УДК 517.9: 519.46

М. І. Сєров (Полтав. техн. ун-т),
Р. М. Черніга (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИМЕТРІЇ ЛІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КОНВЕКТИВНИМ ЧЛЕНОМ

The Lie symmetries of nonlinear diffusion equations with a convection term are completely described. The Lie ansätze and exact solutions of a certain nonlinear generalization of the Murray equation are constructed. An example of the family of non-Lie solutions to the Murray equation is given.

Зроблено повний опис ліївських симетрій нелінійних дифузійних рівнянь з конвективним членом. Побудовано ліївські анзаци та точні розв'язки одного нелінійного узагальнення рівняння Маррі. Наведено приклад знаходження сім'ї неліївських розв'язків рівняння Маррі.

1. Вступ. У цій роботі ми будемо розглядати нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії) з конвективним членом вигляду

$$U_t = \left[A(U)U_x\right]_x + B(U)U_x + C(U), \tag{1}$$

де $U = U(t,x)$ — невідома функція та $A(U), B(U), C(U)$ — довільні гладкі функції. Індекси t та x означають диференціювання за цими змінними.

Рівняння (1) узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, що описують різноманітні процеси у фізиці, біології та хімії (розгорнутий перелік літератури див. у [1]).

У випадку $B(U) = 0$ з рівняння (1) одержуємо відоме рівняння теплопровідності з джерелом

$$U_t = \left[A(U)U_x\right]_x + C(U). \tag{2}$$

Симетрії Лі рівняння (2) вичерпно описано в [2]. Умовні симетрії цього рівняння знайдено в [3].

Частковий випадок рівняння (1), а саме:

$$U_t = U_{xx} + B(U)U_x + C(U) \tag{3}$$

запропонував Маррі [4] як математичну модель для опису процесів реакції-дифузії в біології. Рівняння (3) як частинний випадок містить класичне рівняння Бюргерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda_1 U U_x. \tag{4}$$

У цій роботі вичерпно описано симетрії Лі рівняння (1). Зокрема, знайдено такі нові оператори інваріантності, які не характерні для рівняння (2). Побудовано всі анзаци Лі та приклади сімей точних розв'язків для одного нелінійного дифузійного рівняння з конвективним членом. На завершення розглядається нелінійне рівняння реакції-дифузії вигляду

$$U_t = (\lambda + \lambda_0 U)U_{xx} + \lambda_1 U U_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{5}$$

де $\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ та $\lambda_3 \in \mathbf{R}$. При $\lambda = 1,\ \lambda_0 = 0$ це рівняння перетворюється у рівняння Маррі [4]

$$U_t = U_{xx} + \lambda_1 U U_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \tag{6}$$

яке є узагальненням відомого рівняння Фішера [5]. За допомогою одного конструктивного методу побудовано неліївський анзац та приклади сімей нових точних розв'язків для рівнянь (5) і (6).

2. Симетрії Лі нелійного рівняння (1). Легко переконатися в тому, що локальною заміною $\int A(U)\,dU \to U$ рівняння (1) зводиться до вигляду

$$U_{xx} = F_0(U)U_t + F_1(U)U_x + F_2(U), \tag{7}$$

де $F_0(U)$, $F_1(U)$, $F_2(U)$ — довільні гладкі функції.

Нижче ми подаємо теореми, що дають *вичерпний опис* симетрій Лі рівняння (7). Зауважимо, що ми не розглядаємо випадок, коли $F_1(U) = 0$, оскільки він вивчений у [2].

Очевидно, що рівняння (7) інваріантне відносно алгебри

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_x = \frac{\partial}{\partial x} \tag{8}$$

при довільних функціях $F_0(U)$, $F_1(U)$, $F_2(U)$. Отже, оператори (8) входять до алгебри інваріатності всіх рівнянь вигляду (7).

