i(i-1), Y_i(i+1), \ldots, Y_i(N))\,\}, \tag{5}$$

где компоненты $y_{ij}(\nu)$ вектора $Y_i(j)$ удовлетворяют условию

$$\ln\frac{\alpha_i L_i}{\alpha_j L_j} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\left[y_{ij}^2(\nu) - \ln\lambda_{ij}(\nu) - \frac{[y_{ij}(\nu)-m_{ij}(\nu)]^2}{\lambda_{ij}(\nu)}\right] > 0; \tag{6}$$

здесь $m_{ij}(\nu)$ — ν-я компонента вектора $\overline{m}_{ij} = A_i(j)(\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j)$, α_i — числа, зависящие от вида нормы в пространстве E_{N+1}.

Доказательство. В силу теоремы 3 из [1] для любой нормы, определенной в пространстве E_{N+1}, существует рандомизированный оптимальный статистический критерий, проверяющий истинность конкурирующих гипотез $H_0, \ldots$ $\ldots, H_N$, который задается критической функцией

$$\varphi_i^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad G_i(t) < G_j(t),\ j=\overline{0,N},\ j\neq i; \\ d_{l1,\ldots,lk}(i), & \text{если} \quad G_i(t) = G_{l1}(t) = \ldots = G_{lk}(t) < G_j(t), \\ & \qquad j=\overline{0,N},\ j\neq i\neq l1 \neq \ldots \neq lk; \\ 0 \quad — & \text{в остальной части пространства} \quad R_m, \end{cases} \tag{7}$$

где $G_k(t) = \sum_{\nu=0}^{N} L_k(\nu) f_\nu(t)\alpha_\nu$; α_ν, $\nu = \overline{0,N}$, — числа, зависящие от вида нормы в E_{N+1}; $d_{l1,\ldots,lk}(i)$ — положительные числа, определяемые нормой в E_{N+1} и удовлетворяющие условиям, указанным в данной теореме.

Покажем прежде всего, что рассматриваемый оптимальный статистический критерий является нерандомизированным. Из (7) следует, что для этого достаточно доказать, что вероятность попадания достаточной статистики T во множество

$$U_{ij} = \{ t:\ G_i(t) = G_j(t),\ i \neq j \}, \quad i, j = \overline{0, N}, \tag{8}$$

равна нулю.

Поскольку потери $L_i(j) = L_j$, $i, j = \overline{0, N}$, $i \neq j$, то (8) преобразуется к виду

$$U_{ij} = \{ t:\ \alpha_i L_i f_i(t) = \alpha_j L_j f_j(t),\ i \neq j \}, \quad i, j = \overline{0, N}. \tag{9}$$

Принимая во внимание (1), из (9) получаем

$$U_{ij} = \{ t:\ -0{,}5 \ln \det K_i - 0{,}5 (t - \overline{\mu}_i)' K_i^{-1} (t - \overline{\mu}_i) + \ln(\alpha_i L_i) =$$
$$= -0{,}5 \ln \det K_j - 0{,}5 (t - \overline{\mu}_j)' K_j^{-1} (t - \overline{\mu}_j) + \ln(\alpha_j L_j) \}. \tag{10}$$

Легко видеть, что множество (10) представляет собой гиперповерхность в R_m, лебегова мера которой равна нулю, и, следовательно, вероятность попадания статистики T, распределенной нормально, в это множество равна нулю.

Таким образом, оптимальный статистический критерий является нерандомизированным и порождается областями $V_0, \ldots, V_N$, где

$$V_i = \{ t:\ G_i(t) < G_j(t),\ j = \overline{0, N},\ j \neq i \}, \quad i = \overline{0, N}. \tag{11}$$

