УДК 519.1

В. К. Медведев (Киев. ун-т)

КОНФИГУРАЦИИ В КОНЕЧНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

We find necessary conditions for the existence of an arbitrary configuration in at least one finite projective plane of order n, and these conditions are imposed on a number n.

Для існування довільної конфігурації хоча б в одній скінченній проективній площині порядку n знайдені необхідні умови, яким повинно задовольняти число n.

Инцидентная структура есть тройка $S = (P, B, I)$, где P, B, I — множества с $P \bigcap B = \varnothing$ и $I \subseteq P \times B$. Элементы из P называются точками, а элементы из B — блоками (будем называть последние также прямыми). Пусть $a \in P$, $l \in B$. Будем писать $a \in l$ и говорить, что блок (прямая) l проходит через точку a, если $(a, l) \in I$. Матрицей инцидентности структуры S будем называть матрицу, строки (столбцы) которой взаимно однозначно соответствуют точкам (блокам) инцидентной структуры S, причем на пересечении строки, соответствующей элементу $a \in P$, и столбца, соответствующего элементу $l \in B$, стоит 0, если $a \notin l$, и 1, если $a \in l$.

Определение 1. *Конфигурацией (упорядоченной конфигурацией) из m прямых назовем матрицу из m столбцов, все элементы которой равны 0 или 1. При этом две конфигурации (упорядоченные конфигурации) из m прямых называются эквивалентными, если они имеют одинаковое количество строк и одна получается из другой перестановкой строк и столбцов (перестановкой строк).*

Иными словами, упорядоченная конфигурация отличается от конфигурации тем, что в ней указывается какая прямая первая, какая вторая и т. д.

Будем говорить, что данная конфигурация из m прямых существует в структуре инцидентности S, если в матрице инцидентности S существуют m столбцов таких, что матрица, составленная из этих m столбцов, эквивалентна конфигурации T (такие m столбцов назовем конфигурацией T в S).

Как мы увидим на примере конечных проективных блок-схем, существование данной конфигурации T в S задает, вообще говоря, некоторые условия на параметры S.

Определение 2. *Конфигурацией с весом назовем упорядоченную конфигурацию, в которой каждой прямой (т.е. столбцу) сопоставлено некоторое целое число, называемое весом этой прямой. Весом конфигурации назовем сумму квадратов весов прямых конфигурации.*

Числом точек конфигурации назовем количество ее строк.

Каждую конфигурацию можно рассматривать как конфигурацию с весом, положив вес каждой прямой, входящей в конфигурацию, равным 1. Такой вес назовем стандартным. В этом случае вес конфигурации есть, очевидно, количество прямых в конфигурации.

Структура $S = (P, B, I)$ инцидентности называется проективной блок-схемой с параметрами v, k, λ, если $|P| = |B| = v$, каждый блок содержит ровно k точек и каждая пара различных точек встречается ровно в λ блоках. Проективная блок-схема с $\lambda = 1$ называется конечной проективной плоскостью.

Пусть A — матрица инцидентности проективной блок-схемы S с параметрами v, k, λ. Тогда, очевидно,

1) $AA^t = (K - \lambda)I + \lambda J$ (A^t — матрица, транспонированная к A), где I, J — матрицы размера $v \times v$ (I — единичная матрица, а J — матрица, все элементы которой равны 1). Для натурального числа v и произвольных чисел k, λ

обозначим матрицу $(K-\lambda)I + \lambda J$ размера $v \times v$ через $I_{v,k,\lambda}$.

Известны [1] следующие необходимые условия существования проективных блок-схем с параметрами v, k, λ:

2) $k^2-k = \lambda(v-1)$;

3) если v — четно, то $k-\lambda$ есть квадрат;

4) если v — нечетно, то уравнение

$$(k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2 = z^2$$

имеет решение в целых числах x, y, z, не все из которых нулевые.

Условие 2 получено из подсчета двумя способами числа появлений пар, в которые входит данная точка, в блоках блок-схемы. Из равенства в условии 1 следует, что $\det I_{v,k,\lambda}$ есть квадрат целого числа. Отсюда получено условие 3 (очевидно, что при нечетном v $\det I_{v,k,\lambda}$ есть квадрат).

Пусть B — симметрическая матрица над $\mathbb{Q}$ размера $e \times e$, ни один из главных миноров которой не обращается в 0. Через $c_p(B)$ для простого числа p либо для $p=\infty$ обозначим число, равное

$$c_p(B) = (-1,-D_e)_p \prod_{t=1}^{e-1} (D_t, -D_{t+1})_p,$$

где D_t, $1 \le t \le e$, — главный минор порядка t матрицы B, $(a,b)_p$ — символ Гильберта пары рациональных чисел a, b (напомним, что символом Гильберта называется число 1, если уравнение $ax^2+by^2 = z^2$ имеет нетривиальное решение в поле $\mathbb{Q}_p$, и -1 — в противном случае).

Известно (теория Хассе – Минковского), что для рациональной эквивалентности двух невырожденных квадратичных форм от e — переменных с матрицами B_1 и B_2, главные миноры которых не обращаются в 0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

5) $\det B_1 \det B_2 \in \mathbb{Q}^2$;

6) $\operatorname{sign} B_1 = \operatorname{sign} B_2$, где $\operatorname{sign} B$ — сигнатура матрицы B;

7) $c_p(B_1) = c_p(B_2)$ для любого простого числа p и для $p=\infty$.

Равенство в условии 1 дает, очевидно, рациональную эквивалентность квадратичных форм, представленных матрицами I и $I_{v,k,\lambda}$.

Исходя из этого получено условие 4 (при v — четном с учетом условия 3 можно показать, что матрицы I и $I_{v,k,\lambda}$ рационально эквивалентны всегда).

***Замечание* 1.** При условии 2 для натуральных чисел v, k, λ выполнение условий 3 и 4 является необходимым и достаточным условием рациональной эквивалентности матриц I и $I_{v,k,\lambda}$ (см. [1]).

Для простоты изложения мы не будем формулировать результаты в максимальной общности, а вынесем все обобщения в конец статьи.

