УДК 517.968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

For some classes of operator equations of the second kind, we find an estimate of information complexity exact with respect to the order. We construct a new projection type method realizing the optimal estimate.

На деяких класах операторних рівнянь II роду знайдено точну за порядком оцінку інформаційної складності. Побудовано новий метод проекційного типу, що реалізує оптимальну оцінку.

Продолжая исследования, проведенные в $[1-4]$, рассмотрим задачу об информационной сложности операторных уравнений II рода. В настоящей статье мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из этих работ. Напомним только, что под информационной сложностью операторных уравнений из некоторого фиксированного класса мы будем понимать минимальное число элементарных операций (э. о.), необходимых для построения с заданной точностью приближенного решения произвольного уравнения из этого класса.

1. Пусть X — гильбертово пространство с обычной нормой, а P_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов некоторого ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots$ в X, т. е.

$$P_m \varphi = \sum_{k=1}^{m} e_k (e_k, \varphi),$$

где под $(\cdot, \cdot)$ понимаем скалярное произведение в X. Обозначим через X^r, $0 < r < \infty$, линейное нормированное пространство X, снабженное нормой

$$\| \varphi \|_{X^r} = \| \varphi \|_X + \| \mathcal{D}_r \varphi \|_X,$$

где $\mathcal{D}_r$ — некоторый линейный оператор, действующий из X^r в X, такое, что для любого $m = 1, 2, \ldots$ $\| I - P_m \|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r}$ и

$$\Delta_N (X_\beta^r, X) \ge d_r m^{-r}, \tag{1}$$

где I — тождественный оператор в X, $\Delta_N (X_\beta^r, X)$ — m-й предтабличный поперечник [5, с. 182] шара X_β^r из X^r радиуса β в метрике пространства X, а константы c_r и d_r не зависят от m.

Рассмотрим классы линейных операторов

$$\mathcal{H}_\gamma^{r,s} = \{ H\colon X \to X^r, \quad H^*\colon X \to X^s, \quad \| (I-H)^{-1} \|_{X \to X} \le \gamma_0,$$
$$\| H \|_{X \to X^r} \le \gamma_1, \quad \| H^* \|_{X \to X^s} \le \gamma_2,$$
$$\| (\mathcal{D}_r H)^* \|_{X \to X^s} \le \gamma_3 \}, \qquad \gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

где H^* такой, что для любых $f, g \in X$ выполняется $(f, Hg) = (g, H^* f)$. Отметим, что ранее операторы из класса $\mathcal{H}_\gamma^{r,r}$ рассматривались в [6] при исследовании оптимальных прямых методов для операторных уравнений и в [7] при дискретизации некорректных задач.

В настоящей работе нас будет интересовать информационная сложность уравнений II рода

$$z = Hz + f \tag{2}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и свободными членами f из единичного шара X_1^r. Класс таких уравнений (2) обозначим через $\Psi_\gamma^{r,s}$.

2. Пусть, как и в [2], $E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X)$ — минимальная погрешность в метрике X, которую могут обеспечить на классе $\Psi_\gamma^{r,s}$ всевозможные алгоритмы, требующие для построения приближенного решения не более чем N э. о. Целью данной работы является нахождение точного порядка величины $E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X)$.

Обозначим через $\Gamma_m^{a,b}$ квадрант ступенчатого гиперболического креста следующего вида:

$$\Gamma_m^{a,b} = [1, 2^{bm}]\times\{1\} \bigcup_{k=1}^{m} [1, 2^{bm-ak}]\times(2^{k-1}, 2^k],$$

где $a = 1 + s/2r$, $b = 1 + s/r$. В качестве информации об уравнениях (2) из класса $\Psi_\gamma^{r,s}$ будем рассматривать следующие наборы значений скалярных произведений:

$$T_m(H,f) = \{(e_i, He_j), (e_k, f),\ i,j = 1, 2, \ldots,\ (i,j)\in \Gamma_m^{a,b};\ k = 1, \ldots, 2^{bm}\}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что число $\operatorname{Card}(T_m)$ значений функционалов, входящих в наборы $T_m(H,f)$, равно

$$\operatorname{Card}(T_m) \asymp 2^{bm}. \tag{4}$$

Как и в [2], обозначим через $\mathcal{A}_N(T_m)$ множество алгоритмов приближенного решения (2), использующих в качестве информации значения скалярных произведений из наборов $T_m(H,f)$ и требующих для своей реализации не более N э. о. над этими значениями.

