УДК 517.9

В. П. Яковець (Ніжин. пед. ін-т)

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

For a linear system of ordinary differential equations with degenerate matrix of derivatives, we find conditions of reducibility to the central canonical form. We also establish the structure of a general solution and conditions of solvability for the Cauchy problem, investigate the problem concerning periodic solutions.

Для лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних знайдено умови звідності до центральної канонічної форми, встановлено структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші, досліджено питання про періодичні розв'язки.

Розглянемо систему рівнянь

$$B(x)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in [a\,;b], \tag{1}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n-го порядку, $f(x)$ — n-вимірний вектор, $\det B(t) = 0 \quad \forall\, t \in [a\,;b]$. Питання про структуру загального розв'язку системи (1) та розв'язність відповідної початкової задачі досліджувалися в $[1-9]$. Проте в цих роботах розглядались окремі частинні випадки, що стосуються досить вузького класу систем даного типу. У даній статті система (1) досліджується при більш загальних умовах.

1. Зведення до центральної канонічної форми. Як відомо [2], загальний розв'язок системи (1) має найпростішу структуру (а саме: розв'язок типу Коші) в тому випадку, коли вона зводиться до центральної канонічної форми.

***Означення* 1** [8]. *Центральною канонічною формою системи* (1) *називається система вигляду*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix}\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} y + g(t), \tag{2}$$

де E_{n-s}, E_s — *одиничні матриці порядку* $n-s$ *і* s *відповідно,* $N(t)$ — *верхньотрикутна матриця з нульовими квадратними блоками на діагоналі.*

Розглянемо деякі достатні умови, при виконанні яких система (1) зводиться до центральної канонічної форми.

Позначатимемо надалі через $C^k[a\,;b]$ множину функцій (скалярних, векторних, матричних), заданих на відрізку $[a\,;b]$, які мають неперервні похідні до k-го порядку включно. Розглянемо оператор

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt},$$

що діє в унітарному просторі $\mathcal{U}^n$ n-вимірних вектор-функцій класу $C^1[a\,;b]$. Скалярний добуток в $\mathcal{U}^n$ визначатимемо за формулою

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\overline{y}_i(t),$$

де $x_i(t)$, $y_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, — координати векторів $x(t)$, $y(t)$ відповідно, $\overline{y}_i(t)$ — функції, комплексно спряжені з $y_i(t)$.

***Означення* 2.** *Будемо говорити, що матриця* $B(t)$ *має на відрізку* $[a\,;b]$ *жорданів ланцюжок векторів довжини* s *відносно оператора* $L(t)$, *якщо існу-*

ють ненульові вектори $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t) \in \mathcal{U}^n$, *які при всіх* $t \in [a\,;b]$ *задовольняють співвідношення*

$$B(t)\varphi_1(t) = 0, \quad B(t)\varphi_i(t) = L(t)\varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, s},$$

а рівняння

$$B(t)z = L(t)\varphi_s(t)$$

не має розв'язку в жодній точці відрізка $[a\,;b]$.

Якщо матриця $B(t)$ має кілька жорданових ланцюжків відносно оператора $L(t)$, то вектори, які їх утворюють, будемо називати жордановим набором матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$.

Нехай жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ складається з векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, які утворюють r ланцюжків довжини s_i, $i = \overline{1, r}$. Згідно з означенням 2 ці вектори при всіх $t \in [a\,;b]$ задовольняють співвідношення

$$B(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0, \quad i = \overline{1, r}; \tag{3}$$

$$B(t)\varphi_i^{(j)}(t) = L(t)\varphi_i^{(j-1)}(t), \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r}. \tag{4}$$

Позначимо через $\psi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, власні вектори матриці $B^*(t)$, спряженої з $B(t)$, які відповідають її нульовому власному значенню. Тоді завдяки сумісності рівнянь (4) справедливі рівності

$$(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(1)}(t)) = 0 \quad \forall\, t \in [a\,;b], \quad j = \overline{1, s_i - 1}, \quad i, k = \overline{1, r}, \tag{5}$$

а r — вимірні вектори, елементами яких є скалярні добутки $(L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t), \psi_j^{(1)}(t))$, $j = \overline{1, r}$ (з фіксованим i), не дорівнюють нулю в жодній точці відрізка $[a\,;b]$. Якщо при цьому

$$\det\left\| (L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t), \psi_j^{(1)}(t)) \right\|_1^r \neq 0 \quad \forall\, t \in [a\,;b], \tag{6}$$

то даний жорданів набір векторів будемо називати повним.

Встановимо деякі властивості жорданових ланцюжків, які будуть використовуватись у подальших викладках. Поряд з оператором $L(t)$ розглянемо формально спряжений з ним оператор

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t),$$

який діє в тому ж просторі $\mathcal{U}^n$ і відповідає системі, спряженій з (1). Мають місце такі твердження.

Лема 1. *Для векторів* $x(t), y(t) \in \mathcal{U}^n$ *тотожність*

$$(L(t)x(t), y(t)) = (x(t), L^*(t)y(t))$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(B(t)x(t), y(t)) = \text{const} \quad \forall\, t \in [a\,;b]. \tag{7}$$

Доведення. Дійсно, за означенням операторів L і L^* маємо

$$(Lx, y) - (x, L^*y) = (Ax, y) - (Bx', y) - (x, A^*y) - (x, (B^*y)') =$$
$$= -(Bx', y) - (B'x, y) - (Bx, y') = -(Bx, y)',$$

звідки і випливає твердження леми.

Лема 2. *Нехай* $\operatorname{rang} B(t) = n - r$, *матриця* $B(t)$ *має на відрізку* $[a; b]$ *повний жорданів набір векторів відносно оператора* $L(t)$, *що складається з* r *жорданових ланцюжків довжини* s_i, $i = \overline{1, r}$, *і* $A(t), B(t) \in C^{m-2}[a; b]$, *де* $m = \max\limits_i s_i$. *Тоді матриця* $B^*(t)$ *має на відрізку* $[a; b]$ *повний жорданів набір векторів відносно оператора* $L^*(t)$, *що складається з жорданових ланцюжків такої ж довжини.*

Доведення. Вектори $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, що утворюють жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$, з рівнянь (3), (4) визначаються неоднозначно. Цю неоднозначність можна усунути, визначивши їх у такий спосіб. Знайдемо і зафіксуємо власні вектори $\varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, так, щоб $\varphi_i^{(1)}(t) \in C^{m-1}[a; b]$, що можливо завдяки відповідній гладкості матриці $B(t)$ [10]. Приєднані вектори визначимо за допомогою рекурентних співвідношень

$$\varphi_i^{(j)}(t) = G(t) L(t) \varphi_i^{(j-1)}(t), \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \tag{8}$$

де $G(t)$ — напівобернена матриця [1] до матриці $B(t)$. Оскільки за умовою леми матриця $B(t)$ має постійний ранг на даному відрізку $[a; b]$, то згідно з [11] матриця $G(t)$ може бути визначена так, щоб вона мала такий же ступінь гладкості, що й $B(t)$. Отже,

$$\varphi_i^{(j)}(t) = [G(t) L(t)]^{j-1} \varphi_i^{(1)}(t), \quad j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \tag{9}$$

причому

$$\varphi_i^{(j)}(t) \in C^{m-j}[a; b], \quad j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Власні вектори $\psi_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1, r}$, матриці $B^*(t)$ визначимо так, щоб $\psi_j^{(1)}(t) \in C^{m-1}[a; b]$, $j = \overline{1, r}$;

$$(L\varphi_i^{(s_i)}, \psi_j^{(1)}) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, r}, \tag{10}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, що можливо завдяки (6) та відповідній гладкості матриці $B^*(t)$.