Определение 3. *Кратностью $T(a)$ точки $a \in P$ в конфигурации T в S назовем количество прямых из данной конфигурации, проходящих через точку a. Если T — конфигурация с весом, то кратностью $T(a)$ точки a назовем сумму весов всех прямых, проходящих через точку a.*

Очевидное, но важное замечание состоит в том, что набор кратностей $\{T(a)\}$ определяется только конфигурацией T (если T с весом, то также весами прямых, входящих в T) и не зависит от S.

Пусть T — конфигурация из m прямых и v точек, $\{T(i)\}_{i=1,\dots,v}$ — набор ее кратностей (если T с весом, то кратности $\{T(i)\}$ считаются как кратности конфигурации с весом). Обозначим через $I_{v,k,\lambda,T}$ симметрическую матрицу размера $(v+1)\times(v+1)$, у которой матрица главного минора порядка v совпадает с $I_{v,k,\lambda}$, последний элемент диагонали равен m (в случае, когда T с весом, положим последний элемент диагонали равным весу $m(T)$ конфигурации T), а остальные элементы последней строки есть набор чисел $\{T(i)\}$.

Теорема 1. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Тогда для существования конфигурации T в S необходимо выполнение условия*

8) $\det I_{v,k,\lambda,T} = 0$.

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности проективной блок-схемы S. Не ограничивая общности можем считать, что конфигурация T состоит из первых m столбцов матрицы A. Рассмотрим матрицу A_T размера $(v+1)\times(v+1)$, которая имеет матрицу главного минора размера v, совпадающую с A, все остальные элементы последней строки и столбца равны 0, за исключением первых m элементов последней строки, равных 1 (если T с весом, то равных весам соответствующих прямых). Тогда, очевидно, $AA_T^t = I_{v,k,\lambda,T}$, откуда $(\det A_T)^2 = \det I_{v,k,\lambda,T}$. Но $\det A_T = 0$, поскольку последний столбец матрицы A_T нулевой. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Существует квадратичная форма $\sum_{i,j=1,\ldots,v} a_{ij}x_ix_j$ от v переменных, зависящая только от чисел v, k, λ и такая, что конфигурация T из m прямых существует в некоторой проективной блок-схеме с параметрами v, k, λ только тогда, когда*

$$\sum_{i,j=1,\ldots,v} a_{ij}T(i)T(j) + (k-\lambda)^{v-1}k^2m = 0.$$

Если T с весом, то $\sum_{i,j=1,\ldots,v} a_{ij}T(i)T(j) + (k-\lambda)^{v-1}k^2m(T) = 0$, где $m(T)$ — вес конфигурации T.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1, если учесть, что $\det I_{v,k,\lambda} = (k-\lambda)^{v-1}k^2$.

Теорема 1 дает, по сути, способ вычисления чисел a_{ij}. Так, нетрудно видеть, что $a_{ij} = -(k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)$ при $i=j$ и $a_{ij} = \lambda(k-\lambda)^{v-2}$ при $i\neq j$.

Следствие 1 показывает, что существует квадратичная форма от v переменных такая, что для любой конфигурации T в любой проективной блок-схеме с параметрами v, k, λ ее значение на кратностях точек зависит только от числа прямых в конфигурации.

Отметим, что в любой конечной проективной плоскости, в том числе и недезарговой, существует дезаргова конфигурация (это было доказано Остромом (см. [2], а также [3]), в каждой недезарговой плоскости существуют конфигурации, демонстрирующие ее недезарговость, в каждой проективной плоскости существует треугольник, невырожденный четырехугольник и т. п. Для каждой из этих конфигураций необходимые условия для ее существования в некоторой проективной плоскости порядка n (приведенные далее в данной статье) являются тем самым необходимыми условиями для существования проективной конечной плоскости порядка n.

Пусть T — конфигурация из m прямых и v точек (возможно с весом), $\{T(i)\}_{i=1,\ldots,v}$ — набор ее кратностей. Через $I_{v,k,\lambda,T,h,d}$, где h и d — числа, обозначим симметрическую матрицу размера $(v+1)\times(v+1)$, у которой матрица главного минора порядка v совпадает с $I_{v,k+h^2,\lambda+h^2}$, последний элемент диагонали равен $m+d^2$ (если T с весом, то положим последний элемент диагонали равным $m(T) + d^2$, где $m(T)$ — вес конфигурации T), а все остальные элементы последней строки есть набор чисел $\{T(i) + hd\}_{i=1,\dots,v}$.

Теорема 2. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Если существует конфигурация T в S, то*

9) $\det I_{v,k,\lambda,T,h,d}$ — *квадрат целого числа для любых целых чисел h и d.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A_{T,h,d}$, отличающуюся от матрицы A_T, введенной при доказательстве теоремы 1, тем, что вместо нулевого последнего столбца матрицы A_T стоит столбец, все элементы которого равны h, за исключением последнего элемента на диагонали, равного d. Тогда, очевидно, $A_{T,h,d} A^t_{T,h,d} = I_{v,k,\lambda,T,h,d}$, откуда $\det I_{v,k,\lambda,T,h,d} = (\det A_{T,h,d})^2$. Теорема доказана.

Пусть T — некоторая конфигурация из m столбцов.

Определение 4. *Подконфигурацией T_1 конфигурации T будем называть конфигурацию, получающуюся из матрицы T выбрасыванием некоторых столбцов (возможно нулевого числа столбцов).*

Пусть $T_1, T_2, \dots, T_q$ — произвольная последовательность подконфигураций. Через n_{ij}, $i, j = 1, \dots, q$, будем обозначать число столбцов, общее как для конфигурации T_i, так и для конфигурации T_j. Если $T_1, T_2, \dots, T_q$ — конфигурации с весами, то через n_{ij} обозначим скалярное произведение весового вектора подконфигурации T_i на весовой вектор подконфигурации T_j, где весовой вектор подконфигурации — это строки длины, равной числу прямых конфигурации T, на любом s-м месте которой стоит вес s-го столбца, если он входит в подконфигурацию, и 0 — в противном случае. Матрицу $N = (n_{ij})_{i,j=1,\dots,q}$ назовем матрицей пересечений последовательности $\{T(i)\}$. Матрицу $L = (l_{ij})$ размера $q \times v$ (v — число точек конфигурации T), где $l_{ij} = T_i(j)$, назовем матрицей кратностей последовательности $\{T(i)\}$.

