УДК 517.95

К. С. Матвийчук (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

We formulate sufficient conditions for the technical stability on given bounded and infinite time intervals and for the asymptotic technical stability of continuously controlled linear dynamical processes with distributed parameters. By using the comparison method and the Lagrange multipliers method in combination with the Lyapunov direct method, we obtain criteria which define a set of controls providing the technical stability of output process. We select the optimal control which provides the least value of norm corresponding to a given process.

Сформульовано достатні умови технічної стійкості на заданому обмеженому і нескінченному проміжках часу асимптотичної технічної стійкості неперервно керованих лінійних динамічних процесів з розподіленими параметрами. За допомогою методу порівняння і методу множників Лагранжа в комбінації з прямим методом Ляпунова одержано критерії, що визначають множину керувань, які забезпечують технічну стійкість вихідного процесу. Виділяється оптимальне керування, яке забезпечує найменше значення відповідної заданому процесу норми.

Важное место среди подходов исследования качественного поведения решений дифференциальных уравнений занимает метод, основанный на использовании функций или функционалов Ляпунова, имеющих не обязательно знакопостоянную полную производную. В данной работе предлагается развитие этого подхода для случая изучения свойств технической устойчивости управляемых динамических процессов с распределенными параметрами, возмущенные состояния которых характеризуются краевой задачей при заданной системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с коэффициентами, зависящими от времени и пространственной переменной, с управлением, заданным в уравнениях движения и граничных условиях. При этом используются результаты, содержащиеся в [1 – 11]. Применяется метод сравнения [12 – 15] совместно с методом множителей Лагранжа [16].

1. Основные предположения. Рассмотрим динамический процесс с распределенными параметрами. Пусть возмущенные состояния такого процесса описываются системой линейных уравнений в частных производных первого порядка [2, 8–11]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A(t,x)\varphi + B(t,x)\psi + G(t,x)u_x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = C(t,x)\varphi + D(t,x)\psi, \qquad t\in I, \qquad x\in\mathcal{D}, \tag{2}$$

при заданных начальных условиях

$$\varphi(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \tag{3}$$

где $\varphi_0(x)$ — n-мерный вектор начального состояния, удовлетворяющий нужным условиям регулярности [11] и принадлежащий заданному ниже множеству Ω_0 допустимых начальных состояний процесса, описываемого системой (1), (2); $t\in I\equiv[t_0, L]$ — заданный ограниченный интервал времени, $t_0\ge 0$, $L = \text{const} \in$ $\in (t_0, +\infty)$, $I\subset T=[t_0,+\infty)$; $\varphi=\varphi(t,x)$ — n-мерный вектор состояния, $\psi =$ $=\psi(t,x)$ — m-мерный вектор параметров состояния процесса; $u_x = u_x(t,x)$ — s-мерный вектор распределенного управления динамическим процессом; $x\in\mathcal{D}\equiv$ $\equiv(0,l)$, $(l=\text{const}>0)$ — одномерная пространственная координата; $A(t,x)$, $B(t,x)$, $G(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$ — матрицы с непрерывными элементами. Вектор-функцию u_x считаем непрерывным элементом векторного гильбертова пространства $L_2(\mathcal{D})$.

Предположим [2, 3], что значения первых $r \le n$ функций $\varphi_i(t, l)$ используются как граничные управления

$$\varphi_i(t, l) = v_i(t), \qquad i = 1, \dots, r. \tag{4}$$

Остальные граничные условия для φ считаем однородными или нулевыми [2].

Переменные ψ в уравнениях (1), (2), играющие роль параметров [2, 9], введены при преобразовании исходной системы уравнений к виду (1), (2) так, чтобы выполнялись условия совместимости [9]

$$\frac{\partial(A\varphi + B\psi + Gu_x)}{\partial x} = \frac{\partial(C\varphi + D\psi)}{\partial t}. \tag{5}$$

При этом, как следует из [9, 12], любое линейное дифференциальное уравнение в частных производных можно свести к виду (1), (2).

Обозначим через u $(s + r)$-мерный вектор управления системой, состоящий из распределенного управления u_x и граничного управления (4): $u = (u_x, v)^*$, $v = (v_1, \dots, v_r)^*$ (* — знак транспонирования).