Теорема 1.. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння* (7) *при* $F_0 = 1$ *є алгеброю Лі з базовими операторами* (8) *та*

a) $$D_1 = 2mtP_t + mxP_x - UP_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 U^m$, $F_2 = \lambda_2 U^{2m+1}$;

b) $$G_1 = \exp(-\lambda_2 t)\left(P_x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}P_U\right),$$

якщо $F_1 = \lambda_1 U$, $F_2 = \lambda_2 U$, $\lambda_2 \neq 0$;

c) $$G_1 = tP_x + \frac{1}{\lambda_1}UP_U, \quad D_2 = 2tP_t + xP_x - UP_U,$$

$$\Pi_1 = t^2 P_t + txP_x + \left(\frac{x}{\lambda_1} - tU\right)P_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 U$, $F_2 = 0$;

d) $$G_1 = tP_x + \frac{1}{\lambda_1}UP_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 \ln U$, $F_2 = \lambda_2 U$;

e) $$G_2 = \exp(-\lambda_3 t)\left(P_x - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}UP_U\right),$$

якщо $F_1 = \lambda_1 \ln U$, $F_2 = \lambda_2 U + \lambda_3 U \ln U$, $\lambda_3 \neq 0$;

f) $$Y = \exp\left[\left(\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_3\right)t + \frac{\lambda_1}{2}x\right]UP_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 \ln U$, $F_2 = \lambda_2 U + \lambda_3 U \ln U - (\lambda_1^2/4)U\ln^2 U$; *де* $\lambda_1 \neq 0$, λ_2, λ_3 *та* $m \neq 0$ — *довільні сталі*, $P_U = \partial/\partial U$.

Теорема 2. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння* (7) *при* $F_0 = \exp(mU)$ *є алгеброю Лі з базовими операторами* (8) *та*

$$D = (2n - m)tP_t + nxP_x - P_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 \exp(nU)$, $F_2 = \lambda_2 \exp(2nU)$, *де* $\lambda_1 \neq 0$, λ_2, m *та* $n \neq 0$ — *довільні сталі*.

Теорема 3. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння* (7) *при* $F_0 = U^k$, $k \neq 0$, *є алгеброю Лі з базовими операторами* (8) *та:*

a) $$D_1 = (2m - k)tP_t + mxP_x - UP_U,$$

якщо $F_1 = \lambda_1 U^m$, $F_2 = \lambda_2 U^{2m+1}$, $m \neq 0$, $m \neq k$, $m \neq k/2$;

b) $$T = \exp(-\lambda_3 kt)(P_t - \lambda_3 UP_U),$$

якщо $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \lambda_2 U + \lambda_3 U^{k+1}$;

c) $$X = \exp(-\alpha_1 kx)(P_x + 2\alpha_1 UP_U),$$

якщо $F_1 = \lambda_1 U^{k/2} + (k+4)\alpha_1,\ F_2 = \lambda_2 U^{k+1} - 2\alpha_1\lambda_1 U^{k/2+1} + \lambda_4 U,\ k \neq -4;$

d) $$D_2 = ktP_t + UP_U, \quad X,$$

якщо $F_1 = \alpha_1(k+4),\ F_2 = \lambda_4 U,\ k \neq -4;$

e) $$T, \quad X,$$

якщо $F_1 = \alpha_1(k+4),\ F_2 = \lambda_4 U + \lambda_3 U^{k+1},\ k \neq -4;$ *де* $\alpha_1 \neq 0,\ \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2,$ $\lambda_3 \neq 0$ — *довільні сталі,* $\lambda_4 = -2\alpha_1^2(k+2).$

Доведення *теорем* 1–3 базується на класичній схемі методу Лі (див., наприклад, [6]) і є надто громіздкими та далеко не тривіальними, оскільки рівняння (7) містить три довільні функції. Ми детально зупинимося лише на доведенні першої теореми.

Розглянемо відповідно до схеми Лі рівняння (7) як деякий многовид

$$F \equiv U_{x_1x_1} - F_0(U)U_{x_0} - F_1(U)U_{x_1} - F_2(U) = 0 \tag{9}$$

у просторі таких незалежних змінних: $x_0, x_1, U, U_{x_0}, U_{x_1}, U_{x_0x_0}, U_{x_0x_1}, U_{x_1x_1}$, де $x_0 = t,\ x_1 = x$. Нижче використовуватимемо обидва позначення: $x_0,\ x_1$ та t, x.