Пусть D — произвольная матрица размера $q \times q$. Рассмотрим симметрическую матрицу $I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}$ размера $(v+q)\times(v+q)$, где

$$I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v,k,\lambda} & L^t \\ \hline L & N + DD^t \end{array}\right). \tag{1}$$

Здесь и далее будем говорить о последовательности подконфигураций $\{T_i\}$ с произвольными весами конфигурации T, если каждая конфигурация T_i последовательности есть подконфигурация конфигурации T с некоторым произвольным весом (так что, в частности, одной и той же прямой в разных конфигурациях T_i и T_j могут быть сопоставлены разные веса). Очевидно, задание такой последовательности равносильно заданию последовательности весов на конфигурации T.

Теорема 3. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, q$, конфигурации T и любой матрицы D размера $q \times q$ выполняется равенство*

$$\det I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}} = k^2 (k-\lambda)^{v-1} (\det D)^2. \tag{2}$$

Это же верно и для последовательности подконфигураций $\{T_i\}$ с произвольными весами конфигурации T.

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности блок-схемы S и R

— матрица размера $q \times v$, в каждой i-й строке которой стоит 1 (вес столбца, если T с весом) в тех столбцах, которые принадлежат подконфигурации T_i, и 0 — на остальных местах. Очевидно, $RR^t = N$. Рассмотрим матрицу $A_{D,\{T_i\}}$ размера $(v+q)\times(v+q)$, где

$$A_{D,\{T_i\}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & D \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_{D,\{T_i\}} A^t_{D,\{T_i\}} = I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}},$$

откуда

$$(\det A_{D,\{T_i\}})^2 = \det I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}, \tag{3}$$

Но $\det A_{D,\{T_i\}} = \det A \det D$. Учитывая, что

$$(\det A)^2 = \det I_{v,k,\lambda} = k^2(k-\lambda)^{v-1},$$

получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем все результаты будем излагать для конфигураций с весом, поскольку любая конфигурация может рассматриваться как конфигурация со стандартным весом (см. выше).

Пусть $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q$, — некоторая последовательность подконфигураций конфигурации T на v точках и D — произвольная матрица размера $q \times q$. Обозначим через Γ_r, $r = 1, \ldots, q$, $(v+r)$-й главный минор матрицы $I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}$.

Теорема 4. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Для существования конфигурации T в S необходимо, чтобы для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q$, с произвольными весами, конфигурации T и любой целочисленной матрицы D размера $q \times q$ такой, что $\det D \neq 0$, выполнялись условия:*

10) $\Gamma_r > 0$ *при любом* $r = 1, \ldots, q$;

11) $\displaystyle\prod_{r=1}^{q-1} (\Gamma_r, -\Gamma_{r+1})_p = 1$ *для любого простого числа p и для $p = \infty$.*

Доказательство. Из соотношения (3) с учетом того, что согласно теореме 3 матрица $I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}$ — невырожденна, получаем, что единичная матрица I размера $(v+q)\times(v+q)$ и матрица $I_{v,k,\lambda,D\{T_i\}}$ рационально эквивалентны. Отсюда $c_p(I) = c_p(I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}})$ для любого простого числа p и для $p = \infty$. То есть $c_p(I_{v,k,\lambda,D\{T_i\}}) = 1$ для простых чисел p и $c_\infty(I_{v,k,\lambda,D\{T_i\}}) = -1$. Но $c_p(I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}) = (-1, -D_{v+q})_p \prod_{i=1}^{v+q-1} (D_i, -D_{i+1})_p$, где D_i — i-й главный минор матрицы $I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}$ (положительный, так как матрицы I и $I_{v,k,\lambda,D,\{T_i\}}$ эквивалентны). В то же время D_i при $i \le v$ совпадает с i-м главным минором матрицы $I_{v,k,\lambda}$. Но матрица $I_{v,k,\lambda}$ рационально эквивалентна единичной матрице размера $v \times v$ (равенство в условии 1) и, следовательно,

$$(-1,-D_v)_p \prod_{i=1}^{v-1} (D_i,-D_{i+1})$$

равно 1 при простом p и -1 при $p=\infty$. Отсюда получаем

$$\prod_{i=v}^{v+q-1} (D_i,-D_{i+1})_p = 1.$$

Здесь учтено, что D_v и D_{v+q} являются квадратами ненулевых целых чисел и, следовательно, $(-1,-D_v)_p = (-1,-D_{v+q})_p$. Учитывая, что $\Gamma_r = D_{v+r}$, получаем утверждение теоремы.

***Следствие* 2.** *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любых двух подконфигураций T_1 и T_2 в T с произвольными весами и любой невырожденной целочисленной матрицы D размера 3×3 справедливо равенство*

$$(\Gamma_1,-\Gamma_2)_p = (\Gamma_2,-1)_p$$

для любого простого числа p и для $p=\infty$, где Γ_i — числа, определяемые последовательностью T_1, T_2, T (Γ_1 и Γ_2 от веса T не зависят).

Доказательство. Из теоремы 4 следует

$$(\Gamma_1,-\Gamma_2)_p(\Gamma_2,-\Gamma_3)_p = 1,$$

но Γ_3, если рассматривать на T, например, стандартный вес, есть квадрат ненулевого целого числа, так что

$$(\Gamma_2,-\Gamma_3)_p = (\Gamma_2,-1)_p.$$

Отсюда $(\Gamma_1,-\Gamma_2)_p(\Gamma_2,-1)_p = 1$ и следствие доказано.

***Следствие* 3.** *В условиях следствия 2 уравнение*

$$\Gamma_1 x^2 - \Gamma_2 y^2 = z^2$$

имеет ненулевое целое решение тогда и только тогда, когда уравнение $\Gamma_2 x^2 - y^2 = z^2$ имеет ненулевое целое решение.