Одновременно с (1) – (4) рассматриваем систему без управления

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A(t, x)\varphi + B(t, x)\psi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = C(t, x)\varphi + D(t, x)\psi, \tag{7}$$

$$t \in I, \qquad x \in \mathcal{D},$$

при начальных условиях (3) и граничных условиях, где вместо условий (4) заданы нулевые условия

$$\varphi_i(t, l) = 0, \qquad i = 1, \dots, r, \qquad r \le n, \tag{8}$$

а остальные граничные условия аналогичны соответствующим граничным условиям задачи (1) – (4).

Предполагаем, что для системы (1) – (4) и системы (6) – (8), (3) выполнены условия существования классического решения. Допустимым считается любое непрерывное управление u, не нарушающее этих условий для системы (1) – (4) [2]. Множество таких управлений обозначим через U.

Пусть задана [13, 14] мера $\rho = \rho[\varphi]$, характеризующая отклонение функции φ от значения $\varphi = 0$. Предположим, что наперед заданы область возможных начальных состояний Ω_0 системы (1) – (4)

$$\Omega_0 = \{\varphi : \rho \le \alpha, \ \alpha > 0\} \tag{9}$$

и область допустимых текущих состояний $\Omega(t)$ системы (1) – (4)

$$\Omega(t) = \{\varphi : \rho \le \eta(t), \ \eta(t) > 0\}, \tag{10}$$

где α, $\eta(t)$ — заданные число и функция соответственно, при этом $\alpha \le \eta(t_0)$, $\Omega_0 \subset \Omega(t_0)$.

Ставится задача: определить подмножество $\Lambda \subset U$ управлений u, обеспечивающих при заданной мере $\rho = \rho[\varphi]$ выполнение условия

$$\varphi(t, x) \in \Omega(t), \qquad t \in I, \qquad x \in \mathcal{D}, \tag{11}$$

для решений задачи (1) – (4) с начальными значениями

$$\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x) \in \Omega_0. \tag{12}$$

2. Достаточные условия технической устойчивости управляемого процесса. Ниже с помощью метода сравнения доказываются теоремы о технической устойчивости исходного управляемого процесса. С этой целью используем необходимые результаты из [2, 16].

Пусть для порождающей системы (6) – (8) выбран функционал вида

$$V[t, \varphi] = \exp[\beta(t)] \int_{\mathcal{D}} \varphi^*(t, x) F(t, x) \varphi(t; x)\, dx, \tag{13}$$

где $F(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая симметричная матрица, $\beta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Используем его для исходной системы (1) – (4).

Предположим, функционал (13) удовлетворяет условию $V[t, \varphi] \geq c\rho[\varphi]$, где $c = \mathrm{const} > 0$ — заданная величина. Полная производная dV/dt в силу уравнения (1) равна выражению

$$\frac{dV[t, \varphi]}{dt} = \exp[\beta] \int_{\mathcal{D}} \left[\varphi^* \left(\frac{d\beta(t)}{dt} F + \frac{\partial F}{\partial t} + FA + A^* F \right) \varphi + \right.$$
$$\left. + \varphi^* FB\psi + \psi^* B^* F\varphi + 2\varphi^* FGu_x \right] dx \tag{14}$$

и в силу системы (6)

$$\frac{dV[t, \varphi]}{dt} = \exp[\beta(t)] \int_{\mathcal{D}} \left[\varphi^* \left(\frac{d\beta(t)}{dt} F + \frac{\partial F}{\partial t} + FA + A^* F \right) \varphi + \varphi^* FB\psi + \psi^* BF\varphi \right] dx. \tag{15}$$

Пусть в области $K = \{ t, V\colon\ t \in I,\ |V| < +\infty \}$ определена непрерывная функция $\mathcal{F}(t, V)$, удовлетворяющая при $V = 0$ условию $\mathcal{F}(t, 0) = 0$. Обозначим функцию вдоль решений $\varphi(t, x; u)$ краевой задачи (1) – (4) через

$$\Phi_1(t, \varphi(t, x; u), u) =$$
$$= \exp[\beta(t)] \left[\int_{\mathcal{D}} \left(\varphi^*(t, x; u) N \varphi(t, x; u) + 2\varphi^*(t, x; u) F(t, x) G(t, x) u_x(t, x) \right) dx + \right.$$
$$\left. + v^*(t) Q_1(t, l) v(t) + z^*(t, l) Q_2(t, l) z(t, l) + 2v^*(t) Q_3(t, l) z(t, l) \right] \tag{16}$$

