УДК 517.5

Т. Н. Бусарова (Днепропетр. тех. ун-т ж.-д. трансп.)

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ОТ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА H^{ω}

An exact estimate is obtained for error of the optimal recovery of integral on a set of functions $f(t)$, which are monotone in $[a, b]$ and possess a convex majorant of the module of continuity under the condition $|f(b) - f(a)| = L > 0$.

Одержано точну оцінку похибки оптимального відновлення інтеграла на множині монотонних на $[a, b]$ функцій $f(t)$ з опуклою мажорантою модуля неперервності при умові $|f(b) - f(a)| = L > 0$.

Задача о наилучшей квадратурной формуле для заданного класса функций исследовалась многими авторами (см., например, [1], где приведена достаточно полная библиография). В большинстве случаев приближенное значение определенного интеграла искалось в виде квадратурной суммы $p_1 f(t_1) + p_2 f(t_2) + \ldots + p_n f(t_n)$, причем узлы t_k и коэффициенты p_k выбирались так, чтобы погрешность приближения на всем классе функций была минимальной.

К решению задачи восстановления интеграла по значениям подынтегральной функции в некоторых точках возможен и другой подход, не связанный с построением квадратурной суммы (см., например, [2, 3]). Этот подход позволяет рассматривать наряду с неадаптивным и адаптивный метод восстановления, когда точки t_k выбираются последовательно, с учетом значений функции $f(t)$ в уже выбранных точках.

Пусть $C = C[a, b]$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$, а $H^{\omega} = H^{\omega}[a, b]$ — класс функций $f(t) \in C$, удовлетворяющий условию

$$|f(t') - f(t'')| \le \omega(|t' - t''|), \qquad t', t'' \in [a, b],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Для этого класса задача о наилучшей квадратурной формуле решена в [4]. Здесь мы рассмотрим задачу оптимального восстановления интеграла

$$\int_a^b f(t)\, dt \tag{1}$$

для класса H_L^{ω} монотонных функций $f(t) \in H^{\omega}$, удовлетворяющих условию $|f(a) - f(b)| = L$, $0 < L < \omega(b - a)$, причем без ограничения общности можно считать, что $f(a) = 0$, $f(b) = L$. Рассмотрение этого класса представляет интерес, в частности, в связи с тем, что при строго выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$ (например, при $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) адаптивные методы восстановления функций $f(t) \in H_L^{\omega}$ в равномерной метрике дают более высокий порядок погрешности, чем неадаптивные [5].

Пусть F — некоторый класс функций $f(t) \in C$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ и для функций $f(t) \in F$ известны значения $f(t_k) = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Множество функций

$$F(\{t_k\}, \{y_k\}) = \{g(t)\colon g \in F,\ g(t_k) = y_k\} \tag{2}$$

есть множество неопределенности для $f(t)$, и если $P(t)$ и $p(t)$ — соответственно верхняя и нижняя границы множества (2) на $[a, b]$, то

$$\int_a^b p(t)\,dt \le \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b P(t)\,dt.$$

Функция $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}(p(t) + P(t))$ является чебышевским центром множества (2), интеграл от нее примем в качестве приближенного значения интеграла (1), при этом

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right| \le \frac{1}{2} \int_a^b [P(t) - p(t)]\,dt. \tag{3}$$

Если функции $p(t)$ и $P(t)$ принадлежат классу F, то при фиксированных векторах $\{t_k\}$ и $\{y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, оценка (3) является точной на этом классе, так как обращается в равенство при $f(t) = p(t)$ или $f(t) = P(t)$. Задача состоит в том, чтобы за счет выбора $\{t_k\}$ и $\{y_k\}$ сделать правую часть (3) минимальной. Ее можно свести к следующей ситуации. Пусть $\psi(t)$ — заданная на отрезке $[0, b-a]$ непрерывная и строго возрастающая фиксированная функция, причем $\psi(0) = 0$, $\psi(b-a) = A$. При $n \ge 2$ будем рассматривать два множества T и H векторов соответственно вида

$$\bar{t} = \{t_k\}_1^{n-1}, \quad a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n = b,$$

$$\bar{h} = \{h_k\}_1^{n-1}, \quad h_k \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} h_k = L < A.$$