Доказательство очевидно.

Пусть $\{T_i\}$, $i=1,\dots,q$, — произвольная последовательность подконфигураций с произвольными весами конфигурации T на v точках, D и H — произвольные целочисленные матрицы размеров $q\times q$ и $v\times q$ соответственно.

Рассмотрим симметрическую матрицу $I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}}$, где

$$I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v,k,\lambda}+HH^t & L^t+HD^t \\ \hline L+DH^t & N+DD^t \end{array}\right).$$

Теорема 5. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i=1,\dots,q$, с произвольными весами, конфигурации T и любых целочисленных матриц D и H размеров $q\times q$ и $v\times q$ соответственно выполняются условия:*

12) $\det I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}}$ *есть квадрат целого числа;*

13) *если* $\det I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}} \neq 0$, *то* $c_p(I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}})$ *равно* 1 *для любого простого числа p и -1 для $p=\infty$.*

Кроме того, все главные миноры матрицы $I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}}$ *положительны.*

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности блок-схемы S и R — матрица размера $q \times v$, в каждой i-й строке которой, в столбцах, принадлежащих конфигурации T_i, стоит вес соответствующего столбца в конфигурации T_i, и 0 — на остальных местах. Рассмотрим матрицу $A_{D,H,\{T_i\}}$, где

$$A_{D,H,\{T_i\}} = \begin{pmatrix} A & H \\ R & D \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_{D,H,\{T_i\}} A^t_{D,H,\{T_i\}} = I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}}.$$

Теперь доказательство теоремы очевидно.

Пусть v, k, λ — некоторые числа такие, что $k^2 - k = \lambda(v-1)$. Тогда легко видеть, что существует единственное число w такое, что $(k+w)^2 - (k+ + w) = (\lambda + w)(v-1)$. Это число $w = v - 2k$. Нетрудно проверить, что условия 2–4 выполняются для тройки целых чисел v, k, λ тогда и только тогда, когда они выполняются для тройки чисел $v' = v$, $k' = k + w$, $\lambda' = \lambda + w$, где $w = v - 2k$. Отсюда, согласно замечанию 1, матрица $I_{v,k+w,\lambda+w}$, где $w = v - 2k$, рационально эквивалентна матрице I тогда и только тогда, когда матрица $I_{v,k,\lambda}$ рационально эквивалентна матрице I.

Теорема 6. *Пусть в условиях теоремы 5* $\{h_i\}$, $i = 1, \ldots, q$, *— последовательность целых чисел и* $w = \sum_{i=1}^{q} h_i^2$, *при* $w = v - 2k$. *Предположим, что для матрицы* $H = (h_{ij})$ *размера* $v \times q$, *где* $h_{ij} = (h_{ij})$, $\det I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}} \neq 0$.

Тогда

14) $\Gamma_r > 0$, *где* Γ_r — $(v+r)$*-й главный минор матрицы* $I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}}$, $r = 1, \ldots, q$;

15) $\prod_{r=1}^{q-1} (\Gamma_r, -\Gamma_{r+1})_p = 1$ *для любого простого числа* p *и для* $p = \infty$.

Доказательство повторяет, по сути, доказательство теоремы 4, если учесть, что в условиях теоремы 6

$$I_{v,k,\lambda,D,H,\{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v,k+w,\lambda+w} & L^t + HD^t \\ \hline L + DH^t & N + DD^t \end{array}\right).$$

Замечание 2. В условиях теоремы 6 требование $w = v - 2k$ можно заменить следующим: матрицы I и $I_{v,k+w,\lambda+w}$ рационально эквивалентны.

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы 6* $q = 3$. *Тогда*

$$(\Gamma_1, -\Gamma_2)_p = (\Gamma_2, -1)_p$$

для любого простого числа p *и для* $p = \infty$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.

Следствие 5. *В условиях следствия* 1 *уравнение*

$$\Gamma_1 x^2 - \Gamma_2 y^2 = z^2$$

имеет ненулевое целое решение тогда и только тогда, когда уравнение $\Gamma_2 x^2 - - y^2 = z^2$ *имеет ненулевое целое решение.*

Доказательство очевидно.

Определение 5. *Будем говорить, что конфигурация* $\tilde{T}$ *получается из конфигурации* T *выкалыванием* q *точек, если конфигурация* $\tilde{T}$ *получается из конфигурации* T *выбрасыванием некоторых* q *строк.*

Пусть $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q+s$, — произвольная последовательность подконфигураций с некоторыми весами конфигурации T. Пусть $\tilde{T}$ получается из T выбрасыванием заданного множества U из q строк, т. е. выкалыванием заданных q точек. Через L_U обозначим матрицу размера $(q+s)\times(v-q)$, получающуюся из матрицы L кратностей последовательности $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q+s$, выбрасыванием столбцов, соответствующих выколотым точкам (очевидно, что $L_\varnothing = L$).

Пусть N — матрица пересечений последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q$. Рассмотрим матрицу $I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}$, где

$$I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}} = \begin{pmatrix} I_{v-q,k,\lambda} & L_U^t \\ L_U & N \end{pmatrix}.$$

Через $\Gamma_r(\gamma_r)$ обозначим $(v-q+r)$-й главный минор матрицы $I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}(I_{v,k,\lambda})$.

Теорема 7. *Пусть* S *— проективная блок-схема с параметрами* v, k, λ. *Для существования конфигурации* T *в* S *необходимо, чтобы для любой последовательности* $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q$, *подконфигураций с произвольными весами конфигурации* T *и для любого подмножества* U *из* q *строк конфигурации* T *выполнялись условия*:

16) $\det I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}$ *есть квадрат целого числа*;

Пусть $\det I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}} \neq 0$ *и* $q \geq 2$. *Тогда*

17) $\Gamma_r > 0$, $r = 1, \ldots, q$;

18) $(\gamma_0, \gamma_1\Gamma_1)_p \prod_{r=1}^{q-1} (\Gamma_r, -\Gamma_{r+1})_p (\gamma_r, -\gamma_{r+1})_p = 1$ *для любого простого числа* p *и для* $p = \infty$.