Зафіксуємо j і розглянемо рівняння

$$B^*(t) \psi_j^{(2)}(t) = L^*(t) \psi_j^{(1)}(t). \tag{11}$$

Оскільки вектори $\psi_j^{(1)}(t)$, $\varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, задовольняють умову (7) леми 1, то згідно з (5) маємо

$$(L^* \psi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}) = \overline{(\varphi_i^{(1)}, L^* \psi_j^{(1)})} = \overline{(L\varphi_i^{(1)}, \psi_j^{(1)})} = 0 \qquad \forall\, t \in [a; b], \quad i = \overline{1, r}.$$

Тому рівняння (11) має розв'язок при всіх $t \in [a; b]$ і вектор $\psi_j^{(2)}(t)$ можна визначити за формулою

$$\psi_j^{(2)}(t) = G^*(t) L^*(t) \psi_j^{(1)}(t). \tag{12}$$

Аналогічно, розглядаючи рівняння

$$B^*(t) \psi_j^{(3)}(t) = L^*(t) \psi_j^{(2)}(t) \tag{13}$$

і використовуючи (5), (9), (12), маємо

$$(L^* \psi_j^{(2)}, \varphi_i^{(1)}) = \overline{(L\varphi_i^{(1)}, \psi_j^{(2)})} = (LGL\varphi_i^{(1)}, \psi_j^{(1)}) = 0 \qquad \forall\, t \in [a; b], \quad i = \overline{1, r},$$

оскільки пари векторів $\varphi_i^{(1)}$, $\psi_j^{(2)}$ і $GL\varphi_i^{(1)}$, $\psi_j^{(1)}$ задовольняють умову (7). Тому рівняння (13) сумісне і з нього знайдемо $\psi_j^{(3)}(t) = [G^*(t)L^*(t)]^2\psi_j^{(1)}(t)$. Продовжуючи ці міркування і беручи до уваги (10), встановимо, що рівняння $B^*\psi_j^{(i)} = L^*\psi_j^{(i-1)}$, $i = \overline{2, s_j}$, сумісні при всіх $t \in [a;b]$, а рівняння $B^*z = L^*\psi_j^{(s_j)}$ не має розв'язку в жодній точці відрізка $[a;b]$.

Отже, кожний з векторів $\psi_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1, r}$, породжує жорданів ланцюжок матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ довжини s_j. Вектори, які утворюють ці ланцюжки, можуть визначатися за формулами

$$\psi_j^{(i)}(t) = [G^*(t)L^*(t)]^{i-1}\psi_j^{(1)}(t), \quad i = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{14}$$

причому

$$\psi_j^{(i)}(t) \in C^{m-i}[a;b], \quad i = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Виходячи з (10), легко переконатися, що цей жорданів набір є повним.

Лема 3. *Вектори $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, що утворюють повний жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$, лінійно незалежні в кожній точці відрізка $[a;b]$.*

Доведення. Припустимо, що вектори $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, лінійно залежні в деякій точці $t_0 \in [a;b]$. Тоді існують числа $c_i^{(j)}$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, такі, що

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i} c_i^{(j)}\varphi_i^{(j)}(t_0) = 0. \tag{15}$$

Помноживши обидві частини рівності (15) скалярно на вектори $L^*(t_0)\psi_j^{(1)}(t_0)$, $j = \overline{1, r}$, і врахувавши, що

$$(\varphi_i^{(s_i)}, L^*\psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(s_i)}, \psi_j^{(1)}) = \delta_{ij},$$

$$(\varphi_i^{(p)}, L^*\psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(1)}) = 0$$

при $p < s_i$, $i, j = \overline{1, r}$, дістанемо $c_i^{(s_i)} = 0$. Тоді рівність (15) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i-1} c_i^{(j)}\varphi_i^{(j)}(t_0) = 0.$$

Помножимо цю рівність почленно на вектори $L^*(t_0)G^*(t_0)L^*(t_0)\psi_j^{(1)}(t_0)$, $j = \overline{1, r}$. Оскільки згідно з (4), (5), (9)

$$(B\varphi_i^{(p)}, G^*L^*\psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(p-1)}, G^*L^*\psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(1)}) = 0$$

при $p < s_i$, $i, j = \overline{1, r}$, то вектори $\varphi_i^{(p)}$ і $G^*L^*\psi_j^{(1)}$ задовольняють умову (7) при $p < s_i$. Тоді згідно з (5), (8), (10)

$$(\varphi_i^{(p)}, L^*G^*L^*\psi_j^{(1)}) = (LGL\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(p+1)}, \psi_j^{(1)}) = 0$$

при $p < s_i - 1$, $i, j = \overline{1, r}$, а

$$(\varphi_i^{(s_i-1)}, L^* G^* L^* \psi_j^{(1)}) = (L\varphi_i^{(s_i)}, \psi_j^{(1)}) = \delta_{ij},$$

звідки випливає, що $c_i^{(s_i-1)} = 0,\ i = \overline{1, r}$.

Продовжуючи цей процес, одержуємо $c_i^{(j)} = 0,\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$, що суперечить припущенню. Лему доведено.

Аналогічно можна довести лінійну незалежність векторів $\psi_j^{(i)}(t),\ i = \overline{1, s_j}$, $j = \overline{1, r}$, що утворюють жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$.

Основним результатом даного параграфу є наступна теорема, коротке доведення якої вперше опубліковано в [12].

Теорема 1. *Нехай* $A(t),\ B(t) \in C^{2m}[a; b]$, $\operatorname{rang} B(t) = n - r$ *і матриця* $B(t)$ *має на відрізку* $[a; b]$ *повний жорданів набір векторів відносно оператора* $L(t)$, *який складається з* r *ланцюжків довжини* $s_1, s_2, \ldots, s_r$, *де* $\max\limits_i s_i = m$. *Тоді існують неособливі при всіх* $t \in [a; b]$ $(n \times n)$*-вимірні матриці* $P(t),\ Q(t) \in C^1[a; b]$ *такі, що множенням на* $P(t)$ *і заміною* $x = Q(t)y$ *система* (1) *зводиться до центральної канонічної форми*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} y + P(t) f(t), \tag{16}$$

де $s = s_1 + \ldots + s_r$, $J = \operatorname{diag}\{J_1, \ldots, J_r\}$, J_j *— нільпотентні блоки Жордана порядку* $s_j,\ j = \overline{1, r}$.

Доведення даної теореми полягає в конструюванні матриць $P(t),\ Q(t)$, за допомогою яких система (1) зводиться до центральної канонічної форми (16).

Нехай вектори $\varphi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$, що утворюють жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$, і вектори $\psi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$, що утворюють жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$, визначені за формулами (8), (14) і задовольняють умову (10). При цьому (див. доведення леми 2) $\varphi_i^{(j)}(t),\ \psi_i^{(j)}(t) \in C^{2m-j+1}[a; b]$, $j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$. Доповнимо s лінійно незалежних векторів $\varphi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$, векторами $q_i(t) \in C^{m+1}[a; b]$, $i = \overline{1, n-s}$, до повного базису в $\mathcal{U}^n$, що завжди можливо [10], і складемо з них, як із стовпців, $(n \times n)$-вимірну матрицю

$$Q_1(t) = [q_1, \ldots, q_{n-s}; \varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_1^{(s_1)}; \ldots; \varphi_r^{(2)}, \ldots, \varphi_r^{(s_r)}; \varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_r^{(1)}], \tag{17}$$

яка буде неособливою при всіх $t \in [a; b]$. Аналогічно, доповнивши вектори $\psi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$, до повного базису в $\mathcal{U}^n$ векторами $p_i(t) \in C^{m+1}[a; b]$, $i = \overline{1, n-s}$, складемо неособливу при всіх $t \in [a; b]$ $(n \times n)$-вимірну матрицю

$$P_1(t) = [p_1, \ldots, p_{n-s}; \psi_1^{(s_1)}, \ldots, \psi_1^{(2)}; \ldots; \psi_r^{(s_r)}, \ldots, \varphi_r^{(2)}; \psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_r^{(1)}]. \tag{18}$$

Помноживши систему (1) на матрицю $P_1(t)$ і зробивши в ній заміну $x = Q_1(t)y_1$, зведемо її до вигляду

$$\begin{bmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} = \begin{bmatrix} R^{(1)}(t) & R^{(2)}(t) \\ R^{(3)}(t) & 0 \end{bmatrix} y_1 + P_1(t) f(t), \tag{19}$$