Построим теперь расширенный нерандомизированный критерий, выбрав отображения $\mathfrak{L}_i$, $i = \overline{0, N}$, такими, чтобы получить образы $W_i = \mathfrak{L}_i V_i$, имеющие более простую структуру по сравнению с (11). Поскольку корреляционные матрицы K_i и K_j являются положительно определенными и невырожденными по условию, то существует такая матрица $A_i(j)$ [4], для которой выполняются следующие условия:

$$A_i(j) K_i A_i'(j) = I, \qquad A_i(j) K_j A_i'(j) = \Lambda_{ij}, \tag{12}$$

где I — единичная матрица, Λ_{ij} — диагональная матрица, элементами которой являются корни $\lambda_{ij}(1), \ldots, \lambda_{ij}(m)$, $\lambda_{ij}(1) \geq \ldots \geq \lambda_{ij}(m)$, характеристического уравнения

$$\det(K_i - \lambda K_j) = 0.$$

На i-м шаге рассмотрим следующие линейные преобразования пространства R_m. Сопоставим вектору $t \in R_m$ N векторов

$$Y_i(j) = A_i(j)(t - \overline{\mu}_j), \qquad Y_i(j) \in R_m, \quad j = \overline{0, N}, \quad i \neq j.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_i$ отображение пространства R_m в R_{mN} при котором каждому вектору t ставится в соответствие вектор

$$Y_i = \{ Y_i(0), \ldots, Y_i(i-1), Y_i(i+1), \ldots, Y_i(N) \}.$$

При этом отображении достаточная статистика T перейдет в вектор $\hat{Y}_i$ с компонентами, которые представляют векторы $\hat{Y}_i(j) = A_i(j)(T - \overline{\mu}_j)$. Построим теперь множество $W_i \subset R_{mN}$, при попадании в которое вектора $\hat{Y}_i$ принимается решение о справедливости гипотезы H_i; в противном случае — случае непопадания — эта гипотеза отклоняется и переходят к следующему $(i+1)$-му шагу, на котором аналогичным образом проверяется гипотеза H_{i+1} и т. д. Учитывая, что потери $L_i(j) = L_j$, $i, j = \overline{0, N}$, $i \neq j$, не зависят от i, (11) можно преобразовать к виду

$$V_i = \{ t:\ \alpha_i L_i f_i(t) > \alpha_j L_j f_j(t),\ j = \overline{0, N},\ j \neq i \}, \qquad i = \overline{0, N}. \tag{13}$$

Из (12) находим

$$K_i^{-1} = A_i'(j) A_i(j), \qquad K_j^{-1} = A_i'(j) \Lambda_{ij}^{-1} A_i(j).$$

Поэтому (13) можно записать в виде

$$\begin{gathered} V_i = \{ t:\ -0{,}5 \ln \det K_i - 0{,}5 [A_i(j)(t - \overline{\mu}_i)]' [A_i(j)(t - \overline{\mu}_i)] + \ln(\alpha_i L_i) > \\ > -0{,}5 \ln \det K_j - 0{,}5 [A_i(j)(t - \overline{\mu}_j)]' \Lambda_{ij}^{-1} [A_i(j)(t - \overline{\mu}_j)] + \ln(\alpha_j L_j), \\ j = \overline{0, N},\ j \neq i \}, \qquad i = \overline{0, N}. \end{gathered} \tag{14}$$

При отображении $\mathfrak{L}_i$ множество $V_i \subset R_m$ перейдет в $W_i \subset R_{mN}$:

$$W_i = \{ Y_i:\ Y_i = (Y_i(0), \ldots, Y_i(i-1), Y_i(i+1), \ldots, Y_i(N)) \}, \tag{15}$$

где векторы $Y_i(j) \in R_m$ удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} -0{,}5 \ln \det K_i - 0{,}5\, Y_i'(j) Y_i(j) + \ln(\alpha_i L_i) > \\ > -0{,}5 \ln \det K_j - 0{,}5 [Y_i(j) - A_i(j)(\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j)]' \Lambda_{ij}^{-1} [Y_i(j) - A_i(j)(\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j)] + \\ + \ln(\alpha_j L_j), \qquad j \neq i. \end{gathered}$$

Сравнивая (14) и (15), заключаем, что статистика $\hat{Y}_i$ попадает во множество W_i в том и только в том случае, когда исходная статистика T попадает во множество V_i оптимального статистического критерия. Таким образом, при расширенном нерандомизированном оптимальном статистическом критерии гипотеза H_i принимается, когда на i-м шаге $\hat{Y}_i$ попадает в W_i, и отклоняется — в противном случае.

Поскольку $\bigcup_{i=0}^{N} V_i = R_m$, $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$, то T обязательно попадет в какое-то V_i, а следовательно, $\hat{Y}_i$ попадет в W_i на i-м шаге. Таким образом, в результате проведения расширенной нерандомизированной процедуры будет принята одна из гипотез.