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности проективной блок-схемы S. Не ограничивая общности можем считать, что выколотые q точек соответствуют последним строкам матрицы A. Заменим каждую $(v-q+r)$-ю строку матрицы A, $r = 1, \ldots, q$, на строку, в которой на каждом i-м месте стоит вес i-го столбца, если этот столбец входит в конфигурацию T_r, и 0 — в противном случае. Обозначим полученную матрицу через $\tilde{A}$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{A}(\tilde{A})^t = I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}. \tag{4}$$

Отсюда следует условие 16. Если $\det I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}} \neq 0$, то равенство (4) дает рациональную эквивалентность матриц I и $I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}$. Отсюда получаем условие 17 и, кроме того, равенство

$$c_p(I) = c_p(I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}})$$

для любого простого числа p и для $p = \infty$.

Но $c_p(I) = c_p(I_{v,k,\lambda})$. Следовательно,

$$c_p(I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}})\, c_p(I_{v,k,\lambda}) = 1.$$

Отсюда с учетом определения числа $c_p(B)$ получаем равенство из условия 18. Теорема доказана.

***Следствие* 6.** *Существует квадратичная форма* $\sum_{i,j=1,\ldots,v-1} b_{ij}x_ix_j$ *от* $(v-1)$*-й переменной, зависящая только от чисел* v, k, λ *и такая, что конфигурация* T *существует в некоторой проективной блок-схеме с параметрами* v, k, λ *только тогда, когда при любом задании весов прямых, входящих в конфигурацию* T, *с выкалыванием любой точки*

$$\sum_{i,j=1,\ldots,v-1} b_{ij}T(i)T(j) + (k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)m(T)$$

есть квадрат целого числа, где $\{T(i)\}$, $i = 1,\ldots,q-1$, — *последовательность кратностей всех точек, кроме выколотой,* $m(T)$ — *вес конфигурации* T.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 7, если учесть, что $\det I_{v-1,k,\lambda} = (k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)$.

Теорема 7 дает, по сути, способ вычисления чисел b_{ij}. Так, нетрудно видеть, что $b_{ij} = (k-\lambda)^{v-3}(k^2-2\lambda)$ при $i=j$ и $b_{ij} = -\lambda(k-\lambda)^{v-3}$ при $i\neq j$.

***Следствие* 7.** *Пусть в условиях теоремы* 7 $q=2$,

$$\det I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}} \neq 0.$$

Тогда уравнение $(k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)\Gamma_1x^2 - (k-\lambda)^{v-3}(k^2-2\lambda)y^2 = z^2$ *имеет решение в целых числах* x, y, z, *не равных одновременно* 0.

Доказательство. Из теоремы 7 $(\gamma_0,\gamma_1\Gamma_1)_p(\Gamma_1,-\Gamma_2)_p(\gamma_1,-\gamma_2)_p = 1$ для любого простого числа p и для $p=\infty$. С учетом того, что $\Gamma_2\neq 0$ и $\gamma_2\neq 0$ есть квадраты целых чисел, получаем $(\gamma_0,\gamma_1\Gamma_1)_p(\gamma_1\Gamma_1,-1)_p = 1$, т. е. $(\gamma_1\Gamma_1, -\gamma_0)_p = 1$ для любого простого числа p и для $p=\infty$. Отсюда с учетом того, что $\gamma_1 = (k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)$, $\gamma_0 = (k-\lambda)^{v-3}(k^2-2\lambda)$, получаем утверждение следствия.

Отметим, что число Γ_1 зависит только от конфигурации T_1 последовательности T_1, T_2; от T_2 требуется лишь, чтобы $\det I_{v,k,\lambda,\{T_1,T_2\},U}\neq 0$.

Пусть T — некоторая конфигурация с произвольным весом. Выколем произвольную точку p из этой конфигурации. Пусть $\tilde{l}_p = (l_1,\ldots,l_{v-1})$ — вектор, составленный из кратностей (взятых в произвольном порядке) всех точек, за исключением выколотой. Определим числа $\Gamma_{T,p}$, где $\Gamma_{T,p} = $

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_{v-2,k,\lambda} & \tilde{l}_p^t \\ \hline \tilde{l}_p & m(T) \end{array}\right).$$

Теорема 8. *Для существования конфигурации* T *в некоторой проективной блок-схеме с параметрами* v, k, λ *необходимо, чтобы для произвольных весов прямых, входящих в конфигурацию* T, *и любой точки* p *конфигурации* T *уравнение*

$$(k-\lambda)^{v-2}(k^2-\lambda)\Gamma_{T,p}x^2 - (k-\lambda)^{v-3}(k^2-2\lambda)y^2 = z^2 \tag{5}$$

имело решение в целых числах x, y, z, *не равных одновременно* 0.

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности блок-схемы S. Не ограничивая общности можем считать, что предпоследняя строка соответствует точке p. Выбросим две последние строки матрицы A и дополним полученную матрицу размера $(v-2)\times v$ строкой длины v, на каждом i-м месте которой стоит вес i-й прямой, если она входит в конфигурацию T, и 0 — в противном случае. Получим некоторую матрицу A_1 размера $(v-1)\times v$. Тогда очевидно, что $\det(A_1 A_1^t) = \Gamma_{T,p}$. Если $\Gamma_{T,p} = 0$, то уравнение (5), очевидно, имеет нетривиальное решение в целых числах. При $\Gamma_{T,p} \neq 0$ нетрудно видеть, что существует целочисленная строка длины v; если эту строку добавить в качестве последней к матрице A_1, то полученная квадратная матрица A_2 размера $v\times v$ будет невырожденной. Теперь доказательство теоремы 8 повторяет доказательство теоремы 7 (для случая $q = 2$) с заменой матрицы $I_{v,k,\lambda,U,\{T_i\}}$ на матрицу $A_2 A_2^t$ и матрицы $\tilde{A}$ на A_2.

Ранее мы в некотором смысле пополняли множество точек конфигурациями или вставляли конфигурации вместо выколотых точек (так что, в частности, все точки могли бы быть заменены конфигурациями). Теперь мы сделаем и то, и другое.