де $K(t),\ R^{(1)}(t)$ — квадратні матриці $(n - r)$-го порядку. Стовпцями матриці $K(t)$ є вектор-функції

$$K_i(t) = ((Bq_i, p_1), \ldots, (Bq_i, p_{n-s}); (Bq_i, \psi_1^{(s_1)}), \ldots, (Bq_i, \psi_1^{(2)}); \ldots$$
$$\ldots; (Bq_i, \psi_r^{(s_r)}), \ldots, (Bq_i, \psi_r^{(2)})), \quad i = \overline{1, n-s};$$
$$K_{n-s-i+s_1+\ldots+s_{i-1}+j}(t) =$$
$$= ((B\varphi_i^{(j)}, p_1), \ldots, (B\varphi_i^{(j)}, p_{n-s}); (B\varphi_i^{(j)}, \psi_1^{(s_1)}), \ldots, (B\varphi_i^{(j)}, \psi_1^{(2)}); \ldots$$
$$\ldots; (B\varphi_i^{(j)}, \psi_r^{(s_r)}), \ldots, (B\varphi_i^{(j)}, \psi_r^{(2)})), \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r},$$

а стовпці $R_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, n-s}$, $R^{(1)}_{n-s-i+s_1+\ldots+s_{i-1}+j}(t)$, $j = \overline{2, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, матриці $R^{(1)}(t)$ одержуються з відповідних стовпців матриці $K(t)$ заміною $B(t)$ на $L(t)$. Матриця $R^{(2)}(t)$ складається з вектор-стовпців

$$R_i^{(2)}(t) = ((L\varphi_i^{(1)}, p_1), \ldots, (L\varphi_i^{(1)}, p_{n-s}); (L\varphi_i^{(1)}, \psi_1^{(s_1)}), \ldots, (L\varphi_i^{(1)}, \psi_1^{(2)}); \ldots$$
$$\ldots; (L\varphi_i^{(1)}, \psi_r^{(s_r)}), \ldots, (L\varphi_i^{(1)}, \psi_r^{(2)})), \quad i = \overline{1, r},$$

а матриця $R^{(3)}(t)$ — з вектор-рядків вигляду

$$R_i^{(3)}(t) = ((Lq_1, \psi_i^{(1)}), \ldots, (Lq_{n-s}, \psi_i^{(1)}); (L\varphi_1^{(2)}, \psi_i^{(1)}), \ldots, (L\varphi_1^{(s_1)}, \psi_i^{(1)}); \ldots$$
$$\ldots; (L\varphi_r^{(2)}, \psi_i^{(1)}), \ldots, (L\varphi_r^{(s_r)}, \psi_i^{(1)})), \quad i = \overline{1, r}.$$

Згідно з (10) маємо

$$R_i^{(3)}(t) = ((Lq_1, \psi_i^{(1)}), \ldots, (Lq_{n-s}, \psi_i^{(1)}); e^*_{s_1+\ldots+s_i-i}), \quad i = \overline{1, r},$$

де $e^*_{s_1+\ldots+s_i-i}$ — $(s-r)$-вимірний вектор-рядок, $(s_1 + \ldots + s_i - i)$-й елемент якого дорівнює одиниці, а решта — нулі.

Оскільки за умовою теореми $\operatorname{rang} B(t) = n - r$, а множення на неособливу матрицю не змінює рангу матриці, то $\det K(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a; b]$. Помножимо систему (19) на матрицю $P_2(t) = \operatorname{diag}\{K^{-1}(t), E_r\}$, де E_r — одинична матриця r-го порядку. Потім віднімемо від перших $n-r$ рядків обох матриць одержаної системи $(n-r+i)$-ті рядки, помножені на відповідні елементи $(n-s-i+ s_1 + \ldots + s_i)$-х стовпців правої матриці $(i = \overline{1, r})$. Після цього перемістимо $(n - r + i)$-ті стовпці обох матриць на місце $(n - s + s_1 + \ldots + s_{i-1} + 1)$-х $(i = \overline{1, r})$, а $(n - r + i)$-ті рядки — на місце $(n - s + s_1 + \ldots + s_i)$-х $(i = \overline{1, r-1})$. Оскільки згідно з (4)

$$K_{n-s-i+s_1+\ldots+s_{i-1}+j} = R^{(1)}_{n-s-i+s_1+\ldots+s_{i-1}+j-1}, \quad j = \overline{3, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \tag{20}$$
$$K_{n-s-i+s_1+\ldots+s_{i-1}+2} = R_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, r},$$

то в результаті дістанемо

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \frac{dy_2}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ R(t) & E_s \end{bmatrix} y_2 + P_3 P_2 P_1 f(t), \tag{21}$$

де $J = \operatorname{diag}\{J_1, \ldots, J_r\}$, $y_2 = Q_2^{-1} y_1$, Q_2 — відповідна матриця перестановки стовпців, $P_3(t)$ — матриця, яка здійснює описане вище перетворення рядків.

Можливість подальшого перетворення системи (21) до вигляду (16) очевидна. Неважко переконатися також, що остаточні перетворюючі матриці $P(t)$, $Q(t)$ належать $C^1[a;b]$. Теорему доведено.

***Зауваження.* 1.** З доведення теореми 1 випливає, що для забезпечення неперервної диференційовності перетворюючих матриць $P(t)$, $Q(t)$ необхідно, щоб матриці $A(t)$, $B(t)$ мали неперервні похідні $2m$-го порядку включно, де $m = \max_i s_i$. Якщо ж $A(t), B(t) \in C^{2m+k}[a;b]$, то $P(t), Q(t) \in C^{k+1}[a;b]$.

2. Перетворюючу матрицю $Q(t)$ можна подати у вигляді добутку трьох матриць: $Q(t) = Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$, де $Q_1(t)$ — матриця (17), $Q_2(t)$ — матриця перестановки стовпців така, що

$$Q_1(t)Q_2(t) = [q_1, \ldots, q_{n-s}; \varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(s_1)}; \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(s_2)}; \ldots; \varphi_r^{(1)}, \ldots, \varphi_r^{(s_r)}]. \quad (22)$$

Матриця $Q_3(t)$ є нижньотрикутною матрицею з одиницями на діагоналі, оскільки вона здійснює анулювання рядків матриці $R(t)$ в системі (20) за допомогою віднімання стовпців матриці E_s, помножених на відповідні елементи $R(t)$.

Відмітимо, що критерій „ранг-степінь" (ранг матриці $B(t)$ дорівнює степеню многочлена $\det[A(t) - \lambda B(t)]$), який використовується в [2, 3] і при виконанні якого система (1) також зводиться до центральної канонічної форми, випливає з теореми 1 як частинний наслідок. Він виконується тоді, коли матриця $B(t)$ має на даному відрізку $[a;b]$ сталий ранг $n-r$ і r власних векторів, що відповідають її нульовому власному значенню, а приєднані вектори відносно оператора $L(t)$ відсутні. Частинним випадком теореми 1 є також деякі умови, знайдені в [5], при виконанні яких можна понизити порядок системи (1).

2. Структура загального розв'язку. Умови розв'язності задачі Коші. З'ясуємо структуру загального розв'язку системи (1) у тому випадку, коли вона задовольняє умови теореми 1. Припустимо, що $A(t), B(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $f(t) \in C^{m-1}[a;b]$. Тоді згідно з зауваженням 1 вільний член у системі (16) $P(t)f(t) \in C^{m-1}[a;b]$.

Позначимо $y = \mathrm{col}(y_1; y_2)$, де $y_1(t)$, $y_2(t)$ — відповідно $(n-s)$-вимірний і s-вимірний вектори. Тоді система (16) розпадається на дві незалежні системи

$$\frac{dy_1}{dt} = M(t)y_1 + g_1(t); \quad (23)$$

$$J\frac{dy_2}{dt} = y_2 + g_2(t), \quad (24)$$

де $g_1(t) = (P(t)f(t))_1$ — $(n-s)$-вимірний вектор, елементами якого є перші $n-s$ елементів вектора $P(t)f(t)$, $g_2(t) = (P(t)f(t))_2$ — s-вимірний вектор, елементами якого є s останніх елементів вектора Pf.