Рівняння (7) інваріантне відносно перетворень, породжених інфінітезимальним оператором

$$X = \xi^0(x_0, x_1, U)\partial_{x_0} + \xi^1(x_0, x_1, U)\partial_{x_1} + \eta(x_0, x_1, U)\partial_U, \tag{10}$$

якщо справджується такий критерій інваріантності:

$$\underset{11}{X}F \equiv \underset{11}{X}\Big(U_{x_1x_1} - F_0(U)U_{x_0} - F_1(U)U_{x_1} - F_2(U)\Big)\Big|_{F=0} = 0. \tag{11}$$

Оператор $\underset{11}{X}$ — це друге продовження інфінітезимального оператора X, а саме:

$$\underset{11}{X} = X + \rho_i \frac{\partial}{\partial U_{x_i}} + \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial U_{x_ix_j}}, \tag{12}$$

де

$$\rho_i = \eta_{x_i} + U_{x_i}\eta_U - U_{x_{i_1}}\left(\xi^{i_1}_{x_i} + U_{x_i}\xi^{i_1}_U\right), \qquad i = 0, 1;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = {} & \eta_{x_ix_j} + U_{x_i}\eta_{x_jU} - U_{x_j}\eta_{x_iU} + U_{x_i}U_{x_j}\eta_{UU} + U_{x_ix_j}\eta_U - \\ & - U_{x_{i_1}}\xi^{i_1}_{x_ix_j} - U_{x_{i_1}}U_{x_i}\xi^{i_1}_{x_jU} - U_{x_{i_1}}U_{x_j}\xi^{i_1}_{x_iU} - U_{x_{i_1}}U_{x_i}U_{x_j}\xi^{i_1}_{UU} - U_{x_ix_{i_1}}\xi^{i_1}_{x_j} - \\ & - U_{x_jx_{i_1}}\xi^{i_1}_{x_i} - U_{x_i}U_{x_jx_{i_1}}\xi^{i_1}_U - U_{x_j}U_{x_ix_{i_1}}\xi^{i_1}_U - U_{x_ix_j}U_{x_{i_1}}\xi^{i_1}_U, \qquad i = 0, 1,\ \ j = 0, 1.\end{aligned} \tag{13}$$

У формулах (12) і (13) слід підсумовувати від 0 до 1 за індексами i_1, що повторюються. Підставляючи (12) в (11), ми можемо розщепити одержаний вираз на незалежні частини, скориставшись тим, що шукані коефіцієнти інфінітезимального оператора X не залежать від похідних $U_{x_i},\ U_{x_ix_j},\ U_{x_i}U_{x_j},\ U_{x_{i_1}}U_{x_ix_j}$ та $U_{x_i}U_{x_j}U_{x_{i_1}}$ Після відповідних перетворень одержуємо таку систему визначальних рівнянь:

$$\eta\frac{dF_0}{dU} = \left(\xi^0_{x_0} - 2\xi^1_{x_1}\right)F_0, \tag{14}$$

$$\eta\frac{dF_1}{dU} = \xi^1_{x_0}F_0 - \xi^1_{x_1}F_1 + 2\eta_{x_1U} - \xi^1_{x_1x_1}, \tag{15}$$

$$\eta \frac{dF_2}{dU} = -\eta_{x_0} F_0 - \eta_{x_1} F_1 + (\eta_U - 2\xi^1_{x_1}) F_2 + \eta_{x_1 x_1}, \tag{16}$$

де

$$\xi^0_U = \xi^0_{x_1} = 0, \qquad \xi^1_U = \eta_{UU} = 0. \tag{17}$$

Враховуючи (17), рівняння (14) можна розглядати як класифікаційне. Дійсно, розв'язуючи його, отримаємо три класи розв'язків, а саме:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && F_0 = \lambda_0; \\ &\text{ii)} && F_0 = \lambda_0 \exp(mU); \\ &\text{iii)} && F_0 = \lambda_0 (U + \alpha_0)^k; \end{aligned} \tag{18}$$

де $\lambda_0 \neq 0$, $m \neq 0$, $k \neq 0$, α_0 — довільні сталі.