Пусть $\tilde{T}$ получена из конфигурации T выкалыванием заданных q точек (т. е. выбрасыванием заданного множества U из q строк), $\{T_i\}$, $i=1,\ldots,q+s$ $(s>0)$, — последовательность из $q+s$ подконфигураций с произвольными весами конфигурации T. Пусть D — произвольная матрица размера $s\times s$.

Рассмотрим матрицу

$$I_{v,k,\lambda,U,D,\{T_i\}}) = \left(\begin{array}{c|c} I_{v-q,k,\lambda} & L_U^t \\ \hline L_U & N \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} I_{v,0,0} & 0 \\ \hline 0 & DD^t \end{array}\right).$$

Теорема 9. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1,\ldots,q+s$, с произвольными весами конфигурации T, любой матрицы D размера $s\times s$ и любого множества U из q выколотых точек выполняется равенство*

$$\det I_{v,k,\lambda,U,D,\{T_i\}_{i=1,\ldots,q+s}} = (\det D)^2 \det I_{v,k,\lambda,U,D,\{T_i\}_{i=1,\ldots,q}}. \tag{6}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Обозначим через $\Gamma_r(\gamma_r)$ $(v-q+r)$-й главный минор матрицы $I_{v,k,\lambda,U,D,\{T_i\}}(I_{v,k,\lambda})$.

Теорема 10. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Для существования конфигурации T в S необходимо, чтобы для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1,\ldots,q+s$, с произвольными весами конфигурации T такой, что $\det I_{v,k,\lambda,U\{T_i\}_{i=1,\ldots,q}} \neq 0$, и любой целочисленной невырожденной матрицы D размера $s\times s$ выполнялось условие $(\gamma_0,\gamma_1\Gamma_1)_p \prod_{r=1}^{q-1}(\gamma_r,-\gamma_{r+1})_p \prod_{r=1}^{q+s-1}(\Gamma_r,-\Gamma_{r+1})_p = 1$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Пусть $\tilde{T}$ получена из конфигурации T выкалыванием заданных q точек, $\{T_i\}$, $i=1,\ldots,q+s$ $(s>0)$, — последовательность из $q+s$ подконфигураций с произвольными весами конфигурации T.

Пусть H и D — произвольные целочисленные матрицы размеров $v\times s$ и $s\times s$ соответственно. Рассмотрим матрицу $I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}$ размера $(v+s)\times$ $\times(v+s)$, где

$$I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v-q,k,\lambda} & L_U^t \\ \hline L_U & N \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} HH^t & HD^t \\ \hline DH^t & DD^t \end{array}\right).$$

Теорема 11. *Пусть S — проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \ldots, q+s$, с произвольными весами конфигурации T, для любого множества U из q точек и для любых целочисленных матриц H и D размеров $v \times s$ и $s \times s$ соответственно выполняются условия:*

19) $\det I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}$ *есть квадрат целого числа;*

Если $\det I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}} \neq 0$, *то*

20) $c_p(I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}})$ *равно* 1 *для любого простого числа* p *и* -1 *для* $p = \infty$;

21) *все главные миноры матрицы* $I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}$ *положительны.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Теорема 12. *Пусть в условиях теоремы* 11 $\{h_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, — *последовательность целых чисел и* $w = \sum_{i=1}^{s} h_i^2$ *при* $w = v - 2k$. *Предположим, что для матрицы* $H = (h_{ij})$ *размера* $v \times s$, *где* $h_{ij} = h_j$, $\det I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}} \neq 0$.

Тогда $(\gamma_0, \gamma_1\Gamma_1)_p \prod_{r=1}^{q-1} (\gamma_r, -\gamma_{r+1})_p \prod_{r=1}^{q+s-1} (\Gamma_r, -\Gamma_{r+1})_p = 1$ *для всех простых чисел* p *и для* $p = \infty$, *где* $\Gamma_r(\gamma_r)$ — $(v - q + r)$*-й главный минор матрицы* $I_{v,k,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}(I_{v,k+w,\lambda+w})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Для теоремы 12 также верно замечание 2.

Обсудим кратко случай других инцидентных структур.

Если для матрицы инцидентности A данной структуры инцидентности известна матрица AA^t (либо A^tA), то мы можем применить подход, развитый выше (дополняя матрицу A, если необходимо, до квадратной, „добавляя" конфигурации вместо недостающих точек).

Рассмотрим, например, случай, когда структура инцидентности $S = (P, B, I)$ является блок-схемой.

Структура инцидентности $S = (P, B, I)$ называется блок-схемой с параметрами v, b, r, k, λ, если $|P| = v$, $|B| = b$, каждый блок содержит k точек, каждая точка содержится в r блоках, каждая пара различных точек встречается в λ блоках (нетрудно видеть, что $b \geq v$).

Известны следующие необходимые условия существования блок-схемы с параметрами v, b, r, k, λ:

22) $bk = vr$,

23) $r(k-1) = \lambda(v-1)$.

Условие 22 получается из подсчета двумя способами числа единиц в матрице инцидентности блок-схемы; условие 23 — из подсчета двумя способами числа появлений пар, в которые входит данная точка, в блоках блок-схемы. Блок-схема есть проективная блок-схема тогда и только тогда, когда ее матрица инцидентности квадратна, т. е. выполняется условие $b = v$. В этом случае известны более сильные необходимые условия существования, а именно условия $2-4$ (при их выводе существенна квадратность матрицы инцидентности).

Пусть A — матрица инцидентности блок-схемы S с параметрами v, b, r, k, λ. Тогда, очевидно, $AA^t = I_{v,r,\lambda}$.

Пусть $\tilde{T}$ получена из конфигурации T выкалыванием данного множества

U из q точек конфигурации T, $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, q+b-v$, — последовательность из $q+b-v$ подконфигураций с произвольными весами конфигурации T.

Обозначим через $I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}}$ матрицу

$$I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v-q,r,\lambda} & L_U^t \\ \hline L_U & N \end{array}\right)$$

(т. е. мы как бы „пополняем" неквадратную матрицу инцидентности A до квадратной за счет „добавления" конфигураций вместо „недостающих" точек).