Загальний розв'язок першої системи записується у вигляді

$$y_1(t) = Y(t)c + \tilde{y}_1(t), \quad (25)$$

де $Y(t)$ — фундаментальна матриця розмірності $n-s$ відповідної однорідної системи, $\tilde{y}_1(t)$ — деякий розв'язок неоднорідної системи (23), c — довільний $(n-s)$-вимірний сталий вектор.

Розв'язок системи (24) знайдемо, користуючись методом [2]. Позначимо $D = J\dfrac{d}{dt}$. Тоді система (24) запишеться у вигляді

$$y_2 = D y_2 - g_2(t). \tag{26}$$

Нехай $y_2(t)$ — розв'язок рівняння (26). Діючи на тотожність (26) оператором D, маємо

$$y_2 = D y_2 - g_2, \quad D y_2 = D^2 y_2 - D g_2, \quad \ldots \quad , D^{m-1} y_2 = D^m y_2 - D^{m-1} g_2.$$

Додавши ці рівності і врахувавши, що $D^m y_2 = J^m \dfrac{d^m y_2}{dt^m} = 0$, знайдемо

$$y_2(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} D^k g_2(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k g_2(t)}{dt^k}. \tag{27}$$

Таким чином, якщо рівняння (24) має розв'язок, то він виражається формулою (27) і, отже, єдиний. Доведемо тепер, що вираз (27) є розв'язком системи (24). Для цього обчислимо нев'язку $r = J \dfrac{dy_2}{dt} - y_2 - g_2$:

$$r = -\sum_{k=0}^{m-1} J^{k+1} \frac{d^{k+1} g_2}{dt^{k+1}} + \sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k g_2}{dt^k} - g_2 =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m-1} J^k \frac{d^k g_2}{dt^k} + \sum_{k=1}^{m-1} J^k \frac{d^k g_2}{dt^k} + g_2 - g_2 = 0.$$

Отже, формула (27) дійсно дає розв'язок системи (24).

Об'єднуючи формули (25), (27), загальний розв'язок системи (16) запишемо у вигляді

$$y(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ -\sum\limits_{k=0}^{m-1} J^k \dfrac{d^k g_2(t)}{dt^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} c + \tilde{y}(t),$$

де $\tilde{y}(t)$ — деякий частинний розв'язок цієї системи. Повернувшись до змінної $x(t)$ за формулою $x = Q(t)y$, одержимо загальний розв'язок вихідної системи (1):

$$x(t) = X_{n-s}(t)\, c + \tilde{x}(t), \tag{28}$$

де $X_{n-s}(t)$ — прямокутна матриця розмірності $n \times (n-s)$, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t) x, \tag{29}$$

$\tilde{x}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідної системи (1).

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай*: 1) $\operatorname{rang} B(t) = n - r = \text{const} \quad \forall\, t \in [a\,;b]$; 2) *матриця* $B(t)$ *має на* $[a\,;b]$ *повний жорданів набір векторів відносно оператора* $L(t)$, *який складається з* r *ланцюжків довжини* s_i, $i = \overline{1, r}$; 3) $A(t)$, $B(t) \in C^{3m-2}[a\,;b]$, $f(t) \in C^{m-1}[a\,;b]$, *де* $m = \max\limits_i s_i$. *Тоді загальний розв'язок системи* (1) *має вигляд* (28), *де* $X_{n-s}(t)$ — *матриця розмірності* $n \times (n-s)$, $s = = s_1 + \ldots + s_r$, *складена з* $n-s$ *лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи* (29), c — $(n-s)$-*вимірний вектор довільних сталих,* $\tilde{x}(t)$ — *довільний розв'язок неоднорідної системи.*

Заначимо, що теорема 1 із [3] є наслідком даної теореми.

Виявляється, що подібно до невироджених систем при виконанні умов теореми 2 для відшукання частинного розв'язку $\tilde{x}(t)$ системи (1) можна застосувати метод варіації довільних сталих.

Для цього поряд з системою (29) розглянемо відповідну їй спряжену систему

$$\frac{d}{dt}B^*(t)y = -A^*(t)x, \qquad t\in[a;b]. \tag{30}$$

З леми 2 випливає, що при виконанні умов теореми 2 загальний розв'язок цієї системи має таку ж структуру, як і загальний розв'язок системи (29), а саме: $y(t) = Y_{n-s}(t)c$, де $Y_{n-s}(t)$ — матриця розмірності $n\times(n-s)$, складена з довільних $n-s$ лінійно незалежних розв'язків системи (30). При цьому, якщо система (29) зводиться до вигляду (16) множенням на матрицю $P(t)$ і заміною $x = Q(t)y$, то система (30) зводиться до аналогічного вигляду за допомогою заміни $y = P^*(t)z$ і множення на матрицю $Q^*(t)$.

Між розв'язками систем (29), (30) існує певна залежність. Має місце таке твердження.

Лема 4. *Якщо* $x(t)$ — *розв'язок системи* (29), *а* $y(t)$ — *розв'язок системи* (30), *то* $\big(B(t)x(t), y(t)\big) = \mathrm{const}\quad \forall\, t\in[a;b]$.

Доведення. Оскільки за умовою $B(t)x'(t) = A(t)x(t)$, $\left(B^*(t)y(t)\right)' = -A^*(t)y(t)$, то

$$(Bx,y)' = (B'x,y) + (Bx',y) + (Bx,y') =$$
$$= \big(x,(B^*)'y\big) + (x,B^*y') + (Bx',y) =$$
$$= \big(x,(B^*y)'\big) + (Bx',y) = -(x,A^*y) + (Ax,y) = 0,$$

звідки й випливає твердження леми.

Надалі матриці $X_{n-s}(t)$ і $Y_{n-s}(t)$, складені з лінійно незалежних розв'язків систем (29), (30) відповідно, будемо називати фундаментальними матрицями цих систем. Безпосереднім наслідком леми 4 є таке твердження.

Лема 5. *Фундаментальні матриці* $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ *однорідної системи* (29) *і відповідної їй спряженої системи* (30) *задовольняють співвідношення*

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t) = C, \tag{31}$$

де C — *деяка неособлива квадратна матриця* $(n-s)$*-го порядку, елементи якої є сталими числами.*

Доведення. Незмінність матриці C випливає безпосередньо з леми 4. Покажемо, що $\det C\neq 0$. Дійсно, з доведення теореми 2 випливає, що $X_{n-s}(t) = Q(t)\,\mathrm{col}\,[X(t);0]$, де $X(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає (23). Аналогічно $Y_{n-s}(t) = P^*(t)\,\mathrm{col}\,[Y(t);0]$, де $Y(t)$ — фундаментальна матриця відповідної спряженої системи. Тоді, враховуючи, що $B(t) = P^{-1}(t)\,\mathrm{diag}\,\{E_{n-s}, J\}Q^{-1}(t)$, дістаємо

$$Y^*_{n-s}BX_{n-s} = \left(P^*\begin{bmatrix} Y\\ 0\end{bmatrix}\right)^* P^{-1}\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0\\ 0 & J\end{bmatrix} Q^{-1}Q\begin{bmatrix} X\\ 0\end{bmatrix} = Y^*(t)X(t).$$

Оскільки $\det X(t)\neq 0$, $\det Y^*(t)\neq 0\ \ \forall\, t\in[a;b]$, то й $\det C\neq 0$.

Виходячи з (31), фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ систем (29), (30) завжди можна визначити так, щоб виконувалася рівність

$$Y^*_{n-s}(t)\,B(t)\,X_{n-s}(t) \;=\; E_{n-s}, \tag{32}$$

де E_{n-s} — одинична матриця $(n-s)$-го порядку. Далі будемо вважати, що матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ задовольняють рівність (32).