Легко помітити, що рівняння (7) з нелінійностями вигляду (18) локальною заміною

$$t \to t' = \lambda_0 t, \tag{19}$$

зводиться до рівняння з такою ж структурою, але з $\lambda_0 = 1$. Отже, нижче припускається, що $\lambda_0 = 1$.

Розглянемо *випадок* i) $F_0 = 1$. З (14) випливає, що у цьому випадку $\xi^0_{x_0} = 2\xi^1_{x_1}$. Тепер ми можемо розглядати (15) як класифікаційне рівняння. Розв'язуючи це рівняння при $F_0 = 1$, знаходимо три класи розв'язків:

$$\begin{aligned} &\text{ia)} && F_1 = \lambda_1 (U + \alpha_0)^m + \alpha_1; \\ &\text{ib)} && F_1 = \lambda_1 \ln(U + \alpha_0) + \alpha_1; \\ &\text{ic)} && F_1 = \lambda_1 \exp(nU) + \alpha_1; \end{aligned} \tag{20}$$

де $\lambda_1 \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, α_0, α_1 — довільні сталі. Неважко показати, що рівняння (7) з нелінійностями вигляду (20) локальною заміною

$$U \to U' = U + \alpha_0, \qquad x \to x' = x - \alpha_1 t \tag{21}$$

зводиться до рівняння з такою ж структурою, але з $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Отже, нижче припускається, що $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Розглянемо випадок ia) $F_1 = \lambda_1 U^m$, $m \neq 1$. Використовуючи рівняння (15) та (17), отримуємо шукані коефіцієнти інфінітезимального оператора X:

$$\xi^0 = 2e_2 m t + e_0, \qquad \xi^1 = e_2 m x + e_1, \qquad \eta = -e_2 U, \tag{22}$$

де e_0, e_1, e_2 — довільні дійсні параметри.

Врешті-решт, розв'язуючи рівняння (16) при $F_0 = 1$, $F_1 = \lambda_1 U^m$ та використовуючи (22), знаходимо функцію $F_2 = \lambda_2 U^{2m+1}$, якщо e_2 — довільна стала або F_2 — довільна гладка функція, якщо $e_2 = 0$. Таким чином, ми довели частину а) теореми 1.

Випадок ia) $F_1 = \lambda_1 U$, тобто $m = 1$, суттєво відрізняється від випадку $m \neq 1$, оскільки рівняння (15) зводиться до системи

$$\begin{cases} \eta_U = -\xi^1_{x_1}, \\ \lambda_1(\eta - U\eta_U) = \xi^1_{x_0}. \end{cases} \tag{23}$$

Розв'язуючи перевизначену систему рівнянь (16), (17) та (23), знаходимо три класи розв'язків:

$$\begin{cases} F_2 = \lambda_2 U + \alpha_2, \qquad \lambda_2 \neq 0, \quad \xi^0 = e_0, \quad \xi^1 = e_2 \exp(-\lambda_2 t) + e_1, \\ \eta = -e_2 \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \exp(-\lambda_2 t); \end{cases} \tag{24}$$

$$F_2 = \lambda_2 U^3, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \xi^0 = 2e_2 t + e_0, \quad \xi^1 = e_2 x + e_1, \quad \eta = -e_2 U; \tag{25}$$

$$\begin{cases} F_2 = \alpha_2, \quad \xi^0 = e_4 t^2 + 2e_2 t + e_0, \\ \xi^1 = e_4 x t + e_3 t + e_2 x + e_1 - \dfrac{\alpha_2 \lambda_1}{2}(e_4 t^3 + 3e_2 t^2), \\ \eta = -e_4 t U - e_2 U + \lambda_1^{-1}(e_4 x + e_3) - \dfrac{3\alpha_2}{2}(e_4 t^2 + 2e_2 t), \end{cases} \tag{26}$$

де $\alpha_2, \lambda_2, e_0, e_1, \ldots, e_4$ — довільні дійсні параметри. Знову ж таки можна помітити, що рівняння (7) з нелінійностями $F_0 = 1$, $F_1 = \lambda_1 U$ та F_2 (див. формулу (24)) локальною заміною

$$U \to U' = U + \frac{\alpha_2}{\lambda_2}, \quad x \to x' = x + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\lambda_2} t, \tag{27}$$

зводиться до рівняння з такою ж структурою, але з $\alpha_2 = 0$. Отже, за допомогою формул (24) отримується функція F_2 та коефіцієнти інфінітезімального оператора ξ^0, ξ^1, η, що відповідають частині b) теореми 1. Розв'язок (25) приводить до часткового випадку доведеної вище частини a) теореми 1.