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теорем, приведенных выше.

Теорема 13. *Пусть S — блок-схема с параметрами v, b, r, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для любой последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, q+b-v$, с произвольными весами конфигурации T, где $q \geq 0$, и любого множества U из q точек конфигурации T выполняются условия:*

24) $\det I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}}$ *есть квадрат целого числа;*

25) *если* $\det I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}} \neq 0$, *то все главные миноры матрицы* $I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}}$ *положительны;*

26) *если* $\det I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}} \neq 0$, *то*

$$c_p(I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}}) = 1$$

для простого числа p и $c_p(I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}}) = -1$ для $p = \infty$.

Пусть $\tilde{T}$ получена из конфигурации T выкалыванием данного множества U из q точек конфигурации T, $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, q+s$, — последовательность из $q+s$ подконфигураций с произвольными весами конфигурации T, где $q \geq 0$, $v+s > b$. Пусть D — произвольная матрица размера $(v+s-b) \times (v+s-b)$. Обозначим через $I_{v, r,\lambda, U, D, \{T_i\}}$ матрицу

$$I_{v, r,\lambda, U, D, \{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v-q,r,\lambda} & L_U^t \\ \hline L_U & N \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} I_{b,0,0} & 0 \\ \hline 0 & DD^t \end{array}\right).$$

Пусть H — произвольная матрица размера $v \times (v+s-b)$. Через $I_{v, r,\lambda, U, H, D, \{T_i\}}$ обозначим матрицу

$$I_{v, r,\lambda, U, H, D, \{T_i\}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{v-q,r,\lambda} & L_U^t \\ \hline L_U & N \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} HH^t & HD^t \\ \hline DH^t & DD^t \end{array}\right).$$

Теорема 14. *Пусть S — блок-схема с параметрами v, b, r, k, λ. Пусть существует конфигурация T в S. Тогда для произвольной последовательности подконфигураций $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, q+s$, с произвольными весами конфигурации T, где $q \geq 0$, $v+s > b$, и любого множества U из q точек конфигурации T выполняются условия:*

27) *для любой матрицы D размера $(v+s-b) \times (v+s-b)$ справедливо равенство*

$$\det I_{v, r,\lambda, U, D, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+s}} = \det I_{v, r,\lambda, U, \{T_i\}_{i=1,\dots,q+b-v}} \times (\det D)^2;$$

28) *для любых целочисленных матриц D и H размеров $(v+s-b) \times (v+$

$+ s - b)$ *и* $v \times (v + s - b)$ *соответственно* $\det I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}$ *есть квадрат целого числа*;

29) *если* $\det I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}} \neq 0$, *то все главные миноры матрицы* $I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}$ *положительны*;

30) *если* $\det I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}} \neq 0$, *то* $c_p(I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}) = 1$ *при простом числе* p *и* $c_p(I_{v,r,\lambda,U,H,D,\{T_i\}}) = -1$ *для* $p = \infty$.

Доказательство аналогично доказательству теорем 10 и 11.

***Замечание* 3.** В предыдущих результатах объемлющая конфигурация T нужна для того, чтобы знать числа n_{ij}. Если они известны, то все результаты остаются в силе с очевидными переформулировками, если $\{T_i\}$ — последовательность конфигураций (т. е. они не являются подконфигурациями некоторой объемлющей конфигурации T).

Сформулируем следующую задачу: для каких неотрицательных целых чисел v, b, $(n_{ij})_{i,j=1,\ldots,b}$, где $n_{ij} = n_{ji}$, существует множество P из v элементов и b его подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_b$ таких, что $|B_i \cap B_j| = n_{ij}$, $\left|\bigcup_{i=1}^{b} B_i\right| = v$.

Назовем эту задачу задачей о пересечениях. Если $b = v$, то назовем ее симметричной задачей о пересечениях. Введем матрицу инцидентности любого решения задачи о пересечениях. Справедливо равенство $A^t A = (n_{ij})$. Отсюда для существования решения симметричной задачи о пересечениях число $\det(n_{ij})$ должно быть квадратом целого числа. Впрочем, это же верно для решения „обобщенной симметричной задачи о пересечениях", если под ней подразумевать решение уравнения $X^t X = (n_{ij})_{i,j=1,\ldots,v}$ в целочисленной матрице X, где $(n_{ij})_{i,j=1,\ldots,v}$ — симметричная целочисленная матрица. Многие задачи могут быть сведены к задаче о пересечениях, например задача о существовании проективной блок-схемы с данными параметрами, очевидно, является частным случаем симметричной задачи о пересечениях (в этом смысле целочисленная матрица X такая, что $X^t X = I_{v,k,\lambda}$ — „обобщенная проективная блок-схема с параметрами v, k, λ").

Для симметричной задачи о пересечениях верны все результаты, которые имели место для проективных блок-схем, с очевидными изменениями деталей формулировок. Для несимметричной задачи о пересечениях верны результаты типа теорем 13 и 14 (в связи с этим интересно было бы сформулировать результаты этой статьи также для „обобщенной" задачи о пересечениях).

Отметим, что аналог теоремы 1 для симметричной задачи о пересечениях обобщает известный результат Райзера (см. [4], а также теорему 10.2.3 в [1]; при этом прямое доказательство теоремы Райзера, приведенное в [1], для симметричной задачи „не проходит").