и функцию вдоль решений $\overline{\varphi}(t, x)$ краевой задачи (6) – (8), (3) через

$$\Phi_2(t, \overline{\varphi}(t, x), u) =$$
$$= \exp[\beta(t)] \left[\int_{\mathcal{D}} \left(\overline{\varphi}^*(t, x) N \overline{\varphi}(t, x) + 2\overline{\varphi}^*(t, x) F(t, x) G(t, x) u_x(t, x) \right) dx + \right.$$
$$\left. + v^*(t) Q_1(t, l) v(t) + z^*(t, l) Q_2(t, l) z(t, l) + 2v^*(t) Q_3(t, l) z(t, l) \right], \tag{17}$$

$$N = \frac{d\beta(t)}{dt} F + \frac{\partial F}{\partial t} + FA + A^* F - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + PC + C^* P \right), \tag{18}$$

$P(t, x)$ — наперед заданная непрерывно дифференцируемая симметричная матрица размерности $(n \times n)$; Q_1, Q_2, Q_3 — матрицы размерности $(r \times r)$, $(n - r) \times (n - r)$, $[r \times (n - r)]$ соответственно, с помощью которых матрица $P(t, x)$

разбивается на блоки: Q_1, Q_2 размещены сверху вниз по левой диагонали, Q_3, Q_3^* размещены сверху вниз по правой диагонали матрицы $P(t, x)$ [2, 9]; вектор $z = (\varphi_{r+1}(t, l), \ldots, \varphi_n(t, l))^*$. Обозначим значение функционала (13) вдоль решений процесса (1) – (4) через $V(t) = V[t, \varphi(t, x; u)]$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть справедливы условия:*

1. *Для системы* (1) – (4) *выполнены условия существования классического решения.*

2. *В области* I *определена непрерывная функция* $M(t) > 0$, *при которой имеют место свойства*

$$C_{M(t)} \subset \Omega(t), \qquad C_{M(t)} = \{\varphi: V[t, \varphi] \le M(t) \ \forall\, t \in I\}. \tag{19}$$

3. *Существует непрерывно дифференцируемая симметричная матрица* $P(t, x)$ *размерности* $(n \times n)$, *имеющая свойства:*

$$F(t, x)B(t, x) - P(t, x)D(t, x) = 0, \tag{20}$$

$$\varphi^*(t, 0)P(t, 0)\varphi(t, 0) = 0, \qquad t \in I, \qquad x \in \mathcal{D}. \tag{21}$$

4. *При любых управлениях* $u \in U$, *для которых выполнено условие*

$$\frac{dV}{dt} = W, \tag{22}$$

где

$$\frac{dV}{dt} = \exp[\beta(t)] \left\{ \int_{\mathcal{D}} \left(\varphi^*(t, x)N\varphi(t, x) + 2\varphi^*(t, x)F(t, x)G(t, x)u_x(t, x) \right) dx + \right.$$

$$\left. + v^* Q_1 v + z^* Q_2 z + 2v^* Q_3 z \right\}, \tag{23}$$

$$W = \int_{\mathcal{D}} \varphi^*(t, x)w(t, x)\varphi(t, x)\, dx,$$

$w(t, x)$ — *непрерывная симметричная матрица, и при любых допустимых начальных состояниях* $\varphi_0(x) \in \Omega_0$ *на решениях исходного процесса* (1) – (4) *и порождающего процесса* (6) – (8) *справедливы условия:*

$$\Phi_2(t, \overline{\varphi}(t, x), u) \le \mathcal{F}(t, V(t)), \qquad t \in I, \tag{24}$$

$$|\Phi_1(t, \varphi(t, x; u), u) - \Phi_2(t, \overline{\varphi}(t, x), u)| \le Rf(t), \tag{25}$$