Каждому оператору $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ поставим в соответствие конечномерный оператор

$$H_m = H_m(H) =: \sum_{k=1}^{m} P_{2^{bm-ak}} H(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + P_{2^{bm}} HP_1 .$$

В случае, когда 2^{bm-ak} не является целым числом, под $P_{2^{bm-ak}}$ условимся понимать $P_{[2^{bm-ak}]}$, где $[p]$ — целая часть p. Заметим, что в силу определения H_m справедливо

$$(e_i, H_m e_j) = \begin{cases} (e_i, He_j), & (i,j)\in\Gamma_m^{a,b}, \\ 0, & (i,j)\notin\Gamma_m^{a,b}. \end{cases}$$

Для каждого уравнения (2) рассмотрим последовательность элементов

$$z_0 = 0, \quad z_k = z_{k-1} + (I - H_m P_{2^n})^{-1}(H_m z_{k-1} - z_{k-1} + P_{2^{bm}} f),$$

$$k = 1, 2, \ldots; \quad n = [bm/3].$$

Для построения любого элемента z_k достаточно иметь информацию (3) и решение уравнения для невязки

$$\varepsilon_l = H_m P_{2^n} \varepsilon_l + (H_m z_{l-1} - z_{l-1} + P_{2^{bm}} f), \qquad l = 1, 2, \ldots, k,$$

$$z_l = z_{l-1} + \varepsilon_l.$$

Рассмотрим теперь алгоритм $A_m \in \mathcal{A}_N(T_m)$, при котором каждому уравнению (2) из класса $\Psi_\gamma^{r,s}$ в качестве приближенного решения сопоставляется элемент z_k, где K — ближайшее сверху к $2r/s$ целое число. Покажем, что алгоритм A_m реализует оптимальный порядок величины $E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X)$. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 [2]. *Для любых* $N = 1, 2, \ldots$ *и* $0 < r < \infty$ *имеем*

$$E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X) \geq \frac{1}{2} \Delta_N(X_\beta^r, X),$$

где $\beta = (1 + \gamma_1)^{-1}$.

Договоримся в дальнейшем через C обозначать различные постоянные, зависящие только от величин r, s и параметров γ_0, γ_1, γ_2, γ_3.

Лемма 2. *Для* $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $a = 1 + s/2r$, $b = 1 + s/r$ *имеем*

$$\| H - H_m(H) \|_{X \to X} = \begin{cases} C 2^{-(r+s)m}, & s > 2r, \\ C 2^{-(r+s)m} m, & s = 2r, \\ C 2^{-3sm/2}, & s < 2r, \end{cases}$$

$$\| H - H_m(H) \|_{X^r \to X} = C 2^{-(r+s)m}.$$

Доказательство. Докажем второе неравенство, первое соотношение доказывается аналогично. Прежде всего заметим, что для любых $\nu, \mu = 1, 2, \ldots$ и $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$

$$\| (I - P_\nu) H \|_{X \to X} \leq \gamma_1 c_r \nu^{-r},$$

$$\| H (I - P_\mu) \|_{X \to X} \leq \gamma_2 c_s \mu^{-s},$$

$$\| H (I - P_\mu) \|_{X \to X^r} \leq \| H (I - P_\mu) \|_{X \to X} + \| \mathcal{D}_r H (I - P_\mu) \|_{X \to X} \leq$$

$$\leq \gamma_2 c_s \mu^{-s} + \| I - P_\mu \|_{X^s \to X} \| (\mathcal{D}_r H)^* \|_{X \to X^s} \leq$$

$$\leq c_s (\gamma_2 + \gamma_3) \mu^{-s}.$$

Отсюда получаем

$$\| (I - P_\nu) H (I - P_\mu) \|_{X \to X} \leq \| I - P_\nu \|_{X^r \to X} \| H (I - P_\mu) \|_{X \to X^r} \leq$$

$$\leq c_r c_s (\gamma_2 + \gamma_3) \nu^{-r} \mu^{-s}. \tag{5}$$

Далее, легко видеть, что

$$\| H - H_m \|_{X^r \to X} \leq \| H - H P_{2^m} \|_{X^r \to X} + \| H P_{2^m} - H_m \|_{X^r \to X}. \tag{6}$$

