УДК 517.944

С. Г. Хома (Тернопіл. акад. нар. госп-ва)

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We find conditions for the existence of the classical solution of boundary value problem $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = u(x,2\pi)$.

Знайдено умови існування класичного розв'язку крайової задачі $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = u(x,2\pi)$.

Відомо [1], що в класі гладких функцій при умові, що $\varphi(x) = \varphi(x+2\pi) = -\varphi(-x)$, $f(x,t) = f(x+2\pi,t) = -f(-x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,2\pi]$, функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_\tau^t \{f(x+y-\tau,\tau) - f(x-y+\tau,\tau)\}\,dy \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{1}$$

є єдиним розв'язком в прямокутнику $\Pi_{2\pi} = \{0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ мішаної задачі

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Покажемо, що на основі формули (1) можна побудувати розв'язок такої крайової задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 2\pi, \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{5}$$

Позначимо через G_x простір функцій двох змінних, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ разом з похідною по x; $\tilde{C}^{i,j}(\mathbb{R}\times[0,2\pi])$ — простір функцій, i раз диференційовних по x і j раз диференційовних по t; $Q_{2\pi}^{-}$ — простір непарних і 2π-періодичних по x функцій; $L(X,Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень X в Y; S — клас функцій двох змінних x і t, що задовольняють такі умови:

$$S = \{f\colon f(x,t) = f(x+2\pi,t) = -f(-x,t) = f(x,2\pi-t)\}.$$

Розглянемо функцію

$$v(x,t) = u^0(x,t) + (P_{2\pi}f)(x,t), \tag{6}$$

де

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)), \tag{7}$$

$$(P_{2\pi}f)(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_t^{2\pi} d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (8)$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\varphi \in \tilde{C}^2(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$, *то* $u^0 \in S \cap \tilde{C}^{2,2}(\mathbb{R}\times[0,2\pi])$.

Доведення проводиться безпосередньою перевіркою.

Теорема 2. *Якщо* $\varphi \in \tilde{C}^2(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ *і* $f \in G_x \cap S$, *то функція* $v = u^0 + P_{2\pi}f$, *визначена формулами* (6)–(8), *є единою функцією, що задовольняє умови* (3)–(5). *Крім цього,* $P_{2\pi} \in L(\tilde{C}\cap S, \tilde{C}^{1,1}\cap S)$, $P_{2\pi} \in L(G_x \cap S, \tilde{C}^{2,2} \cap S)$.

Доведення. У тому, що функція $v = u^0 + P_{2\pi}f$ є розв'язком рівняння (3), переконуємось безпосередньою перевіркою. Звідси випливає, що оператор $P_{2\pi}$ кожну неперервну обмежену функцію, визначену на $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, переводить в обмежену гладку функцію, а кожну гладку обмежену функцію – у двічі диференційовну обмежену функцію. Оскільки згідно з умовами теореми 2 виконуються умови $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$, то для закінчення доведення теореми 2 достатньо показати виконання рівності

$$(P_{2\pi}f)(x,2\pi-t) = (P_{2\pi}f)(x,t). \qquad (9)$$

На основі формули (8) маємо

$$(P_{2\pi}f)(x,2\pi-t) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi-t} d\tau \int_{x+t+\tau-2\pi}^{x-t-\tau+2\pi} f(\xi,\tau)\,d\xi - $$

$$- \frac{1}{4}\int_{2\pi-t}^{2\pi} d\tau \int_{x+t+\tau-2\pi}^{x-t-\tau+2\pi} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Звідси, зробивши заміну змінної $\tau = 2\pi - \theta$ і врахувавши, що $f\in S$, одержимо

$$(P_{2\pi}f)(x,2\pi-t) = -\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{t} d\theta \int_{x+t-\theta}^{x-t+\theta} f(\xi,\theta)\,d\xi + \frac{1}{4}\int_t^0 d\theta \int_{x+t-\theta}^{x-t+\theta} f(\xi,\theta)\,d\xi =$$

$$= (P_{2\pi}f)(x,t).$$

Таким чином, на основі теореми 1 і рівності (9) переконуємося, що функція $v = u^0 + P_{2\pi}f$ задовольняє умови (5).

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Якщо умову (5) замінити умовою

$$u(x,0) = u(x,2\pi) = 0, \qquad (10)$$

то розв'язок крайової задачі (3), (4), (10) в класі гладких функцій визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x+t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x-t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \right\} d\tau +$$

$$+ (P_{2\pi}f)(x,t).$$

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.

Одержано 07.04.99