Врешті-решт, розв'язок (26) при $\alpha_2 = 0$ відповідає частині c) теореми 1 (випадок відомого рівняння Бюргерса). Зазначимо, що у випадку $\alpha_2 \neq 0$ рівняння

$$U_{xx} = U_t + \lambda_1 U U_x + \alpha_2 \tag{28}$$

локальною заміною

$$x \to x' = x - \frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2 t^2, \quad U \to U' = U + \alpha_2 t \tag{29}$$

зводиться до рівняння Бюргерса

$$U_{xx} = U_t + \lambda_1 U U_x. \tag{30}$$

Ліївську симетрію цього рівняння знайдено в [7]. Таким чином, випадок ia) повністю розглянуто.

Розгленемо випадок ib) $F_1 = \lambda_1 \ln U$. Помічаємо, що рівняння (15) зводиться до системи

$$\begin{cases} \xi^0_{x_0} = 0, \quad \eta = U \eta_U, \\ \lambda_1 \eta_U = 2\xi^1_{x_0} + 4\eta_{x_1 U}. \end{cases} \tag{31}$$

Розв'язуючи перевизначену систему рівнянь (16), (17) і (31), отримуємо три класи розв'язків:

$$F_2 = \lambda_2 U, \quad \xi^0 = e_0, \quad \xi^1 = e_2 t + e_1, \quad \eta = \frac{e_2}{\lambda_1} U; \tag{32}$$

$$\begin{cases} F_2 = \lambda_2 U + \lambda_3 U \ln U, \quad \lambda_3 \neq 0, \\ \xi^0 = e_0, \quad \xi^1 = e_2 \exp(-\lambda_3 t) + e_1, \quad \eta = -e_2 U \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} \exp(-\lambda_3 t); \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} F_2 = \lambda_2 U + \lambda_3 U \ln U - \dfrac{\lambda_1^2}{4} U \ln^2 U, \\ \xi^0 = e_0, \quad \xi^1 = e_1, \quad \eta = e_2 U \exp\left[\left(\dfrac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_3\right) t + \dfrac{\lambda_1}{2} x\right]. \end{cases} \tag{34}$$

Розв'язки (32)–(34) послідовно відповідають частинам d), e) і f) теореми 1. Отже, випадок ib) повністю розглянуто, а теорему 1 доведено.

Досліджуючи випадок ic) $F_1 = \lambda_1 \exp(nU)$, отримуємо, що рівняння (15) зводиться до системи

$$\begin{cases} n\eta = -\xi^1_{x_1}, \\ 2\eta_{x_1 U} = -\xi^1_{x_0}. \end{cases} \tag{35}$$

Розв'язуючи перевизначену систему рівнянь (16), (17) та (35), отримуємо її розв'язок

$$F_2 = \lambda_2 \exp(2nU), \qquad \xi^0 = 2e_2 t + e_0, \qquad \xi^1 = e_2 x + e_1, \qquad \eta = -\frac{e_2}{n}, \tag{36}$$

який приводить до часткового випадку теореми 2 при $m = 0$. Досліджуючи випадок ii) $F_0 = \lambda_0 \exp(mU)$, можна довести теорему 2 для довільного m.

Подібним чином досліджуючи випадок iii) $F_0 = \lambda_0 (U + \alpha_0)^k$, можна отримати доведення теореми 3, і тим самим будуть повністю реалізовані доведення теорем 1, 2 та 3.

Наголосимо, що ми подаємо лише локально нееквівалентні випадки розширення алгебри інваріантності рівняння (7). Для всіх інших функцій $F_0(U)$, $F_1(U)$, $F_2(U)$ рівняння (7) зводиться до одного з випадків, що подані або в теоремах 1–3, або до рівняння (2). Наприклад, нелінійність $F_0 = U^{-4}$ (див. теорему 3, випадки c)–e)) не є особливим випадком, оскільки рівняння (7) з цією нелінійністю має нетривіальну лііївську симетрію лише тоді, коли воно зводиться до вигляду (2) при $A(U) = U^{-4/3}$, який розглянуто в [2].