Перепишем (15) в виде

$$W_i = \{ Y_i:\ Y_i = (Y_i(0), \ldots, Y_i(i-1), Y_i(i+1), \ldots, Y_i(N)) \},$$

где $Y_i(j)$ удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} -0{,}5 \ln \frac{\det K_i}{\det K_j} + \ln \frac{\alpha_i L_i}{\alpha_j L_j} > \\ > 0{,}5\, Y_i'(j) Y_i(j) - 0{,}5 [Y_i(j) - \overline{m}_{ij}]' \Lambda_{ij}^{-1} [Y_i(j) - \overline{m}_{ij}], \end{gathered} \tag{16}$$

$$\overline{m}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_i(j)(\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_j).$$

Учитывая, что Λ_{ij}^{-1} — диагональная матрица с элементами на диагонали, равными $\lambda_{ij}^{-1}(\nu)$, из (16) получаем

$$W_i = \{ Y_i:\ Y_i = (Y_i(0), \ldots, Y_i(i-1), Y_i(i+1), \ldots, Y_i(N)) \}, \tag{17}$$

где компоненты вектора $Y_i(j)$ удовлетворяют условию

$$-0,5\ln\frac{\det K_i}{\det K_j}+\ln\frac{\alpha_i L_i}{\alpha_j L_j}>$$

$$>0,5\sum_{\nu=1}^{m} y_{ij}^2(\nu)-0,5\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{ij}^{-1}(\nu)\big(y_{ij}(\nu)-m_{ij}(\nu)\big)^2,\quad j=\overline{0,N},\quad j\neq i.$$

Отсюда вытекает формула (6) утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример построения оптимальной расширенной нерандомизированной процедуры.

***Пример* 1.** Пусть проверяются три гипотезы H_0, H_1, H_2 и гипотезе H_i соответствует двумерная нормальная плотность достаточной статистики T с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$K_i=\begin{pmatrix}1 & \rho_i\\ \rho_i & 1\end{pmatrix},\quad i=\overline{0,2},$$

где $0\le\rho_i\le 1$. Требуется построить расширенный нерандомизированный критерий, оптимальный по норме пространства l_1 (l_1-критерий) при одинаковых потерях $L_i(j)=L$, $i,j=\overline{0,2}$, $i\neq j$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(K_i-\lambda K_j)=\begin{vmatrix}1-\lambda & \rho_i-\lambda\rho_j\\ \rho_i-\lambda\rho_j & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad i,j=\overline{0,2},\quad i\neq j.$$

Это уравнение имеет два корня

$$\lambda_1=\frac{1-\rho_i}{1-\rho_j},\quad \lambda_2=\frac{1+\rho_i}{1+\rho_j}.$$

Матрица $A_i(j)$, фигурирующая в теореме 1, это главная матрица для пучка квадратичных форм, определяемого матрицами K_i и K_j [4].

Пусть

$$A_i(j)=\begin{pmatrix}a'_{ij}(0) & a'_{ij}(1)\\ a''_{ij}(0) & a''_{ij}(1)\end{pmatrix},\quad i,j=\overline{0,2},\quad i\neq j.$$

Векторы

$$a'_i(j)=\big(a'_{ij}(0),a'_{ij}(1)\big),\qquad a''_i(j)=\big(a''_{ij}(0),a''_{ij}(1)\big)$$

являются главными векторами. Координаты главных векторов, стоящих в строках матрицы, находятся из системы однородных уравнений, коэффициенты которых совпадают с элементами определителя $K_i-\lambda K_j$ при λ, равном соответствующему характеристическому числу:

$$(1-\lambda)a_{ij}(0)+(\rho_i-\lambda\rho_j)a_{ij}(1)=0,$$

$$(\rho_i-\lambda\rho_j)a_{ij}(0)+(1-\lambda)a_{ij}(1)=0.$$

Отсюда получаем

$$a_{ij}(0)=-\frac{\rho_i-\lambda\rho_j}{1-\lambda}a_{ij}(1).$$

При $\lambda=\lambda_1$ имеем координаты 1-го главного вектора $a'_i(j)=\big(a'_{ij}(0),a'_{ij}(1)\big)$, где $a'_{ij}(0) = -a'_{ij}(1)$. При $\lambda = \lambda_2$ имеем координаты 2-го главного вектора $a''_i(j) = (a''_{ij}(0), a''_{ij}(1))$, где $a''_{ij}(0) = -a''_{ij}(1)$.