При фиксированном векторе $\bar{t} \in T$ с каждой точкой t_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, будем связывать функцию $\psi_k(t) = \psi(|t_k - t|)$, $a \le t \le b$, а с каждым промежутком $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — функцию

$$g_k(t) = \min\{\psi_{k-1}(t), \psi_k(t), h_k\}, \quad t \in \Delta_k. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$S_k = S_k(\Delta_k, h_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(t)\,dt, \quad S = S(\bar{t}, \bar{h}) = \sum_{k=1}^{n} S_k(\Delta_k, h_k) \tag{5}$$

и выделим среди векторов $\bar{t} \in T$ вектор $\bar{t}_0$, у которого $t_k = \dfrac{k(b-a)}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, и среди векторов $\bar{h} \in H$ — вектор $\bar{h}_0$ с равными коэффициентами $\bar{h}_k = \bar{h}_0 = \dfrac{L}{n-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$Q := \inf_{\bar{t} \in T} \sup_{\bar{h} \in H} S(\bar{t}, \bar{h}) = S(\bar{t}_0, \bar{h}_0). \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала

$$\sup_{\bar{h} \in H} S(\bar{t}_0, \bar{h}) = S(\bar{t}_0, \bar{h}_0). \tag{7}$$

Рассуждаем от противного. Предположим вопреки (7), что

$$\sup_{\bar{h} \in H} S(\bar{t}_0, \bar{h}) = S(\bar{t}_0, \bar{h}_1), \qquad \bar{h}_1 \neq \bar{h}_0. \tag{8}$$

Тогда существуют два соседних отрезка $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ и $\Delta_{k+1} = [t_k, t_{k+1}]$ такие, что если $\tau_i = \dfrac{t_{i-1} + t_i}{2}$, то $\| g_k \|_C = g_k(\tau_k) \neq g_{k+1}(\tau_{k+1}) = \| g_{k+1} \|_C$.

Пусть для определенности $g_k(\tau_k) = h_k < g_{k+1}(\tau_{k+1}) < h_{k+1}$ и $h_{k+1} - h_k = = \beta$, где h_k и h_{k+1} — соответствующие координаты вектора $\bar{h}_1$. Положим $h_k^* = h_k + \dfrac{\beta}{2}$, $h_{k+1}^* = h_{k+1} - \dfrac{\beta}{2}$, так что $h_k^* = h_{k+1}^*$, $h_k + h_{k+1} = h_k^* + h_{k+1}^*$. Через $g_k^*(t)$ и $g_{k+1}^*(t)$ будем обозначать функции вида (4) с заменой h_k на h_k^* и h_{k+1} на h_{k+1}^*. Если S_k^* и S_{k+1}^* — соответствующие значения интеграла (5), то очевидно, что $S_k^* > S_k$, $S_{k+1}^* < S_{k+1}$. Так как $t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k$, то в силу строгой монотонности функции $\psi(t)$ выполняется неравенство

$$S_k^* - S_k > S_{k+1} - S_{k+1}^*. \tag{9}$$

Если $\bar{h}_*$ — вектор, полученный из $\bar{h}_1$ заменой h_k и h_{k+1} соответственно на h_k^* и h_{k+1}^*, то из (9) следует, что $S(\bar{t}_0, \bar{h}_*) > S(\bar{t}_0, \bar{h}_1)$ — в противоречии с (8). Этим доказано равенство (7), из которого следует, что

$$Q \leq S(\bar{t}_0, \bar{h}_0). \tag{10}$$

Докажем, что справедливо и противоположное неравенство. Из определения величины Q (см. (6)) следует, что

$$Q \geq \inf_{\bar{t} \in T} S(\bar{t}, \bar{h}_0). \tag{11}$$

Считая вектор $\bar{h}_0$ фиксированным, определим для $\bar{t} \in T$ на всем отрезке $[a, b]$ функцию $G(u) = G(\bar{t}, u) = g_k(u)$, $u \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $S(\bar{t}, \bar{h}_0) = \int_a^b G(u)\,du = \int_o^{b-a} r(G, u)\,du$, где $r(G, u)$ — убывающая перестановка функции $G(u)$ [6]. Положим $G_0(u) = G(\bar{t}_0, u)$ и каждому y, $0 \leq y \leq h = = \dfrac{L}{n-1}$, сопоставим множества $E_y(G) = \{ u : G(u) \geq y \}$, $E_y(G_0) = \{ u : G_0(u) \geq y \}$.

Докажем, что

$$\operatorname{mes} E_y(G) \geq \operatorname{mes} E_y(G_0), \qquad 0 \leq y \leq h. \tag{12}$$

В самом деле, если для $\bar{t} \in T$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ $g_k(\tau_k) = h$, то из структуры функций $G(u)$ и $G_0(u)$ следует, что в (12) при всех y имеет место знак равенства.