В силу определения H_m имеет место представление

$$H P_{2^m} - H_m = \sum_{k=1}^{m} (I - P_{2^{bm - ak}}) H (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + (I - P_{2^{bm}}) H P_1. \tag{7}$$

Используя (5), для любых $f \in X^r$ и $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\|(I - P_{2^{bm-ak}}) H (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) f\|_X \leq$$
$$\leq (\|(I - P_{2^{bm-ak}}) H (I - P_{2^k})\|_{X\to X} +$$
$$+ \|(I - P_{2^{bm-ak}}) H (I - P_{2^{k-1}})\|_{X\to X}) \|(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) f\|_X \leq$$
$$\leq c_r^2 c_s (\gamma_2 + \gamma_3) 2^{-(bm-ak)r} (2^{-ks} + 2^{-(k-1)s}) (2^{-kr} + 2^{-(k-1)r}) \|f\|_{X^r} \leq$$
$$\leq C 2^{-brm + k(ar-r-s)} \|f\|_{X^r},$$
$$\|(I - P_{2^{bm}}) H P_1 f\|_X \leq C 2^{-brm} \|f\|_{X^r}.$$

Но тогда, учитывая (7), находим

$$\|H P_{2^m} - H_m\|_{X^r \to X} \leq C 2^{-brm} \sum_{k=0}^{m} 2^{k(ar-r-s)} \leq C 2^{-(r+s)m}. \tag{8}$$

Поскольку справедливо соотношение

$$\|H - H P_{2^m}\|_{X^r\to X} \leq \|I - P_{2^m}\|_{X^r\to X} \|I - P_{2^m}\|_{X^s\to X} \|H^*\|_{X\to X^s} \leq$$
$$\leq \gamma_2 c_r c_s 2^{-(r+s)m},$$

то в силу (6) и (8) получаем искомую оценку. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для* $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $a = 1 + s/2r$, $b = 1 + s/r$ *и* $n = [bm/3]$ *имеем*

$$\|H_m - H_m P_{2^n}\|_{X^r\to X} = \begin{cases} 0, & s \geq 2r, \\ C 2^{-b(r+s)m/3}, & s < 2r, \end{cases}$$

$$\|H_m - H_m P_{2^n}\|_{X\to X} = \begin{cases} 0, & s \geq 2r, \\ C 2^{-bsm/3}, & s < 2r. \end{cases}$$

Доказательство. В силу определения оператора H_m справедливы равенства $H_m = H_m P_{2^n}$ при $m \leq n$ $(s \geq 2r)$ и

$$H_m - H_m P_{2^n} = \sum_{k=n+1}^{m} P_{2^{bm-ak}} H (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})$$

в противном случае. Отсюда, как и при доказательстве леммы 2, непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 4. *При алгоритме* A_m *для представления приближенного решения* z_K, $2r/s \leq K < 2r/s + 1$, *любого уравнения из* $\Psi_\gamma^{r,s}$ *в стандартном виде* $\sum_{i=1}^{2^{bm}} \chi_i e_i$ *достаточно выполнить не более* $O(2^{bm})$ *э. о. над значениями функционалов из набора* T_m.