Для окончательного определения матрицы $A_i(j)$ воспользуемся условием $A_i(j) K_i A'_i(j) = I$. Отсюда

$$\begin{pmatrix} 2(a'_{ij}(0))^2 (1-\rho_i) & 0 \\ 0 & 2(a''_{ij}(0))^2 (1+\rho_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $a'_{ij}(0) = 1/\sqrt{2-2\rho_i}$, $a''_{ij}(0) = 1/\sqrt{2+2\rho_i}$. Таким образом,

$$A_i(j) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\rho_i)}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2(1-\rho_i)}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2(1+\rho_i)}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2(1+\rho_i)}} \end{pmatrix}.$$

Пусть координаты достаточной статистики T равны $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$. При проверке гипотезы H_i на i-м шаге по вектору T строятся два вектора

$$\hat{Y}_i(j) = A_i(j) T, \quad j = \overline{0,2}, \quad j \neq i.$$

Координаты векторов $\hat{Y}_i(j)$, $j = \overline{0,2}$, $j \neq i$, равны

$$\hat{y}_{ij}(1) = \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_i)}}, \qquad \hat{y}_{ij}(2) = \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_i)}}.$$

Из векторов $\hat{Y}_i(j)$ строится вектор $\hat{Y}_i$, координаты которого равны координатам векторов $\hat{Y}_i(j)$, $j = \overline{0,2}$, $j \neq i$:

$$\hat{Y}_i = (\hat{Y}_i(0), \ldots, \hat{Y}_i(i-1), \hat{Y}_i(i+1), \ldots, \hat{Y}_i(N)), \qquad N = 2.$$

Таким образом, достаточная статистика T на i-м шаге преобразовывается в вектор $\hat{Y}_i \in R_4$. Имеем

$$\hat{Y}_0 = \left(\frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_0)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_0)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_0)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_0)}} \right),$$

$$\hat{Y}_1 = \left(\frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_1)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_1)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_1)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_1)}} \right),$$

$$\hat{Y}_2 = \left(\frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_2)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_2)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1-\rho_2)}}, \quad \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2}{\sqrt{2(1+\rho_2)}} \right).$$

Согласно теореме 1 на i-м шаге проверяется условие (6) для координат $\hat{Y}_i = (\hat{y}_{i0}, \hat{y}_{i1}, \hat{y}_{i2}, \hat{y}_{i3})$. Если оно выполняется, то принимается гипотеза H_i, в противном случае гипотеза H_i отклоняется и переходят к проверке гипотезы H_{i+1} на $(i+1)$-м шаге. Для критерия, оптимального по норме пространства l_1, числа α_j в условии (6) равны 1 [1]. Поэтому (6) можно записать в виде

$$\hat{y}_{ij}^2(1) \frac{\rho_j - \rho_i}{1-\rho_i} + \hat{y}_{ij}^2(2) \frac{\rho_i - \rho_j}{1+\rho_i} < \ln \frac{1-\rho_i^2}{1+\rho_j^2}, \qquad j = \overline{0,2}, \quad j \neq i. \tag{18}$$

Так как $\hat{Y}_i = (\hat{y}_{ij}(\nu),\ j = \overline{0,2},\ j \neq i,\ \nu = 1,2) = (\hat{y}_{i0}, \hat{y}_{i1}, \hat{y}_{i2}, \hat{y}_{i3})$, отсюда получаем следующие условия для координат вектора $\hat{Y}_i$ при проверке гипотез с помощью оптимального расширенного нерандомизированного критерия. При проверке H_0 на 0-м шаге:

$$\begin{aligned} &\hat{y}_{00}^2 \frac{\rho_1-\rho_0}{1-\rho_0} + \hat{y}_{01}^2 \frac{\rho_0-\rho_1}{1+\rho_0} < \ln\frac{1-\rho_0^2}{1-\rho_1^2}, \\ &\hat{y}_{02}^2 \frac{\rho_2-\rho_0}{1-\rho_0} + \hat{y}_{03}^2 \frac{\rho_0-\rho_2}{1+\rho_0} < \ln\frac{1-\rho_0^2}{1-\rho_2^2}; \end{aligned} \tag{19}$$