Пусть $\min_k g_k(\tau_k) = g_i(\tau_i) < y$. Тогда для $0 \leq y \leq g_i(\tau_i)$ соотношение (12) выполняется тоже со знаком равенства, однако для $g_i(\tau_i) < y < h$ будет иметь место строгое неравенство $\operatorname{mes} E_y(G) > \operatorname{mes} E_y(G_0)$. Из (12) следует, что для любого $\bar{t} \in T$

$$S(\bar{t}_0, \bar{h}_0) = \int_a^b r(G_0, u)\,du \le \int_a^b r(G, u)\,du = S(\bar{t}, \bar{h}_0),$$

т. е. $\inf\limits_{\bar{t} \in T} S(\bar{t}, \bar{h}_0) = S(\bar{t}_0, \bar{h}_0)$, а это вместе с (11) и (10) доказывает теорему.

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Вернемся к задаче минимизации правой части (3) для $f(t) \in H_L^{\omega}$ за счет оптимального выбора векторов $\{t_k\}$ и $\{y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, где $y_k = f(t_k)$, причем в этом случае $0 = y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_{n-1} \le y_n = L$. Считая эти векторы фиксированными и полагая, как и выше, $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, построим функции

$$P(t) = P(\{t_k\}, \{y_k\}, t) = \min\{y_{k-1} + \omega(t - t_{k-1}), y_k\}, \qquad t \in \Delta_k,$$

$$p(t) = p(\{t_k\}, \{y_k\}, t) = \max\{y_k - \omega(t_k - t), y_{k-1}\}, \qquad t \in \Delta_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из определения класса H_L^{ω} и равенств $f(t_k) = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, следует

$$p(t) \le f(t) \le P(t), \qquad a \le t \le b.$$

Если $L \le \omega\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$, то для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$P(t) - P(t_k) \le \omega(t - t_k), \qquad t_k \le t \le b,$$

и для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$p(t_k) - p(t) \le \omega(t_k - t), \qquad a \le t \le t_k,$$

и, следовательно, функции $P(t)$ и $p(t)$ принадлежат классу H_L^{ω}. На каждом промежутке Δ_k разность $\delta(t) = P(t) - p(t)$ представима в виде

$$\delta(t) = \min\{\omega(|t - t_{k-1}|), \omega(|t - t_k|), h_k\}, \qquad h_k = y_k - y_{k-1}.$$

В силу теоремы 1

$$\inf_{\{t_k\}, \{y_k\}} \int_a^b \delta(t)\,dt = \inf_{\{t_k\}, \{h_k\}} \int_a^b \delta(t)\,dt = \int_a^b \delta_0(t)\,dt. \tag{13}$$

Здесь $\delta_0(t) = P_0(t) - p_0(t)$, а функции $P_0(t)$ и $p_0(t)$ построены по векторам $\{t_k^0\}$ и $\{y_k^0\}$, где

$$t_k^0 = \frac{k(b-a)}{n}, \qquad y_k^0 = \frac{kL}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Подсчитывая последний интеграл в (13), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\omega(t)$ *— выпуклый вверх модуль непрерывности и* $L \le \omega\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$, *то оптимальный метод восстановления интеграла* (1) *от функции* $f(t) \in H_L^{\omega}$ *по ее значениям в* $n-1$ *внутренней точке задается векторами* (14), *а наилучшее приближение интегралу* (1) *доставляет интеграл от функции* $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{2}(P_0(t) + p_0(t))$, *причем*

$$\sup_{f \in H_L^\omega} \left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi_0(t)\,dt \right| = 2n \int_0^{x_0} \omega(t)\,dt - 2Lx_0 + \frac{L(b-a)}{n},$$

где x_0 *определяется равенством* $\omega(x_0) = \dfrac{L}{n}$.

Если $\omega(t) = Kt^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$, то обозначая через KH_L^α соответствующий подкласс функций из H_L^ω, получаем следующее утверждение.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in KH_L^\alpha} \left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi_0(t)\,dt \right| =$$

$$= \frac{L(b-a)}{n} - \frac{2\alpha}{\alpha+1} K^{-1/\alpha} L^{1+1/\alpha} n^{-1/\alpha}.$$

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
2. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 184 с.
3. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 5. – С. 1416–1437.
5. *Корнейчук Н. П.* Оптимизация адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^ω // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1627–1634.
6. *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Получено 27.06.96