Позначимо через $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ $(n \times s)$-вимірні матриці, складені з векторів, що утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$$\begin{gathered}\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t),\ldots,\varphi_1^{(s_1)}(t);\varphi_2^{(1)}(t),\ldots,\varphi_2^{(s_2)}(t);\ldots;\varphi_r^{(1)}(t),\ldots,\varphi_r^{(s_r)}(t)],\\ \Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t),\ldots,\psi_1^{(1)}(t);\psi_2^{(s_2)}(t),\ldots,\psi_2^{(1)}(t);\ldots;\psi_r^{(s_r)}(t),\ldots,\varphi_r^{(1)}(t)].\end{gathered} \tag{33}$$

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми* 2 *і знайдено фундаментальні матриці* $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ *однорідної системи* (29) *та відповідної спряженої системи* (30) *такі, що виконується умова* (32), *то частинний розв'язок неоднорідної системи* (1) *можна знайти за формулою*

$$\tilde{x}(t) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t} X_{n-s}(t)\,Y^*_{n-s}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau \;-\; \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k\,\frac{d^k}{dt^k}\,[\Psi^*(t)\,L\,\Phi(t)]^{-1}\,\Psi^*(t)\,f(t). \tag{34}$$

Доведення. Побудуємо $(n \times n)$-вимірні матриці

$$U(t) \;=\; [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \qquad V(t) \;=\; [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^*,$$

які будуть неособливими при всіх $t \in [a\,;b]$. Дійсно, згідно з зауваженням 2

$$X_{n-s}(t) \;=\; Q_1(t)\,Q_2(t)\,\mathrm{col}\,[X(t);0], \qquad \Phi(t) \;=\; Q_1(t)\,\mathrm{col}\,[0\,;E_s],$$

де $Q_1 = [q_1(t),\ldots,q_{n-s}(t),\Phi(t)]$, E_s — одинична $(s\times s)$-вимірна матриця, $Q_2(t)$ — нижньотрикутна матриця з одиницями на діагоналі. Тоді, подавши матрицю $Q_2(t)$ в блочному вигляді

$$Q_2(t) \;=\; \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & 0 \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix},$$

де $Q_{11}(t)$, $Q_{22}(t)$ — нижньотрикутні квадратні матриці відповідно $(n-s)$-го і s-го порядку з одиницями на діагоналі, дістанемо

$$U(t) \;=\; Q_1(t)\begin{pmatrix} Q_{11}(t)\,X(t) & 0 \\ Q_{21}(t)\,X(t) & E_s \end{pmatrix}.$$

Звідси $\det U(t) = \det Q_1 \det X$ і оскільки матриці $Q_1(t)$, $X(t)$ неособливі при всіх $t \in [a\,;b]$, то $\det U(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a\,;b]$. Аналогічно доводиться неособливість матриці $V(t)$.

Перейдемо тепер до побудови частинного розв'язку системи (1). Будемо шукати його у вигляді

$$x(t) \;=\; U(t)\,y(t). \tag{35}$$

Підставивши вектор (35) у систему (1) і помноживши одержану рівність зліва на матрицю $V(t)$, дістанемо

$$V(t)\,B(t)\,U(t)\,\frac{dy}{dt} \;=\; V(t)\,L(t)\,U(t)\,y \;+\; V(t)\,f(t). \tag{36}$$

Відповідно до структури матриць $U(t)$, $V(t)$ матриці даної системи можна подати у такому блочному вигляді:

$$VBU = \begin{pmatrix} Y_{n-s}^* B X_{n-s} & Y_{n-s}^* B\Phi \\ \Psi^* B X_{n-s} & \Psi^* B\Phi \end{pmatrix}, \qquad VLU = \begin{pmatrix} 0 & Y^* L\Phi \\ 0 & \Psi^* L\Phi \end{pmatrix}.$$

Використовуючи властивості жорданових ланцюжків векторів, легко переконатися, що

$$Y_{n-s}^*(t)B(t)\Phi(t) = 0, \qquad \Psi^*(t)B(t)X_{n-s}(t) = 0, \qquad Y_{n-s}^*(t)L(t)\Phi(t) = 0. \quad (37)$$

Дійсно, згідно з (4) маємо

$$Y_{n-s}^*(t)B(t)\Phi(t) = Y_{n-s}^*(t)\left[0, B\varphi_1^{(2)}, \ldots, B\varphi_1^{(s_1)}; \ldots; 0, B\varphi_r^{(2)}, \ldots, B\varphi_r^{(s_r)}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (L\varphi_1^{(1)}, y_1) & \ldots & (L\varphi_1^{(s_1-1)}, y_1) & \ldots & 0 & (L\varphi_r^{(1)}, y_1) & \ldots & (L\varphi_r^{(s_r-1)}, y_1) \\ 0 & (L\varphi_1^{(1)}, y_2) & \ldots & (L\varphi_1^{(s_1-1)}, y_2) & \ldots & 0 & (L\varphi_r^{(1)}, y_2) & \ldots & (L\varphi_r^{(s_r-1)}, y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (L\varphi_1^{(1)}, y_{n-s}) & \ldots & (L\varphi_1^{(s_1-1)}, y_{n-s}) & \ldots & 0 & (L\varphi_r^{(1)}, y_{n-s}) & \ldots & (L\varphi_r^{(s_r-1)}, y_{n-s}) \end{pmatrix},$$

де $y_i(t)$, $i = \overline{1, n-s}$, — лінійно незалежні розв'язки системи (30), з яких утворена матриця $Y_{n-s}^*(t)$. Оскільки $(B\varphi_1^{(1)}, y_i) = 0$, $i = \overline{1, n-s}$, то згідно з лемою 1

$$(L\varphi_1^{(1)}, y_i) = (\varphi_1^{(1)}, L^* y_i) = 0, \qquad i = \overline{1, n-s}.$$

Тоді $(B\varphi_1^{(2)}, y_i) = (L\varphi_1^{(1)}, y_i) = 0$, $i = \overline{1, n-s}$, і, отже,

$$(L\varphi_1^{(2)}, y_i) = (\varphi_1^{(2)}, L^* y_i) = 0, \qquad i = \overline{1, n-s}.$$

Міркуючи так і далі, встановимо, що всі елементи матриці $Y_{n-s}^*(t)B(t)\Phi(t)$ дорівнюють нулю. Аналогічно доводяться й дві інші рівності (37).

Використовуючи подібні міркування і враховуючи (10), встановимо, що $\det \Psi^*(t)L(t)\Phi(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a; b]$. Крім того, згідно з (3), (4) $(s_1 + \ldots + s_{i-1} + 1)$-ші стовпці матриці $\Psi^* B \Phi$ є нульовими $(i = \overline{1, r})$, а $(s_1 + \ldots + s_{i-1} + j)$-й стовпець збігається з $(s_1 + \ldots + s_{i-1} + j - 1)$-м стовпцем матриці $\Psi^* L \Phi$ $(j = \overline{2, s_i}$, $i = \overline{1, r})$. Тому, помноживши систему (36) на $\operatorname{diag}\{E_{n-s}; R(t)\}$, де

$$R(t) = \left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}, \quad (38)$$

і враховуючи (32), одержимо

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} Y_{n-s}^*(t) f(t) \\ R(t)\Psi^*(t) f(t) \end{pmatrix},$$

де J — та ж матриця, що й у (16). Ця система розпадається на дві незалежні системи

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_{n-s}^*(t) f(t); \qquad J\frac{dy_2}{dt} = y_2 + R(t)\Psi^*(t) f(t),$$

розв'язавши які, дістанемо

$$y_1(t) = \int_a^t Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau + c, \qquad y_2(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \Psi^*(t) f(t),$$

де c — довільний сталий $(n-s)$-вимірний вектор.

Повернувшись до вихідної змінної згідно з формулою (35), знайдемо шуканий розв'язок системи (1) у вигляді (34), якщо покладемо $c=0$. Теорему доведено.

Припустимо тепер, що виконуються умови теореми 2 і розглянемо для системи (1) задачу Коші з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in [a; b]. \tag{39}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми* 2, *то для того щоб задача Коші* (1), (39) *мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор* x_0 *задовольняв співвідношення*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} (A(t_0) x_0 + f(t_0), \psi_j^{(k-i)}(t_0)) = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, s_j}, \tag{40}$$

де $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, *— вектори, що утворюють жорданів набір матриці* $B^*(t)$ *відносно оператора* $L^*(t)$. *Цей розв'язок єдиний і знаходиться за формулою*

$$x(t) = X_{n-s}(t) Y_{n-s}^*(t_0) B(t_0) x_0 + \int_{t_0}^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau -$$

$$- \Phi(t) \sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t) L(t) \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t), \tag{41}$$

де $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ *— матриці* (33), $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ *— фундаментальні матриці однорідних систем* (29), (30), *що задовольняють умову* (32).