при проверке H_1 на 1-м шаге

$$\begin{aligned} &\hat{y}_{10}^2 \frac{\rho_0-\rho_1}{1-\rho_1} + \hat{y}_{11}^2 \frac{\rho_1-\rho_0}{1+\rho_1} < \ln\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_0^2}, \\ &\hat{y}_{12}^2 \frac{\rho_2-\rho_1}{1-\rho_1} + \hat{y}_{13}^2 \frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_1} < \ln\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_2^2}; \end{aligned} \tag{20}$$

при проверке H_2 на 2-м шаге

$$\begin{aligned} &\hat{y}_{20}^2 \frac{\rho_0-\rho_2}{1-\rho_2} + \hat{y}_{21}^2 \frac{\rho_2-\rho_0}{1+\rho_2} < \ln\frac{1-\rho_2^2}{1-\rho_0^2}, \\ &\hat{y}_{22}^2 \frac{\rho_1-\rho_2}{1-\rho_2} + \hat{y}_{23}^2 \frac{\rho_2-\rho_1}{1+\rho_2} < \ln\frac{1-\rho_2^2}{1-\rho_1^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

2. Рассмотрим теперь частный случай проверки многих гипотез $H_0, \ldots, H_N$ по выборке $x_1, \ldots, x_n$, когда достаточная статистика T при справедливости гипотезы H_i имеет общую многомерную нормальную плотность $f_i(t)$, $t \in R_m$, с математическим ожиданием $\overline{\mu}_i$ и невырожденной корреляционной матрицей K_i, которая не зависит от номера гипотезы: $K_i = K$.

Рассмотрим обратную матрицу K_i^{-1}:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mm} \end{pmatrix}.$$

Введем сокращенные обозначения для определителей, составленных из элементов данной матрицы:

$$K^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_{i_1 j_1} & \rho_{i_1 j_2} & \cdots & \rho_{i_1 j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{i_p j_1} & \rho_{i_p j_2} & \cdots & \rho_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$D_p = K^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, \quad p = 1, \ldots, m, \quad D_0 = 1.$$

В рассматриваемом случае теорема 1 допускает упрощение: достаточная статистика T, $T \in R_m$, при проверке гипотезы H_i на i-м шаге преобразуется во вспомогательный вектор $\hat{Y}_i$ из этого же пространства: $\hat{Y}_i \in R_m$. Множества

W_i, $i=\overline{0,N}$, расширенного нерандомизированного критерия, по которым принимаются или отвергаются гипотезы, входят в R_m. Заметим, что в теореме 1 $\hat{Y}_i \in R_{mN}$, а $W_i \subset R_{mN}$, $i=\overline{0,N}$. Хотя множества W_i принадлежат R_m, как и в обычном нерандомизированном критерии, отличие состоит в том, что здесь используются на каждом шаге при проверке гипотез нетождественные преобразования достаточной статистики T во вспомогательные векторы $\hat{Y}_i = \mathfrak{L}_i T$. В связи с этим справедлива следующая теорема, уточняющая теорему 1.

Теорема 2. *Пусть гипотезе H_i, $i=\overline{0,N}$, соответствует многомерная нормальная плотность $f_i(t)$ достаточной статистики T с математическим ожиданием $\overline{\mu}_i = (\mu_i(1), \ldots, \mu_i(m))$ и невырожденной корреляционной матрицей K_i, которая не зависит от номера гипотезы: $K_i = K$. Предположим, что потери $L_i(j)$ не зависят от i: $L_i(j) = L_j$, $i \neq j$. Тогда оптимальный статистический критерий в форме расширенной нерандомизированной процедуры строится следующим образом:*

1) *на i-м шаге при проверке гипотезы H_i достаточная статистика $T = (\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_m)$, $T \in R_m$, преобразовывается в вектор $\hat{Y}_i \in R_m$:*

$$\hat{Y}_i = (\hat{y}_i(1), \ldots, \hat{y}_i(m)), \tag{22}$$

где

$$\hat{y}_i(k) = a_{kk}(\hat{t}_k - \mu_i(k)) + a_{k,k+1}(\hat{t}_{k+1} - \mu_i(k+1)) + \ldots + a_{km}(\hat{t}_m - \mu_i(m)), \tag{23}$$