где $R = \text{const} > 0$ *и* $f(t)$ — *наперед заданные соответственно постоянная величина и вещественная неотрицательная ограниченная функция, для которой существует в области* I *интеграл*

$$\sigma(t) = R = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau. \tag{26}$$

5. *Существует* z — *верхнее решение* $\overline{z}(t) = \overline{z}(t, t_0, z_0)$ *задачи Коши сравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{F}(t, z + \sigma(t)), \qquad t \in I, \tag{27}$$

$$z_0(t) = z_0, \quad t_0 \in I \quad (z_0 = \mathrm{const}), \tag{28}$$

при заданных функции $\sigma(t)$ *вида* (26) *и условиях*

$$V_0 \le z_0, \quad V_0 \equiv V[t_0, \varphi_0(x)], \quad t_0 \in I, \tag{29}$$

$$0 < z_0 \le b, \quad b \le M(t_0); \quad b = \mathrm{const} > 0, \tag{30}$$

удовлетворяющее в интервале I *неравенству*

$$\bar{z}(t) + \sigma(t) \le M(t), \quad t \in I. \tag{31}$$

6. *Множества* Ω_0, $C_{z_0} = \{\varphi : V[t, \varphi] \le z_0\}$ *удовлетворяют условию* $\Omega_0 \subset C_{z_0}$ *при* $t = t_0$.

Тогда справедливы утверждения:

1. *При любых управлениях* $u \in U$, *удовлетворяющих уравнению* (22) *при* (23), *исходный процесс* (1) – (4) *является технически устойчивым по мере* ρ *на заданном ограниченном промежутке времени* I.

2. *Пусть процессы* (1) – (4) *и* (6) – (8), (3) *определены с указанными выше свойствами их правых частей в любом промежутке времени* $I \subseteq T$. *Тогда исходный процесс* (1) – (4) *является технически устойчивым на бесконечном интервале времени* T, *если условия* 1 – 6 *теоремы* 1 *выполняются на любом временном промежутке* $I \subseteq T$.

3. *Если дополнительно справедливо условие*

$$\lim_{t \to +\infty} [\bar{z}(t) + \sigma(t)] = 0, \tag{32}$$

то процесс (1) – (4) *является асимптотически технически устойчивым.*

Доказательство. Используем полную производную dV/dt для (13) в силу уравнения (1), представленную в виде (14). Правая часть (14) подлежит преобразованию. Прибавим к ней выражение [2]

$$\exp[\beta(t)] \int_{\mathcal{D}} \left[\varphi^* P(t, x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - C\varphi - D\psi \right) \right] dx. \tag{33}$$

На основе интегрирования по частям с учетом (2) и (4) имеем выражение [2]

$$\frac{dV[t, \varphi]}{dt} = \exp[\beta(t)] \Bigg\{ \int_{\mathcal{D}} [\varphi^*(t, x) N \varphi(t, x) + \varphi^*(t, x)(FB - PD)\psi(t, x) +$$
$$+ \psi^*(t, x)(B^* F - D^* P)\varphi(t, x) + 2\varphi^*(t, x) F G u_x(t, x)] dx +$$
$$+ v^* Q_1 v + z^* Q_2 z + 2 v^* Q_3 z - \varphi^*(t, 0) P(t, 0) \varphi(t, 0) \Bigg\}. \tag{34}$$

В силу условия 3 теоремы 1 имеем

$$\frac{dV[t, \varphi]}{dt} = \exp[\beta(t)] \Bigg\{ \int_{\mathcal{D}} [\varphi^*(t, x) N \varphi(t, x) + 2\varphi^*(t, x) F G u_x(t, x)] dx +$$
$$+ v^* Q_1 v + z^* Q_2 z + 2 v^* Q_3 z \Bigg\}, \tag{35}$$

где переменные ψ исключены.