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент вида

$$g = \sum_{i=1}^{2^{bm}} \alpha_i e_i.$$

При любом $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ рассмотрим элемент $H_m g$. Из определения оператора H_m находим

$$H_m g = \alpha_1 \sum_{j=1}^{2^{bm}} e_j(e_j, He_1) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{2^{bm-ak}} e_j \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \alpha_j(e_j, He_i) =$$

$$= \alpha_1 \sum_{j=1}^{2^{bm}} e_j(e_j, He_1) + \sum_{j=1}^{2^{(b-a)m}} e_j \sum_{i=2}^{2^m} \alpha_i(e_j, He_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2^{(b-a)m}+1}^{2^{bm-ak}} e_j \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \alpha_i(e_j, He_i) = \sum_{j=1}^{2^{bm}} \beta_j e_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{2^{m_j}} \alpha_j(e_j, He_i),$$

$$m_j = m - \left[\log_2 2\left(\frac{j-1}{2^{(b-a)m}}\right)^{1/a}\right].$$

Отсюда видно, что для вычисления всех коэффициентов β_j требуется не более $2P-1$ э. о., где

$$P = \sum_{j=1}^{2^{bm}} \sum_{i=1}^{2^{m_j}} 1 \le C \sum_{j=1}^{2^{bm}} 2^m \frac{2^{(b-a)m/a}}{2(j-1)^{1/a}} = C2^{bm/a} \sum_{j=1}^{2^{bm}} (j-1)^{-1/a} \le$$

$$\le C2^{bm/a} 2^{b(1-1/a)m} = C2^{bm}.$$

Таким образом, мы показали, что для представления элемента $H_m g$ в стандартном виде $\sum_{j=1}^{2^{bm}} \beta_j e_j$ достаточно выполнить не более $O(2^{bm})$ э. о. над компонентами вектора (3).

Дальнейшее доказательство леммы полностью повторяет ход рассуждений леммы 5 из [2], где вместо $m2^{2m}$ следует использовать величину 2^{bm}.

3. Теперь мы можем привести основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *При* $0 < r,\ s < \infty$ *справедливо соотношение*

$$E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X) \asymp N^{-r}.$$

При этом для класса $\Psi_\gamma^{r,s}$ *оптимальный порядок сложности доставляет информация* T_m (3) *и алгоритм* A_m.

Доказательство. Оценка снизу для величины $E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X)$ следует из условия (1) и леммы 1. Для получения верхней оценки вычислим погрешность алгоритма A_m на классе $\Psi_\gamma^{r,s}$.

Каждому уравнению (2) поставим в соответствие уравнение

$$\hat{z} = H_m(H)\hat{z} + P_{2^{bm}} f.$$

Следующие оценки находятся аналогично неравенствам (19), (21) из [4] и (42) из [2]:

$$\|z - \hat{z}\|_X \le C(\|I - P_{2^{bm}}\|_{X^r \to X} + \|H - H_m\|_{X^r \to X}),$$

$$\|\hat{z} - z_k\|_X \le C\|H_m - H_m P_{2^n}\|_{X \to X}^{k-1} \|\hat{z} - z_1\|_X, \quad k = 2, \dots, K,$$

$$\|\hat{z}-z_1\|_X \le C(\|H_m - H_m P_{2^n}\|_{X^r \to X} + \|H_m - H_m P_{2^n}\|_{X \to X} \|z-\hat{z}\|_X).$$

С помощью этих соотношений, используя также леммы 2 и 3, для произвольного уравнения (2) из $\Psi_\gamma^{r,s}$ получаем

$$\|z-z_k\|_X \le \|z-\hat{z}\|_X + \|\hat{z}-z_K\|_X \le C2^{-brm}.$$

Поскольку величина $E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X)$ по определению не превышает погрешности алгоритма A_m, то, учитывая (4) и лемму 4, в силу последнего неравенства при $N \asymp 2^{bm}$ имеем

$$E_N(\Psi_\gamma^{r,s}, X) \le \sup_{\Psi_\gamma^{r,s}} \|z-z_K\|_X \le CN^{-r}.$$

Таким образом, теорема доказана.

4. В заключение проиллюстрируем полученный нами результат на примере интегральных уравнений Фредгольма с операторами, ядра которых имеют доминирующую смешанную частную производную.