Доведення. Після зведення системи (1) до центральної канонічної форми (23), (24) за допомогою перетворюючих матриць $P(t)$, $Q(t)$ початкова умова (39) набуває вигляду

$$[Q^{-1}(t_0) x_0]_1 = y_1(t_0), \qquad [Q^{-1}(t_0) x_0]_2 = y_2(t_0),$$

де $[Q^{-1}(t_0) x_0]_1$ — $(n-s)$-вимірний вектор, координати якого — перші $n-s$ координат вектора $Q^{-1}(t_0) x_0$, а $[Q^{-1}(t_0) x_0]_2$ — s-вимірний вектор, координатами якого є s останніх координат вектора $Q^{-1}(t_0) x_0$.

Першу умову завжди можна задовольнити, оскільки вона стосується невиродженої системи (23). Друга ж умова задовольняється не при всіх x_0. Згідно з (7) вона виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k [P(t_0) f(t_0)]_2}{dt^k} + [Q^{-1}(t_0) x_0]_2 = 0. \tag{42}$$

Перетворимо цю рівність. Згідно з теоремою 1 справедливі тотожності

$$PBQ = \operatorname{diag}\{E_{n-s}; J\}, \qquad PAQ + PB\frac{dQ}{dt} = \operatorname{diag}\{M(t); E_s\}.$$

Продиференціювавши першу тотожність, одержимо

$$-P(t)B(t)\frac{dQ}{dt} = (P(t)B(t))'Q(t),$$

звідки

$$[Q^{-1}(t_0)x_0]_2 = \left[\left(P(t_0)A(t_0) + \frac{d}{dt}(P(t_0)B(t_0))\right)x_0\right]_2.$$

З урахуванням цієї рівності умова (42) запишеться у вигляді

$$\left\{\left(P(t_0)A(t_0) + \frac{d}{dt}(P(t_0)B(t_0))\right)x_0\right\}_i + \sum_{k=0}^{m-1}\left\{J^k\frac{d^k}{dt^k}[P(t_0)f(t_0)]_2\right\}_i = 0, \quad i=\overline{1,s}. \tag{43}$$

Позначимо через $p_i^*(t)$, $i=\overline{1,s}$, останні s вектор-рядків матриці $P(t)$. Тоді одержимо

$$\left\{\left(P(t_0)A(t_0) + \frac{d}{dt}(P(t_0)B(t_0))\right)x_0\right\}_i =$$

$$= \{P(t_0)A(t_0)x_0\}_i + \{P'(t_0)B(t_0)x_0\}_i + \{P(t_0)B'(t_0)x_0\}_i =$$

$$= p_i^*(t_0)A(t_0)x_0 + (p_i^*(t))'B(t_0)x_0 + p_i^*(t_0)B'(t_0)x_0 =$$

$$= (A^*(t_0)p_i(t_0))^*x_0 + (B^*(t_0)p_i'(t_0))^*x_0 + ((B^*(t_0))'p_i)^*x_0 =$$

$$= (x_0, A^*(t_0)p_i(t_0)) + (x_0, (B^*(t_0)p_i(t_0))') = (x_0, L^*(t_0)p_i(t_0)),$$

$$\{P(t_0), f(t_0)\}_i = (f(t_0), p_i(t_0)), \quad i=\overline{1,s}.$$

У результаті рівності (43) набувають вигляду

$$(x_0, L^*(t_0)P_{s_1+\ldots+s_{i-1}+j}(t_0)) + \sum_{k=0}^{s_i-j}\frac{d^k}{dt^k}(f(t_0), P_{s_1+\ldots+s_{i-1}+j+k}(t_0)) = 0, \tag{44}$$

$$j=\overline{1,s_i}, \quad i=\overline{1,r}.$$

Як видно з доведення теореми 1, матрицю $P(t)$ можна подати у вигляді добутку матриць: $P(t)=P_2(t)P_1(t)$, де $P_1(t)$ — основна перетворююча матриця, останні s рядків якої утворені векторами $\psi_1^{(s_1)}(t), \ldots, \psi_1^{(1)}(t)$; $\psi_2^{(s_2)}(t), \ldots$ $\ldots, \psi_2^{(1)}(t)$; $\ldots$; $\psi_r^{(s_r)}(t), \ldots, \psi_r^{(1)}(t)$, а $P_2(t)$ — допоміжна матриця, яка „впорядковує“ систему (1) після здійснення в ній заміни $x=Q_1(t)y$ і множення на матрицю $P_1(t)$.

Можна показати, що матриця $P_2(t)$ не впливає на виконання рівностей (44) і, отже, в них замість p_i, $i=\overline{1,s}$, слід взяти відповідні рядки основної перетворюючої матриці $P_1(t)$, тобто $p_{s_1+\ldots+s_{i-1}+j}(t) = \psi_i^{(s_i+1-j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,s}$. В результаті маємо

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(s_i+1-j)}(t_0)) + \sum_{k=0}^{s_i-1}\frac{d^k}{dt^k}(f(t_0), \psi_i^{(s_i+1-j-k)}(t_0)) = 0, \quad j=\overline{1,s_i}, \ i=\overline{1,r}. \tag{45}$$

Зафіксуємо i і розглянемо рівності, що відповідають i-му жордановому ланцюжку матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(s_i+1-j)}(t_0)) + \sum_{k=0}^{s_i-j}\frac{d^k}{dt^k}(f(t_0), \psi_i^{(s_i+1-j-k)}(t_0)) = 0, \quad j=\overline{1,s_i}. \tag{46}$$

Остання з них має вигляд

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(1)}(t_0)) + (f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0. \tag{47}$$

Оскільки вектори x_0, $\psi_i^{(1)}(t)$ задовольняють умову леми 1, то

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(1)}(t_0)) = (L(t_0)x_0, \psi_i^{(1)}(t_0)) = (A(t_0)x_0, \psi_i^{(1)}(t_0))$$

і, отже, замість (47) дістаємо

$$(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0.$$

Передостання з рівностей (46) має вигляд

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(2)}(t_0)) + (f(t_0), \psi_i^{(2)}(t_0)) + \frac{d}{dt}(f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0. \tag{48}$$

Оскільки

$$(x_0, L^*\psi_i^{(2)}) = (x_0, A^*\psi_i^{(2)}) + \left(x_0, \frac{d}{dt}(B^*\psi_i^{(2)})\right) =$$

$$= (Ax_0, \psi_i^{(2)}) + \frac{d}{dt}(x_0, L^*\psi_i^{(1)}) = (Ax_0, \psi_i^{(2)}) + \frac{d}{dt}(Ax_0, \psi_i^{(1)}), \tag{49}$$

то рівність (48) записується так:

$$(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(2)}(t_0)) + \frac{d}{dt}(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0.$$

Беручи до уваги (49), маємо

$$(x_0, L^*\psi_i^{(3)}) = (Ax_0, \psi_i^{(3)}) + \frac{d}{dt}(Ax_0, \psi_i^{(2)}) + \frac{d^2}{dt^2}(Ax_0, \psi_i^{(1)}).$$

Тоді наступна рівність

$$(x_0, L^*(t_0)\psi_i^{(3)}(t_0)) + (f(t_0), \psi_i^{(3)}(t_0)) +$$

$$+ \frac{d}{dt}(f(t_0), \psi_i^{(2)}(t_0)) + \frac{d^2}{dt^2}(f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0$$

набуває вигляду

$$(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(3)}(t_0)) + \frac{d}{dt}(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(2)}(t_0)) +$$

$$+ \frac{d^2}{dt^2}(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_i^{(1)}(t_0)) = 0.$$

Продовжуючи ці перетворення, встановлюємо, що умови (45) еквівалентні умовам (40).

Як видно з попередніх міркувань, умови (40) є необхідними і достатніми для існування розв'язку задачі (1), (39). Покажемо тепер, що коли виконуються ці умови, то розв'язок задачі (1), (39) єдиний і знаходиться за формулою (41).