Из (35), используя (16), (17) и соответствующие условия теоремы 1, при управлениях $u \in U$, подчиненных условиям (22), (23), находим оценку для $dV(t)/dt$ вдоль решений $\varphi = \varphi(t, x; u)$ исходного процесса (1) – (4) в области $I \subset T$:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \mathcal{F}(t, V(t)) + Rf(t), \qquad t \in I. \tag{36}$$

Воспользовавшись (26), положим $k(t) = V(t) - \sigma(t)$. Тогда

$$\frac{dk(t)}{dt} \leq \mathcal{F}(t, k(t) + \sigma(t)), \qquad t \in I. \tag{37}$$

Из (37) следует система сравнения [12 – 15] (27), (28) при условиях (29), (30) с наперед заданной и аддитивно входящей в (27) функцией (26). Следовательно, используя теорему о дифференциальных неравенствах из [15] при условиях (29), вдоль решений $\varphi(t, x; u)$ исходного управляемого процесса (1) – (4) при управлениях $u \in U$, подчиненных условиям (22), (23), находим оценку

$$V(t) \leq \bar{z}(t) + \sigma(t), \qquad t \in I. \tag{38}$$

Отсюда и из условий (30), (31), (19) получаем неравенства

$$\begin{gathered} V(t) \leq M(t), \qquad M(t) \leq \eta(t), \qquad t \in I, \\ V[t_0, \varphi_0] \leq b, \qquad t_0 \in I \end{gathered} \tag{39}$$

вдоль решений процесса (1) – (4) при управлениях $u \in U$, удовлетворяющих (22), (23).

Из неравенств (39) и заданных в теореме 1 условий 6 следует утверждение 1 данной теоремы.

Аналогично на любом временном интервале $I \subseteq T$ получаем утверждение 2 и при условии (32) утверждение 3 теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 3 *теоремы* 1.

2. *При любых управлениях* $u \in U$, *удовлетворяющих условиям* (22), (23), *и при любых допустимых начальных состояниях* $\varphi_0 \in \Omega_0$ *на решениях исходного процесса* (1) – (4) *справедливы условия:*

$$|\Phi_3(t, \varphi(t, x; u), u)| \leq R_1 \mu(t), \tag{40}$$

где

$$\Phi_3(t, \varphi(t, x; u), u) =$$

$$= \exp[\beta(t)] \left\{ \int_{\mathcal{D}} (\varphi^* N_1 \varphi + 2\varphi^* F G u_x)\, dx + v^* Q_1 v + z^* Q_2 z + 2v^* Q_3 v \right\}, \tag{41}$$

$$N_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + FA + A^* F - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + PC + C^* P \right);$$

б) *существует в области* I *интеграл*

$$\sigma(t) = R_1 \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, d\tau, \tag{42}$$

при этом $R_1 = \mathrm{const} > 0$ *и* $\mu(t)$ — *заранее определенные соответственно константа и вещественная неотрицательная непрерывная функция.*

3. *Существует* z — *верхнее решение* $\bar{z}(t) = \bar{z}(t, t_0, z_0)$ *системы сравнения формы*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt}[z+\sigma(t)], \qquad t\in I, \tag{43}$$

$$z(t_0) = z_0, \qquad t_0 \in I \qquad (z_0 = \text{const}) \tag{44}$$

при заданной согласно формуле (42) *функции* $\sigma(t)$ *и условиях типа* (29), (30), *удовлетворяющее в области* I *неравенству* (31).

4. *Справедливо условие* 6 *теоремы* 1.

Тогда при допустимых управлениях $u \in U$, *подчиненных условиям* (22), (23), *справедливы утверждения типа утверждений* $1-3$ *теоремы* 1 *о технической устойчивости процесса* (1) – (4).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с некоторыми изменениями. При этом решение $\bar{z}(t)$ системы сравнения (43), (44) имеет явное представление

$$\bar{z}(t) = z_0 \exp[\beta(t)-\beta(t_0)] + R_1 \exp[\beta(t)]\int_{t_0}^{t} \exp[-\beta(\tau)]\,\mu(\tau)\,d\tau - \sigma(t). \tag{45}$$

Следовательно, неравенства типа (31), (38), (39) порождают последовательность оценок

$$V(t) \le R_1 \exp[\beta(t)]\int_{t_0}^{t} \exp[-\beta(\tau)]\,\mu(\tau)\,d\tau +$$

$$+ z_0 \exp[\beta(t)-\beta(t_0)] \le M(t) \le \eta(t), \qquad t \in I, \tag{46}$$

которые являются завершающими при доказательстве теоремы 2. Кроме того, теорема 2 не опирается на свойства решений порождающей системы (6) – (8), (3).