Як випливає з доведення теореми 1 (див. підстановки (19), (21), (27) та (29)), сім'я замін, якими породжуються всі локально еквівалентні рівняння до (7) при $F_0(U) = 1$, що мають таку ж структуру, має вигляд

$$\begin{cases} t \to c_0 t, \\ x \to c_1 x + c_2 t + c_3 t^2, \\ U \to c_4 + c_5 t + c_6 U. \end{cases} \tag{37}$$

Детальний розгляд випадків ii) та iii) показує, що цю сім'ю можна узагальнити до такої:

$$\begin{cases} t \to c_0 t, \\ x \to c_1 x + c_2 t + c_3 t^2 + c_7 \exp(c_8 x), \\ U \to c_4 + c_5 t + c_6 U \exp(c_9 t) + c_{10} x. \end{cases} \tag{38}$$

У підстановках (37) і (38) c_j, $j = 0, 1, \ldots, 10$, — довільні сталі.

З теорем 1–3 випливає, що деякі нелінійні рівняння теплопровідності з конвективним членом допускають оператори симетрій Лі G_1, Y, X, яких не допускає жодне нелінійне рівняння вигляду (2).

Зокрема, з теореми 1 випливає, що нелінійне рівняння

$$U_t = U_{xx} - \lambda_1 (\ln U) U_x - \lambda_2 U$$

інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1.1)$ (без одиничного оператора) з базовими операторами P_t, P_x та G_1. Відомо, що рівняння Бюргерса також інваріантне відносно алгебри Галілея, що не містить одиничного оператора. Зауважимо, що всі диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) другого порядку, інваріантні відносно подібного зображення алгебри Галілея, описано в [8].

З другого боку, *всі* нелінійні рівняння вигляду (2) не є галілеївськи-інваріантними [8]. Лише лінійне рівняння теплопровідності допускає алгебру Галілея, що містить одиничний оператор і є суттєво іншою, ніж згадана вище. Нелінійні ДРЧП та системи ДРЧП другого порядку, які зберігають симетрію Лі лінійного рівняння теплопровідності, описано в [6, 9, 10].

Заслуговують також на увагу оператори $\mathcal{G}_1$ і $\mathcal{G}_2$, кожен з яких разом з операторами (8) утворює алгебру $A\,\mathcal{G}(1.1)$, яка є суттєво іншою, ніж алгебра Галілея. У класі рівнянь (2) таку алгебру (з додатковим одиничним оператором) допускає лише рівняння теплопровідності з логарифмічною нелінійністю вигляду $\lambda U \ln U$. Як випливає з теореми 1, в класі рівнянь (1) таку алгебру (без одиничного оператора) допускають ще два нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії) з конвективним членом, а саме:

$$U_t = U_{xx} - \lambda_1 U U_x - \lambda_2 U,$$
$$U_t = U_{xx} - \lambda_1 (\ln U) U_x - \lambda_2 U - \lambda_3 (\ln U) U,$$

де $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$.

Нелінійні системи багатовимірних ДРЧП другого порядку, інваріантні відносно алгебри $A\,\mathcal{G}(1.n)$, описано в [11].

3. Ліївські та неліївські анзаци та сім'ї точних розв'язків. Розглянемо нелінійне дифузійне рівняння

$$U_t = UU_{xx} + \lambda_1 U U_x + \lambda_2 U + \frac{2}{9}\lambda_1^2 U^2, \tag{39}$$

що є частковим випадком рівняння (5) (λ_1 та $\lambda_2 \in \mathbf{R}$). Можна помітити, що це рівняння інваріантне відносно 4-вимірної алгебри Лі з базовими операторами P_t, P_x, T та X (див. теорему 3, випадок е), $k = -1$). За допомогою підстановки

$$y = \exp(-\lambda_2 t), \qquad z = \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda_1 x\right) \tag{40}$$