а числа a_{kq} определяются по формулам

$$a_{kq} = (D_{k-1} D_k)^{-1/2} K^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \ldots & k-1 & q \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$q = k, k+1, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$D_0 = 1;$$

2) *множества $W_i \subset R_m$ расширенного нерандомизированного критерия имеют следующую структуру:*

$$W_i = \{ Y_i,\ Y_i = (y_i(1), \ldots, y_i(m)) \}, \tag{25}$$

где компоненты векторов Y_i удовлетворяют неравенствам

$$\ln \frac{\alpha_i L_i}{\alpha_j L_j} > \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} [2 y_i(\nu) m_{ij}(\nu) - m_{ij}^2(\nu)], \quad j = \overline{0,N}, \quad i \neq j. \tag{26}$$

Здесь

$$m_{ij}(\nu) = a_{\nu\nu}(\mu_i(\nu) - \mu_j(\nu)) + a_{\nu,\nu+1}(\mu_i(\nu+1) - \mu_j(\nu+1)) + \ldots$$
$$\ldots + a_{\nu m}(\mu_i(m) - \mu_j(m)), \tag{27}$$

α_i, $i = \overline{0,N}$, *— числа, зависящие от вида нормы в пространстве E_{N+1}.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму с матрицей коэффициентов K^{-1}:

$$K^{-1}(z,z) = \sum_{i,j=1}^{m} \rho_{ij} z_i z_j = Z' K^{-1} Z.$$

Согласно формуле Якоби [4] эту квадратичную форму можно представить в виде суммы m независимых квадратов:

$$K^{-1}(z, z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\xi_i^2}{D_{i-1} D_i} = \sum_{i=1}^{m} \eta_i^2, \tag{28}$$

где

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{D_{i-1} D_i}}, \quad \xi_i = c_{ii} z_i + c_{i,i+1} z_{i+1} + c_{im} z_m.$$

Коэффициенты c_{iq} определяются по формулам

$$c_{iq} = K^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & q \end{pmatrix},$$

$$q = i, i+1, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

При доказательстве теоремы 1 было показано, что оптимальный статистический критерий является нерандомизированным и порождается областями $V_0, \dots, V_N$, где V_i определяются формулой (13), которую перепишем в виде

$$V_i = \{ t\colon -0{,}5\,(t - \overline{\mu}_i)' K^{-1} (t - \overline{\mu}_i) + \ln(\alpha_i L_i) >$$

$$> -0{,}5\,(t - \overline{\mu}_j)' K^{-1} (t - \overline{\mu}_j) + \ln(\alpha_j L_j),\ j = \overline{0, N},\ j \neq i \}.$$

Принимая во внимание (28), получаем

$$V_i = \left\{ t\colon -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} y_i^2(\nu) + \ln(\alpha_i L_i) > \right.$$

$$\left. > -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} y_j^2(\nu) + \ln(\alpha_j L_j),\ j = \overline{0, N};\ j \neq i \right\}, \tag{29}$$

где

$$y_i(\nu) = (D_{\nu-1} D_\nu)^{-1/2} [c_{\nu\nu} (t_\nu - \mu_i(\nu)) + c_{\nu,\nu+1} (t_{\nu+1} - \mu_i(\nu+1)) + \dots$$

$$\dots + c_{\nu m} (t_m - \mu_j(m))], \quad i = \overline{0, N}. \tag{30}$$

Легко видеть, что

$$y_j(\nu) = y_i(\nu) + (D_{\nu-1} D_\nu)^{-1/2} [c_{\nu\nu} (\mu_i(\nu) - \mu_j(\nu)) +$$

$$+ c_{\nu,\nu+1} (\mu_i(\nu+1) - \mu_j(\nu+1)) + \dots + c_{\nu m} (\mu_i(m) - \mu_j(m))] =$$

$$= y_i(\nu) + m_{ij}(\nu). \tag{31}$$

Из (29) и (31) имеем

$$V_i = \left\{ t\colon \ln \frac{\alpha_i L_i}{\alpha_j L_j} > \right.$$

$$\left. > \sum_{\nu=1}^{m} y_i(\nu) m_{ij}(\nu) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} m_{ij}^2(\nu),\ j = \overline{0, N};\ j \neq i \right\}, \quad i = \overline{0, N}. \tag{32}$$

Перейдем к расширенной нерандомизированной процедуре. На i-м шаге при проверке гипотезы H_i значения достаточной статистики T преобразуем в вектор $\hat{Y}_i$ из того же пространства R_m по формуле (30). Применим то же самое преобразование ко всем векторам множества V_i. В результате множество V_i преобразуется в W_i расширенного нерандомизированного критерия. Сравнивая эти два множества, видим, что гипотеза H_i будет принята или отклонена при использовании расширенного нерандомизированного критерия тогда и только тогда, когда будет принята или отклонена гипотеза H_i в обычном нерандомизированном критерии.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данную теорему.