Пусть L_2 — пространство суммируемых в квадрате на $(-1, 1)$ функций с обычной нормой. Через W_2^r, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим нормированное пространство непрерывных функций $f(t)$, у которых производная $\dfrac{d^{r-1}f}{dt^{r-1}}$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а $\dfrac{d^r f}{dt^r} \in L_2$. При этом норма в W_2^r определяется соотношением

$$\|f\|_{W_2^r} = \|f\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{r} \left\|\frac{d^i f}{dt^i}\right\|_{L_2}.$$

Пусть S_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов ортонормированного базиса многочленов Лежандра. Известно, что

$$\|I - S_m\|_{W_2^r \to L_2} \le c_r m^{-r}$$

и $\Delta_N(W_{2,\beta}^r, L_2) \ge CN^{-r}$ [8, с. 220, 247], где $W_{2,\beta}^r$ — шар пространства W_2^r радиуса β. Это означает, что для $X = L_2$, $X^r = W_2^r$, $\mathcal{D}_r = \dfrac{d^r}{dt^r}$ и $P_m = S_m$ выполнены все условия, определяющие пространство X^r.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{H}_F^{r,s}$, $r, s = 1, 2, \ldots$, интегральных уравнений

$$Hz(t) = \int_{-1}^{1} h(t,\tau)z(\tau)\,d\tau$$

таких, что $\|(I-H)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \le \gamma_0$ и для любого $z \in L_2$

$$\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}\left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^i}{dt^i}\int_{-1}^{1}\frac{d^j h(\tau,t)}{d\tau^j}z(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right)^{1/2} \le \gamma_*\|z\|_{L_2}, \tag{9}$$

$$\gamma_* = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}.$$

Обозначим через $\Psi_F^{r,s}$ класс уравнений Фредгольма II рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_{-1}^{1} h(t, \tau) z(\tau) d\tau + f(t), \tag{10}$$

свободные члены $f(t)$ которых принадлежат $W_{2,1}^r$, а $H \in \mathcal{H}_F^{r,s}$. Легко видеть, что $\Psi_F^{r,s} \subset \Psi_\gamma^{r,s}$ при $X = L_2$, $X^r = W_2^r$, $X^s = W_2^s$ и $P_m = S_m$.

Таким образом, в силу сказанного выше из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *При* $r, s = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение*

$$E_N(\Psi_F^{r,s}, L_2) \asymp N^{-r}.$$

Оптимальный порядок информационной сложности на классе $\Psi_F^{r,s}$ *реализуют алгоритм* A_m *и набор* T_m (3), *построенный на базе ортонормированной системы многочленов Лежандра.*

Замечание. Ранее задача о нахождении информационной сложности для уравнения Фредгольма (10) с ядрами, имеющими доминирующую смешанную частную производную, рассматривалась в [1, 4]. При этом предполагалось, что в (10) свободный член $f(t)$ и ядро $h(t, \tau)$ являются периодическими функциями по t и τ, причем

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{i+j} h(t, \tau)}{dt^i \, d\tau^j} \right)^2 dt \, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma_*. \tag{11}$$

Впервые в [1] был найден оптимальный порядок сложности $O(N^{-r})$ таких уравнений в случае изотропной гладкости ядер, т. е. $r = s$. Затем [4] полученный результат был обобщен для произвольных r и s. Установленный в настоящей работе результат позволяет не только освободиться от условия периодичности коэффициентов h и f уравнения (10), но и, что самое интересное, ослабить требование на дифференцируемость ядер (сравни (9) и (11)), сохраняя при этом тот же порядок величины E_N.

1. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.
2. *Pereverzev S., Scharipov C.* Information complexity of equations of second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 176–202.
3. *Frank K., Heinrich S., Pereverzev S.* Information complexity of multivariate Fredholm equations in Sobolev classes // Interner Bericht, № 263/95. – Univ. Kaiserslautern, 1995. – 17 p.
4. *Солодкий С. Г.* Сложность уравнений Фредгольма II рода из анизотропных классов дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 525–533.
5. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
6. *Солодкий С. Г.* Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 95–102.
7. *Pereverzev S.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems // Computing. – 1995. – **55**, № 2. – P. 113–124.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

Получено 26.02.96