3. Условия минимизации управлений исходного процесса. Совокупность управлений $u \in U$, которые гарантируют выполнение условий теоремы 1 или 2, образуют подмножество управлений, обеспечивающих техническую устойчивость исходного управляемого распределенного процесса (1) – (4). Обозначим такое подмножество через $\Lambda \subset U$ в случае обеих теорем.

Выделим в Λ оптимальное управление u_0, удовлетворяющее условиям технической устойчивости исходного процесса согласно с теоремой 1 или 2 с наименьшим значением квадрата нормы [2]

$$\|u\|^2 = \|u_x\|^2_{L_2} + \|v\|^2 = \int_{\mathcal{D}} u_x^* u_x\,dx + v^*v \tag{47}$$

в каждый момент времени t. Для этой цели воспользуемся методом множителей Лагранжа [16]. Рассмотрим функционал [2 – 4, 7, 8]

$$J[u] = \gamma\left\{\exp[\beta(t)]\left[\int_{\mathcal{D}}(\varphi^* N\varphi + 2\varphi^* F G u_x)\,dx + v^* Q_1 v + z^* Q_2 z + 2v^* Q_3 z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp[-\beta(t)]\int_{\mathcal{D}}(\varphi^* w\varphi)\,dx\right]\right\} + \int_{\mathcal{D}} u_x^* u_x\,dx + v^*v, \tag{48}$$

где $\gamma = \gamma(t)$ — множитель Лагранжа. Из условия $\min_u J[u]$ определяем $u_0 = (u_{x_0}, v_0)$ [2, 7 – 9]:

$$u_{x_0} = -\gamma \exp[\beta(t)]\, G^* F\varphi, \tag{49}$$

$$v_0 = -\gamma[E+\gamma\exp[\beta(t)]Q_1]^{-1}\exp[\beta(t)]Q_3 z \tag{50}$$

при условиях

$$E+\gamma\exp[\beta(t)]Q_1 > 0, \qquad \gamma > 0, \tag{51}$$

где E обозначает единичную матрицу.

Из условий (20) – (23) при (49) – (51) имеем систему уравнений [2, 3, 6 – 10]

$$N - 2\gamma\exp[\beta(t)]FGG^*F - \exp[-\beta(t)]w = 0, \tag{52}$$

$$Q_2 - 2\gamma\exp[\beta(t)]Q_3^*(E+\gamma\exp[\beta(t)]Q_1)^{-1}Q_3 +$$

$$+ \gamma^2\exp[\beta(t)]Q_3^*(E+\gamma\exp[\beta(t)]Q_1)^{-1}\times$$

$$\times Q_1(E+\gamma\exp[\beta(t)]Q_1)^{-1}Q_3 = 0, \tag{53}$$

$$t\in I, \qquad x\in\mathcal{D}.$$

Уравнения (52), (53) дают возможность определить матрицу w и множитель γ при наперед заданных функции $\beta(t)$ и матрицах F, P совместно с заданными условиями (20), (21). С другой стороны, при заданных непрерывных функции $\beta(t)$, матрице w и множителе γ уравнения (52), (53) могут быть использованы для построения матриц F и P с учетом условий (20), (21) и граничных условий для φ исходного процесса.

1. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале времени // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т.3. – С. 43–127.
2. *Байрамов Ф. Д.* Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. – Новосибирск: Наука, 1991. – С. 134–139.
3. *Бутковский А. Г.* Управление системами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 11. – С. 16–65.
4. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. – М.: Высш. шк., 1982. – 288 с.
5. *Каменков Г. В.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**, вып. 5. – С. 529–540.
6. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. – Киев: Выща шк., 1978. – 184 с.
7. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
9. *Лурье К. А.* Задача Майера - Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 842–853.
10. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
11. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Казань: Изд-во Казан. авиац. ин-та, 1971. – 180 с.
12. *Матвийчук К. С.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 2009–2011.
13. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, вып. 2. – С. 210–218.
14. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости системы автоматического управления с переменной структурой // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 10. – С. 74–78.
15. *Szarski J.* Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1967. – 256 p.
16. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 1. – 480 с.

Получено 22.04.96