***Пример* 2.** Пусть проверяются три гипотезы H_0, H_1, H_2 и гипотезе H_i соответствует трехмерная нормальная плотность достаточной статистики T с математическим ожиданием $\overline{\mu}_i = (\mu_i(1), \mu_i(2), \mu_i(3))$ и корреляционной матрицей

$$K_i = K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0,2},$$

где число $\rho > 0$ и удовлетворяет условию положительной определенности K: $\rho < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Требуется построить расширенный нерандомизированный критерий, оптимальный по норме пространства l_1 с весом (π_0, π_1, π_2) при одинаковых потерях $L_i(j) = L > 0$, $i, j = \overline{0,2}$; $i \neq j$.

Решение. Найдем обратную матрицу K^{-1}:

$$K^{-1} = \frac{1}{1-2\rho^2}\begin{pmatrix} 1-\rho^2 & -\rho & \rho^2 \\ -\rho & 1 & -\rho \\ \rho^2 & -\rho & 1-\rho^2 \end{pmatrix}.$$

На i-м шаге при проверке гипотезы H_i достаточная статистика $T = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)$ преобразуется в вектор $\hat{Y}_i = (\hat{y}_i(1), \hat{y}_i(2), \hat{y}_i(3))$. Согласно (23) имеем

$$\hat{y}_i(1) = a_{11}(\hat{t}_1 - \mu_i(1)) + a_{12}(\hat{t}_2 - \mu_i(2)) + a_{13}(\hat{t}_3 - \mu_i(3)),$$

$$\hat{y}_i(2) = a_{22}(\hat{t}_2 - \mu_i(2)) + a_{23}(\hat{t}_3 - \mu_i(3)),$$

$$\hat{y}_i(3) = a_{33}(\hat{t}_3 - \mu_i(3)).$$

Из (24) находим

$$D_1 = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}, \quad D_2 = \frac{1}{1-2\rho^2}, \quad D_3 = \frac{1}{1-2\rho^2},$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{D_1}} K^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-2\rho^2}},$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{D_1}} K^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}},$$

$$a_{13} = \frac{1}{\sqrt{D_1}} K^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \frac{\rho^2}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}},$$

$$a_{22} = \frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}} K^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$a_{23} = \frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}} K^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix} = \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$a_{33} = \frac{1}{\sqrt{D_2 D_3}} K^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 1.$$

По формуле (27) определяем числа $m_{ij}(k)$, $j = \overline{0,2}$; $k = \overline{1,3}$. Поскольку строится критерий, оптимальный по норме пространства l_1 с весом (π_0, π_1, π_2), то, как показано в [1], $\alpha_i = \pi_i$. Для компонент вектора Y_i проверяется неравенство (26), где $L_i = L$.

Если эти неравенства выполняются, то принимается гипотеза H_i, в противном случае гипотезу H_i отклоняют и переходят к проверке аналогичным образом гипотезы H_{i+1} на $(i+1)$-м шаге; при этом числа a_{kq}, $k = \overline{1,m}$; $q = k, k+1, \ldots, m$, вычисляются лишь на нулевом шаге. При последующих шагах они не изменяются.

Таким образом, теоремы 1 и 2 показывают, что расширенная нерандомизированная процедура значительно упрощает структуру множеств, по которым принимается та или иная гипотеза, и является удобным рабочим инструментом построения оптимальных статистических критериев для проверки многих гипотез.

1. *Кук Ю. В., Петунин Ю. И.* Оптимальные статистические критерии // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – **209**, № 4. – С. 298–300.
2. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
3. *Коваль В. Н., Кук Ю. В.* Оптимальные системы обнаружения и классификации движущихся объектов // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – **5**. – С. 137–145.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Получено 23.10.95