Згідно з теоремами 2, 3 загальний розв'язок системи (1) можна подати у вигляді

$$x(t) = X_{n-s}(t)c + \int_{t_0}^{t} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}R(t)\Psi^*(t)f(t), \tag{50}$$

де $R(t)$ — матриця (38). Підставимо сюди початкову умову (39) і помножимо одержану рівність на матрицю $U^{-1}(t_0)$. Враховуючи, що

$$U^{-1}(t_0)X_{n-s}(t_0) = \operatorname{col}[E_{n-s}; 0], \qquad U^{-1}(t_0)\Phi(t_0) = \operatorname{col}[0; E_s], \tag{51}$$

дістаємо

$$[U^{-1}(t_0)x_0]_1 = c; \quad [U^{-1}(t_0)x_0]_2 + \sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k} R(t_0)\Psi^*(t_0)f(t_0) = 0. \tag{52}$$

Перша з цих рівностей дає шукане значення сталого $(n-s)$-вимірного вектора. Що ж стосується другої рівності, то вона еквівалентна умові (40). Дійсно, як випливає з доведення теореми 3,

$$\begin{gathered} \operatorname{diag}\{E_{n-s}; R(t)\}\, V(t)B(t)U(t) = \operatorname{diag}[E_{n-s}; J], \\ \operatorname{diag}\{E_{n-s}; R(t)\}\, V(t)L(t)U(t) = \operatorname{diag}[0; E_s]. \end{gathered} \tag{53}$$

Продиференціювавши першу тотожність, знайдемо

$$\operatorname{diag}\{E_{n-s}; R(t)\}\, VBU' = -\operatorname{diag}[0; R']\, VBU - \operatorname{diag}\{E_{n-s}; R\}(VB)'U.$$

Підставивши цей вираз у другу тотожність, одержимо

$$\begin{gathered} [U^{-1}(t_0)x_0]_2 = R(t_0)[V(t_0)A(t_0)x_0]_2 + R'(t_0)[V(t_0)B(t_0)x_0]_2 + \\ + R(t_0)\left[\frac{d}{dt}V(t_0)B(t_0)x_0\right]_2, \end{gathered}$$

звідки, у відповідності зі структурою матриці $V(t)$, маємо

$$[U^{-1}(t_0)x_0]_2 = R(t_0)\Psi^*(t_0)A(t_0)x_0 + \frac{d}{dt}[R(t_0)\Psi^*(t_0)B(t_0)]x_0.$$

Підставивши цей вираз у (52), дістанемо рівність

$$\begin{gathered} R(t_0)\Psi^*(t_0)A(t_0)x_0 + \frac{d}{dt}[R(t_0)\Psi^*(t_0)B(t_0)]x_0 + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k} R(t_0)\Psi^*(t_0)f(t_0) = 0, \end{gathered}$$

що, як неважко переконатися, еквівалентна (40).

Отже, якщо початковий вектор x_0 задовольняє умову (40), то задача Коші (1), (39) має єдиний розв'язок, який виражається формулою (50), де замість c необхідно підставити вектор (52).

Користуючись першою з тотожностей (53), знаходимо

$$[U^{-1}(t_0)x_0]_1 = [V(t_0)B(t_0)x_0]_1 = Y_{n-s}^*(t_0)B(t_0)x_0. \tag{54}$$

Тоді згідно з (52) розв'язок задачі Коші (1), (39) запишеться у вигляді (41). Теорему доведено.

3. Періодичні розв'язки. Розглянемо систему (1), припустивши, що матриці $A(t)$, $B(t)$ і вектор $f(t)$ достатньо гладкі при всіх $t \in R$ і періодичні з періодом $T > 0$, тобто $A(t), B(t), f(t) \in C^k(R, T)$. Далі порядок гладкості k буде уточнюватися.

Питання про періодичні розв'язки системи (1) з виродженою матрицею при похідній розглядалося в [4, 5]. Дослідження в цих роботах грунтується на ідеї пониження порядку системи (1) і зведенні її до нормальної форми. При цьому в

[4] вимагається, щоб матриця $B(t)$ при похідній мала постійну жорданову структуру на R відносно нульового власного значення, а в [5] ця умова заміняється слабшою умовою постійності рангу матриці $B(t)$. Використання проведених вище досліджень системи (1) дозволило нам здобути більш загальні результати.

Розглянемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 6. *Якщо* $B(t) \in C^k(R, T)$ *і* $\operatorname{rang} B(t) = \text{const}$ $\forall t \in R$, *то існує напівобернена матриця* $G(t)$ *до матриці* $B(t)$ *така, що* $G(t) \in C^k(R, T)$.

Доведення. Нехай $\operatorname{rang} B(t) = n - r$, $r > 0$. Згідно з теоремою 6 із [10] власні вектори $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, матриць $B(t)$ і $B^*(t)$ відповідно, що відповідають їхньому нульовому власному значенню, можна визначити так, щоб $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t) \in C^k(R, T)$. Як показано в [13], ці вектори можна доповнити до повних базисів в $\mathcal{U}^n$ векторами $p_i(t)$, $q_i(t) \in C^k(R, T)$, $i = \overline{1, n-r}$.

Складемо з усіх цих векторів $(n \times n)$-вимірні матриці

$$P(t) = [p_1, \ldots, p_{n-r}, \varphi_1, \ldots, \varphi_r],$$

$$Q(t) = [q_1, \ldots, q_{n-r}, \psi_1, \ldots, \psi_r]^*.$$

Тоді при всіх $t \in R$ має місце рівність

$$Q(t) B(t) P(t) = \tilde{B}(t) = \operatorname{diag}\{S(t); 0\}, \tag{55}$$

де $S(t) \in C^k(R, T)$ — неособлива квадратна матриця $(n - r)$-го порядку. Однією з напівобернених матриць до матриці $\tilde{B}(t)$ є матриця $\tilde{B}^+(t) = \operatorname{diag}\{S^{-1}(t); 0\}$ [1, с. 30]. Тоді напівоберненою до матриці $B(t)$ буде матриця $G(t) = P(t)\tilde{B}^+(t)Q(t)$. Дійсно, з (55) маємо $B = Q^{-1}\tilde{B}P^{-1}$. Отже,

$$B\,G\,B = Q^{-1}\tilde{B}P^{-1}P\tilde{B}^+QQ^{-1}\tilde{B}P^{-1} = Q^{-1}\tilde{B}\tilde{B}^+\tilde{B}P^{-1} = Q^{-1}\tilde{B}P^{-1} = B.$$

З попередніх міркувань ясно, що $G(t) \in C^k(R, T)$.

Лема 7. *Якщо* $A(t)$, $B(t) \in C^k(R, T)$, $\operatorname{rang} B(t) = n - r = \text{const}$ $\forall t \in R$ *і матриця* $B(t)$ *має при всіх* $t \in R$ *повний жорданів набір векторів* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s_i}$, *відносно оператора* $L(t)$, *то як ці вектори, так і вектори* $\psi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s_i}$, *що утворюють жорданів набір матриці* $B^*(t)$ *відносно оператора* $L^*(t)$, *можна визначити так, щоб* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $\psi_i^{(j)}(t) \in C^{k-j+1}(R, T)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s_i}$.

Доведення цього твердження випливає з леми 6 і формул (9), (14), за допомогою яких визначаються вектори даних жорданових наборів.

Безпосереднім наслідком лем 6, 7 і теореми 1 є наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай* $A(t)$, $B(t) \in C^{2m+k}(R, T)$, $k \geq 0$; $\operatorname{rang} B(t) = n - r$ $\forall t \in R$, *і матриця* $B(t)$ *при всіх* $t \in R$ *має повний жорданів набір векторів відносно оператора* $L(t)$, *який складається з* r *ланцюжків довжини* $s_1, \ldots, s_r$, *де* $\max\limits_i s_i = m$. *Тоді існують неособливі при всіх* $t \in R$ $(n \times n)$-*вимірні матриці* $P(t)$, $Q(t) \in C^{k+1}(R, T)$ *такі, що множенням на* $P(t)$ *і заміною* $x = Q(t)y$ *система* (1) *зводиться до центральної канонічної форми* (16), *де* $M(t) \in C^{k+1}(R, T)$.