Пусть s — целое число, $s > 2$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{s-2})$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{s-2})$ — векторы-строки длины $s-2$ над некоторым полем F, $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$ — матрица размера 2×2 над полем F, $k \in F$, $\lambda \in F$. Обозначим через $I_{s-1,k,\lambda,\tilde{x},\gamma_{11}}$ и $I_{s,k,\lambda,\tilde{x},\tilde{y},\left(\begin{smallmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{smallmatrix}\right)}$ матрицы

$$I_{s-1,k,\lambda,\tilde{x},\gamma_{11}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{s-2,k,\lambda} & \tilde{y}^t \\ \hline \tilde{x} & \gamma_{11} \end{array}\right)$$

и

$$I_{s,k,\lambda,\tilde{x},\tilde{y},\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{s-2,k,\lambda} & \tilde{x}^t & \tilde{y}^t \\ \hline \tilde{x} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \hline \tilde{y} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{array}\right).$$

Предложение. *Справедливы равенства*

$$\det I_{s-1,k,\lambda,\tilde{x},\tilde{y},\gamma_{11}} = \lambda(k-\lambda)^{s-4}\sum_{i\neq j} x_i y_j -$$

$$-(k+(s-4)\lambda)(k-\lambda)^{s-4}\sum_i x_i y_i + \gamma_{11}(k+(s-3)\lambda)(k-\lambda)^{s-3},$$

$$\det I_{s,k,\lambda,\tilde{x},\tilde{y},\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}} = (k-\lambda)^{s-5}(k+(s-5)\lambda)\left(\sum_{i\neq j} x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j\right) -$$

$$-\lambda(k-\lambda)^{s-5}\sum_{i\neq j,\, i\neq l,\, j\neq l}(x_i^2 y_j y_l + y_i^2 x_j x_l - 2x_i x_j y_i y_l) +$$

$$+\lambda(k-\lambda)^{s-4}\sum_{i\neq j}(\gamma_{22}x_i x_j + \gamma_{11} y_i y_j - (\gamma_{12}+\gamma_{21})x_i y_j) +$$

$$+(k-\lambda)^{s-3}(k+(s-3)\lambda)\det\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}.$$

Доказательство представляет собой несложное, но громоздкое вычисление, использующее разложение по последнему столбцу.

Приведенное предложение является весьма полезным для конкретных вычислений.

Например, в условиях и обозначениях следствия 2 теоремы 4 либо следствия теоремы 6 (т. е., в частности, для конфигурации T, взятой с тремя произвольными весами) имеем $(\Gamma_1, -\Gamma_2)_p = (\Gamma_2, -1)_p$ для любого простого числа p и для $p = \infty$. Предложение позволяет вычислять как Γ_1, так и Γ_2 для конкретных конфигураций.

Несомненно, одним из самых интересных случаев является случай дезарговой конфигурации, которая согласно теореме Острома [3] существует в любой конечной проективной плоскости.

Приведем важное обобщение идей, изложенных выше.

Пусть существует проективная блок-схема с параметрами v, k, λ. Рассмотрим матрицу $V(W)$, получающуюся из матрицы инцидентности S этой блок-схемы заменой в каждой i-й строке $(i = 1, \dots, v)$ единиц на переменную $a_i(c_i)$, нулей на переменную $b_i(d_i)$. Тогда $VW^t = L$, где

$$L = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,v} \quad \text{с} \quad l_{ij} = \lambda a_i c_j + (k-\lambda) a_i d_j + (k-\lambda) b_i c_j + (v-2k+\lambda) b_i d_j$$

при $i \neq j$ и

$$l_{ii} = k a_i c_i + (v-k) b_i d_i.$$

***Замечание* 4.** Используя билинейность $\det L$ по каждой переменной a_i, b_i, c_i, d_i, нетрудно вычислить $\det L$ для любых действительных k, λ. Если $k^2 - k = \lambda(v-1)$ (как в нашем случае), то формула для $\det L$ принимает особенно простой вид, а именно:

$$\det L = (k-\lambda)^{v-1}\left(k\prod_{i=1}^{v}(a_i-b_i) + \sum_{j=1}^{v} b_j \prod_{i\neq j}(a_i-b_i)\right)\times$$

$$\times\left(k\prod_{i=1}^{v}(c_i-d_i) + \sum_{j=1}^{v} d_j \prod_{i\neq j}(c_i-d_i)\right).$$

Так что $VV^t = P$, где $P = (p_{ij})$ с $p_{ij} = \lambda\, a_i^2 + (k-\lambda)\, a_i b_j + (k-\lambda)\, b_i a_j + (v-2k+\lambda)\, b_i^2$ при $i \neq j$ и $p_{ii} = k\, a_i^2 + (v-k)\, b_i^2$.

Таким образом, единичная матрица I и матрица P квадратично эквивалентны над полем $\mathbb{Q}(a_i, b_i)$ рациональных функций от $2n$ переменных a_i, b_i. К сожалению, не существует теории квадратичной эквивалентности матриц над полем указанного типа подобной теории Хассе – Минковского (хотя можно пытаться рассматривать ситуацию над полем $\mathbb{F}(x)$, где $\mathbb{F}$ — конечное поле), поэтому приходится рассматривать рациональные специализации, т. е. случай, когда a_i, b_i — рациональные числа такие, что $\det P \neq 0$ (автор предполагает, что имеет доказательство того, что в этом случае рациональная квадратичная эквивалентность матриц I и P равносильна рациональной квадратичной эквивалентности матриц I и $I_{v,k,\lambda}$).

Обобщение, которое мы имели в виду, состоит в том, чтобы с самого начала рассматривать не матрицу инцидентности S, а матрицу V, где a_i, b_i — рациональные числа. В этом случае кратностью вхождения точки i в конфигурацию T с весом следует назвать сумму $a_i P_1 + b_i P_2$, где P_1 — сумма кратностей прямых конфигураций T, проходящих через точку i, P_2 — сумма кратностей прямых конфигураций T, не проходящих через точку i (так что a_i можно назвать весом наличия точки i, а b_i — весом ее отсутствия). Несложно переформулировать все результаты статьи для этого более общего случая, что мы предоставляем читателю.

Вычислениям для конкретных конфигураций и некоторым приложениям полученных результатов автор надеется посвятить отдельную публикацию.

1. *Холл М.* Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
2. *Ostrom T. G.* Transitivities in projective planes // Can. J. Math. – 1957. – **9**. – P. 389 – 399.
3. *Dembowski P.* Finite geometries. – Berlin: Springer, 1968. – 375 p.
4. *Ryser H. J.* Matrices with integer elements in combinatorial investigations // Amer. J. Math. – 1952. – **74**. – P. 769 – 773.

Получено 01.07.94