ця алгебра набуває такого зображення:

$$y\partial_y, \quad z\partial_z, \quad y^2\partial_y - yU\partial_U, \quad z^2\partial_z + 2zU\partial_U. \tag{41}$$

Тепер ми використаємо алгебру (41) для побудови анзаців та сімей точних розв'язків рівняння (39). Множина всіх нееквівалентних підалгебр (41) у нових змінних (40) генерує анзаци

$$\begin{gathered} U = (1 + a_0 y)^{-1}(1 + a_1 z)^2 \varphi(\omega), \qquad \omega = \ln\left[(a_0 + y^{-1})^b (a_1 + z^{-1})\right], \\ U = y^{-1}(1 + a_1 z)^2 \varphi(\omega), \qquad \omega = y^{-1} + b\ln(a_1 + z^{-1}), \\ U = z^2(1 + a_0 y)^{-1}\varphi(\omega), \qquad \omega = z^{-1} + b\ln(a_0 + y^{-1}), \\ U = z^2 y^{-1}\varphi(\omega), \qquad \omega = a_0 y^{-1} + a_1 z^{-1}, \end{gathered} \tag{42}$$

де φ — нова невідома функція, що є розв'язком відповідно таких звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР):

$$\begin{gathered} \lambda_1^2 \varphi(\varphi_{\omega\omega} + 3\varphi_\omega + 2\varphi) - 9\lambda_2(b\varphi_\omega - \varphi) = 0, \\ \lambda_1^2 \varphi(b^2\varphi_{\omega\omega} + 3b\varphi_\omega + 2\varphi) - 9\lambda_2 \varphi_\omega = 0, \\ \lambda_1^2 \varphi\varphi_{\omega\omega} - 9\lambda_2(b\varphi_\omega - \varphi) = 0, \end{gathered} \tag{43}$$

$$\lambda_1^2 a_1^2 \varphi\varphi_{\omega\omega} - 9\lambda_2\varphi_\omega = 0.$$

У (42), (43) a_0, a_1, b — довільні сталі.

Останнє рівняння у (43) легко інтегрується і дає 4-параметричну сім'ю точних розв'язків нелійного рівняння (39), а саме:

$$U = c_0 \exp\left(\lambda_2 t - \frac{2}{3}\lambda_1 x\right) E^{-1}(\omega_0), \tag{44}$$

де

$$\omega_0 = c_1 \exp(\lambda_2 t) + c_2 \exp\left(\frac{1}{3}\lambda_1 x\right) + c_3$$

і E^{-1} — обернена функція до

$$E(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\ln\varphi}.$$

Частинні розв'язки інших ЗДР з (43) породжують таку 3-параметричну сім'ю точних розв'язків

$$U = -\frac{9\lambda_2}{2\lambda_1^2} \frac{c_0 + c_1 \exp(-\lambda_1 x/3) + c_2 \exp(-2\lambda_1 x/3)}{c_0 + \exp(-\lambda_2 t)}, \qquad \lambda_2 \neq 0. \tag{45}$$

У формулах (44), (45) c_i, $i = 0, \ldots, 3$, — довільні сталі.

Розглянемо узагальнення рівняння Маррі [4] вигляду (5). Очевидно, що при $\lambda_1 = 0$ це рівняння співпадає з відомим рівнянням Фішера

$$U_t = \lambda U_{xx} + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2.$$

Використовуючи метод Лі, неважко переконатися, що при $\lambda\lambda_1\lambda_3 \neq 0$ (нижче це скрізь припускається) класична симетрія рівняння (5) вичерпується операторами (8). Отже, всі ліївські розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$U = U(a_0 t + a_1 x), \qquad a_0, a_1 \in \mathbf{R}. \tag{46}$$

Для побудови нових неліївських розв'язків застосуємо підхід, що грунтується на розгляді заданого нелінійного ДРЧП разом з додатковою умовою у вигляді ЗДР високого порядку. В роботах [12, 13] цей підхід було успішно застосовано для побудови нових сімей точних розв'язків деяких нелінійних систем ДРЧП, що описують реальні процеси у фізиці та хімії.