Доведення цієї теореми повністю повторює доведення теореми 1. Перетворюючі матриці $P_1(t)$, $Q_1(t)$ складаються за формулами (17), (18), а їх T-періодичність випливає з лем 6, 7 і теореми про можливість доповнення лінійно незалежної системи T-періодичних векторів до повного базису в $\mathcal{U}^n$ T-періодичними векторами, яка доведена в [13]. T-періодичність наступних перетворюючих матриць очевидна.

Перейдемо тепер до питання про періодичні розв'язки системи (1). Нехай виконуються умови теореми 5 і $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ — фундаментальні матриці систем (29), (30), побудовані так, що має місце рівність (32). Будемо шукати розв'язок однорідної системи (29), який при всіх $t \in R$ задовольняє умову

$$x(t+T) = \rho\, x(t), \tag{56}$$

де ρ — деяке число. З умови (56) випливає

$$x(T) = \rho\, x(0). \tag{57}$$

Навпаки, якщо існує розв'язок $x(t)$ системи (29), для якого виконується рівність (57) при деякому ρ, то цей розв'язок задовольняє умову (56). Дійсно, якщо $x(t)$ — розв'язок системи (29), то внаслідок періодичності її коефіцієнтів вектор $x(t+T)$ також буде розв'язком цієї системи. Оскільки згідно з (57) розв'язки $\rho\, x(t)$ і $x(t+T)$ мають однакові допустимі початкові умови, то завдяки єдиності розв'язку із заданою допустимою початковою умовою (теорема 4) вони збігаються при всіх $t \in R$. Отже, умови (56) і (57) еквівалентні.

Розв'язок, що задовольняє умову (57), шукатимемо у вигляді $x(t) = X_{n-s}(t)\, a$, де a — сталий $(n-s)$-вимірний вектор. Підставивши цей вираз у (57), маємо

$$X_{n-s}(t)\, a = \rho\, X_{n-s}(0)\, a. \tag{58}$$

Помножимо цю рівність на матрицю $U^{-1}(0) = [X_{n-s}(0); \Phi(0)]^{-1}$, де $\Phi(t)$ — матриця (33). Оскільки $U^{-1}(0) X_{n-s}(0) = \operatorname{col}[E_{n-s}; 0]$, то в результаті дістанемо

$$[U^{-1}(0) X_{n-s}(T)]_1\, a = \rho\, a, \qquad [U^{-1}(0) X_{n-s}(T)]_2\, a = 0.$$

Покажемо, що

$$[U^{-1}(0) X_{n-s}(T)]_2 = 0. \tag{59}$$

Дійсно, $X_{n-s}(T) = Q(T) \operatorname{col}[x(T); 0]$, де $X(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає (23). Оскільки згідно з теоремою 5 $Q(T) = Q(0)$, то звідси знаходимо

$$[U^{-1}(0) X_{n-s}(T)]_2 = [U^{-1}(0) Q(0)]_{21} X(T), \tag{60}$$

де $[U^{-1}(0) Q(0)]_{ij}$, $i, j = 1, 2,$ — розбиття матриці $U^{-1}(0) Q(0)$ на блоки у відповідності зі структурою матриці $\operatorname{col}[x(T); 0]$. З другого боку

$$U^{-1}(0) X_{n-s}(0) = U^{-1}(0) Q(0) \operatorname{col}[X(0); 0] = \operatorname{col}[E_{n-s}; 0],$$

звідки $[U^{-1}(0) Q(0)]_{21} X(0) = 0$. Помноживши цю рівність справа на матрицю $X^{-1}(0)$, дістанемо $[U^{-1}(0) Q(0)]_{21} = 0$. Тоді з (60) випливає (59).

Отже, рівність (58) еквівалентна рівності

$$[U^{-1}(0) X_{n-s}(T)]_1\, a = \rho\, a.$$

Використовуючи першу з тотожностей (53) і враховуючи структуру матриці $V(t) = [Y_{n-s}; \Psi(t)]^*$, встановлюємо, що

$$[U^{-1}(0)X_{n-s}(T)]_1 = [V(0)B(0)X_{n-s}(T)]_1 = Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T). \quad (61)$$

Таким чином, для визначення a і ρ маємо рівняння

$$[Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T) - \rho E_{n-s}]a = 0. \quad (62)$$

По аналогії з невиродженою системою матрицю $Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T)$ будемо називати матрицею монодромії системи (29), а її власні значення ρ_i — мультиплікаторами системи (29). Рівняння

$$\det[Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T) - \rho E_{n-s}] = 0, \quad (63)$$

з якого знаходяться мультиплікатори, будемо називати характеристичним рівнянням системи (29) з періодичними коефіцієнтами.

Кожному мультиплікатору ρ відповідає розв'язок системи (29), який задовольняє співвідношення (56). Цей розв'язок знаходиться за формулою $x(t) = X_{n-s}(t)a$, де a — власний вектор матриці монодромії, що відповідає мультиплікатору ρ. Якщо один з мультиплікаторів системи (29) дорівнює одиниці, то ця система має T-періодичні розв'язки, кількість яких дорівнює кількості відповідних власних векторів матриці монодромії.

Підсумком проведених досліджень є така теорема.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови теореми* 5, *то для того щоб однорідна система* (29) *мала T-періодичний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вона мала мультиплікатор, який дорівнює одиниці.*

Для неоднорідної системи (1) справедлива наступна теорема.

Теорема 7. *Якщо виконуються умови теореми* 5, $f(t) \in C^{m-1}(R, T)$ *і однорідна система* (29) *не має T-періодичного розв'язку, то система* (1) *має єдиний T-періодичний розв'язок.*

Доведення. Згідно з теоремою 6 серед мультиплікаторів системи (29) немає таких, що дорівнюють одиниці. Тому існує обернена матриця $(Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T) - E_{n-s})^{-1}$. Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (1). Для виконання співвідношення $x(t+T) = x(t)$, $t \in R$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$x(T) = x(0). \quad (64)$$

У відповідності з теоремами 2, 3 розв'язок $x(t)$ має вигляд

$$x(t) = X_{n-s}(t)c + \int_0^t X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau + d(t), \quad (65)$$

де

$$d(t) = -\Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t),$$

c — сталий $(n-s)$-вимірний вектор, який необхідно визначити так, щоб виконувалася рівність (64).

Оскільки згідно з лемою 7 $d(t+T) = d(t)$ $\forall\, t \in R$, то, підставляючи (65) в (64), маємо

$$X_{n-s}(T)c = X_{n-s}(0)c - \int_0^T X_{n-s}(T)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Помноживши цю рівність на матрицю $U^{-1}(0)$ і врахувавши (59), (61), дістанемо

$$[Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T) - E_{n-s}]c = -Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(T)\int_0^T Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

звідки однозначно визначається вектор c:

$$c = -(\Omega(T) - E_{n-s})^{-1}\Omega(T)\int_0^T Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

де $\Omega(T)$ — матриця монодромії системи (29).

Отже, шуканий вектор c існує і єдиний. При цьому T-періодичний розв'язок системи (1) знаходиться за формулою

$$x(t) = -X_{n-s}(t)(\Omega(T) - E_{n-s})^{-1}\Omega(T)\int_0^T Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k\frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t).$$

Теорему доведено.

1. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1980. – 222 с.
2. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. Л., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1989. – 223 с.
3. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применение. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 231–240.
4. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 1. – С. 137–140.
5. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Там же. – 1980. – **32**, № 2. – С. 168–174.
6. *Campbell S. L.* Singular system of differential equations. I. – Pitman: Publishing Co., 1982. – 176 p.
7. *Campbell S. L.* Singular system of differential equations. II. – Pitman: Publishing Co., 1982. – 234 p.
8. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Ald. Discrete Methods. – 1983. – № 4. – P. 517–521.
9. *Campbell S. L.* A general form and solvable linear time varying singular systems of differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1987. – **18**, № 4. – P. 1101–1115.
10. *Sibuya Y.* Some global properties of functions of one variable // Math. Ann. – 1965. – **161**, № 1. – P. 67–77.
11. *Campbell S. L., Meyer C. D. (jr.)* Generalized inverses of linear transformations. – Pitman: Publishing Co. LTD, 1979. – 279 p.
12. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Допов. АН України. – 1993. – № 4. – С. 10–15.
13. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

Одержано 10.01.96.