Дійсно, розглянемо додаткову умову третього порядку вигляду

$$\alpha_1(t)\frac{dU}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} = 0$$

що породжує, зокрема, такий анзац:

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \varphi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x), \tag{47}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \left(\pm(\alpha_2^2 - 4\alpha_1)^{1/2} - \alpha_2\right)/2$ та $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Використовуючи формули, виведені в [13], неважко встановити, що анзац (47) породжує 3-параметричну сім'ю точних розв'язків рівняння (5) (при $\lambda_2 \neq 0$) вигляду

$$U = \frac{\lambda_2 + c_1 \exp(\lambda\gamma_1^2 t + \gamma_1 x) + c_2 \exp(\lambda\gamma_2^2 t + \gamma_2 x)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}, \tag{48}$$

де γ_1 і γ_2 — корені рівняння $\lambda_0\gamma_{1,2}^2 + \lambda_1\gamma_{1,2} - \lambda_3 = 0$. Очевидно, що (48) не є розв'язками вигляду (46), а отже, це саме неліївські розв'язки нелінійного узагальнення рівняння Маррі (5). З другого боку, ця сім'я розв'язків як частковий випадок, а саме при $\lambda = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = -2\lambda_1^2/9$, породжує сім'ю ліївських розв'язків (45) рівняння (39).

Отже, для нелінійного рівняння з широкою симетрією одержання неліївського анзацу зовсім не гарантує побудови за ним неліївських розв'язків. Наприклад, *неліївський анзац* (47) породжує *ліївські розв'язки* (45) для нелійного рівняння (39).

Сім'я розв'язків (48) породжує двопараметричну сім'ю

$$U = \frac{\lambda_2 + c_1 \exp(\lambda\gamma^2 t + \gamma x)}{\lambda_3 + c_0 \exp(-\lambda_2 t)}, \qquad \gamma = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \tag{49}$$

для рівняння Маррі (6). Розв'язки (49) не мають вигляду (46), проте у випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ вони мають подібні властивості до плоскохвильових розв'язків, зображених графічно в [4]. Отже, вони описують подібні процеси, проте, ймовірно, більш точно. При $c_0 = 0$ розв'язки (49) перетворюються на плоскохвильові.

Проблемі побудови неліївських розв'язків рівняння (5) присвячено статтю [14]. Тут необхідно зауважити, що у випадку комплексних коренів γ_1 і γ_2 кожен розв'язок вигляду (48) породжує два дійсні, які містимуть періодичні функції cos або sin. Такі розв'язки моделюють процеси еволюції, що мають коливний характер. У випадку $\lambda_2 = 0$ використання анзацу (47) приводить до неліївських розв'язків рівняння (5), які мають властивість за скінченний проміжок часу зростати до нескінченності [13].

Цю роботу було написано під час перебування авторів у Математичному інституті Обервольфаха (Німеччина), вона фінансово підтримана фондом Volkswagen–Stiftung (RiP-program).

1. *Gilding B. H., Kersner R.* The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves // J. Different. Equats. – 1996. – **124**. – P. 27–79.
2. *Dorodnitsyn V. A.* On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – **22**. – P. 115–122.
3. *Фущич В. І., Серов М. І., Тулупова Л.* Умовна інваріантність та точні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності // Допов. АН України. – 1993. – № 4. – С. 23–27.
4. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.
5. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – **7**. – P. 353–369.
6. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
7. *Катков В. Л.* Групповая классификация решений уравнений Хопфа // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – **6**. – С. 105–106.
8. *Fushchych W., Cherniha R.* The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**. – P. 3491–3503.
9. *Фущич В. І., Черніга Р. М.* Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції-дифузії // Допов. АН України. – 1994. – № 3. – С. 31–38.
10. *Fushchych W., Cherniha R.* Galilei-invariant systems of nonlinear systems of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 5569–5579.
11. *Фущич В. И., Черпига Р. М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1687–1694.
12. *Черніга Р. М.* Симетрія та точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу в термоядерній плазмі // Допов. НАН України. – 1995. – № 4. – С. 17–21.
13. *Cherniha R.* A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Repts. Math. Phys. – 1996. – **38**. – P. 301–312.
14. *Черніга Р. М.* Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 814–827.

Одержано 07.05.96