УДК 515. 162. 8

А. О. Пришляк (Киев. ун-т)

НОВЫЕ ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ*

For some knots and links with respect to the regular isotopy, a new invariant is introduced which is a three-variable Laurent polynomial. The properties of this invariant are investigated.

Введено новий інваріант для деяких вузлів та зачеплень відносно регулярної ізотопії, що є поліномом Лорана від трьох змінних, і досліджено його властивості.

В настоящей статье вводятся полиномы Лорана от трех переменных для некоторых узлов и зацеплений, являющиеся обобщением полиномов Кауффмана [1] и bracket-инвариантов [2]. Они не эквивалентны полиномам HOMFLY [3].

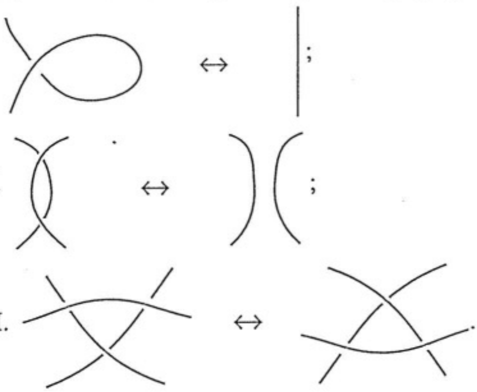
В первой части статьи определяется инвариант узлов и зацеплений при регулярной изотопии, называемый PR-полиномом. Инвариант при объемлемой изотопии получается из этого инварианта после некоторой нормализации. Во второй части описываются свойства PR-полиномов. Эти полиномы вычисляются для зацепления Хопфа и узлов 3_1 и 4_1. В третьей части доказывается корректность определения PR-полиномов.

1. Основные определения. По теореме Рейдемейсера две диаграммы зацеплений будут объемлемо изотопными, если одну из другой можно получить последовательностью движений Рейдемейсера первого, второго и третьего типа и изотопии плоскости проектирования, где движения Рейдемейсера имеют вид:

I.

II.

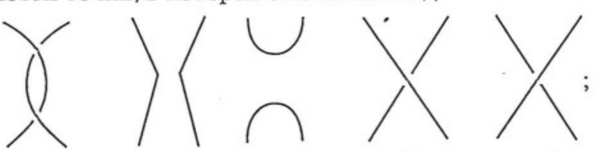
III.



Через $F = Z[a^{\pm 1}, b^{\pm}, d^{\pm}]$ будем обозначать кольцо полиномов Лорана от трех переменных. Рассмотрим свободный модуль над кольцом F, которое порождено классами эквивалентности диаграмм узлов при регулярной изотопии (две диаграммы регулярно изотопны, если одну из другой можно получить с помощью движений Рейдемейсера второго и третьего типов и изотопии плоскости проектирования). Рассмотрим следующие отношения эквивалентности на пространстве V:

1) $$L_{-2} \sim aL_0 + bL_\infty + cL_- + dL_+,$$

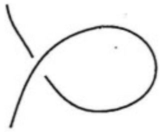
где $c = -ad - b/d$ и диаграммы L_{-2}, L_0, L_∞, L_-, L_+ одинаковы за исключением окрестности точки, в которой они имеют вид



L_{-2} $\quad L_0$ $\quad L_\infty$ $\quad L_-$ $\quad L_+$

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS, № 94–0921.

2) $L_{t\omega} \sim \lambda L$, $L_{-t\omega} \sim \lambda^{-1} L$, где $\lambda = d^3$,




$L_{t\omega}$ $\qquad$ $L_{-t\omega}$

Обозначим через W классы эквивалентности по этим отношениям $V/{\sim}$. Назовем зацепление хорошим, если его образ в W принадлежит $F\varnothing$, т. е. такое, для которого можно подсчитать PR-полином. Для таких зацеплений определим PR-полином. Это функция

$$\mathrm{PR}\colon \{\text{неориентированная диаграмма зацепления}\} \to F = Z[a^{\pm}, b^{\pm}, d^{\pm}],$$

определенная аксиомами:

1) $\mathrm{PR}(L_{-2}) = a\mathrm{PR}(L_0) + b\mathrm{PR}(L_\infty) + c\mathrm{PR}(L_-) + d\mathrm{PR}(L_+)$, где $b + cd + ad^2 = 0$;

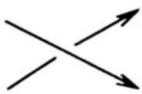
2) $\mathrm{PR}(L_{t\omega}) = \lambda\mathrm{PR}(L)$, $\mathrm{PR}(L_{-t\omega}) = \lambda^{-1}\mathrm{PR}(L)$, где $\lambda = d^3$;

3) $\mathrm{PR}(O) = 1$;

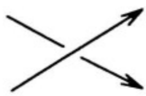
4) PR — инвариант при движениях Рейдемейсера второго и третьего типа.

В предложении, приведенном ниже, будет доказана корректность определения PR-полинома.

Обозначим через $\omega(D)$ вес ориентированной диаграммы узла. Вес узла равен алгебраической сумме всех пересечений в диаграмме узла, $\omega(D) = \sum_i \varepsilon_i$. Здесь



$\varepsilon_i = +1$



$\varepsilon_i = -1$

Из работы [1] следует, что $\mathrm{pr}(D) = \lambda^{-\omega(D)}\mathrm{PR}(D)$ есть инвариантом узла при объемлемой изотопии.

2. Свойства и примеры вычислений. Свойства PR-полиномов устанавливаются в следующих утверждениях.

Лемма 1. *Если* $D \sqcup O$ *обозначает несвязное объединение диаграммы* D *и диаграммы тривиального узла, то*

$$\mathrm{PR}(D \sqcup O) = \delta\mathrm{PR}(D),$$

где $\delta = (d^6 - a - cd^3 - 1/d^2)/b = d^2 + (ad^4 + d^6 - a - 1/d^2)/b$.

Доказательство. Из аксиомы 1 следует

$$\mathrm{PR}(L_{2t\omega}) = a\mathrm{PR}(L) + b\mathrm{PR}(L \sqcup O) + \lambda c\mathrm{PR}(L) + d/\lambda\,\mathrm{PR}(L).$$

С другой стороны, $\mathrm{PR}(L_{2t\omega}) = \lambda^2\mathrm{PR}(L)$ где

$L_{2t\omega}$

Таким образом, $\mathrm{PR}(D \sqcup O) = \delta\mathrm{PR}(D)$, где $\delta = (d^6 - a - cd^3 - 1/d^2)/b = d^2 + (ad^4 + d^6 - a - 1/d^2)/b$.

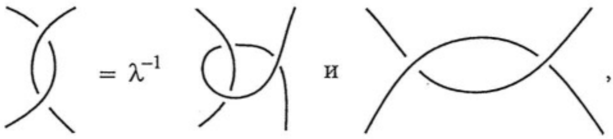
Лемма 2. *Для диаграммы* L_2, *полученной из диаграммы* L_{-2} *обращением пересечений, имеем*

$$\mathrm{PR}(L_2) = -c/d\mathrm{PR}(L_0) - b/d^4\mathrm{PR}(L_\infty) - a/d\mathrm{PR}(L_+) + 1/d\mathrm{PR}(L_-).$$

Действительно,

$$\mathrm{PR}(L_2) = \lambda^{-1}(\lambda a\mathrm{PR}(L_0) + b\mathrm{PR}(L_+) + c\mathrm{PR}(L_\infty) + d\mathrm{PR}(L_{2p})),$$

где



L_2 L_{2p}

$$\mathrm{PR}(L_{2p}) = b\mathrm{PR}(L_0) + a\mathrm{PR}(L_\infty) + d\mathrm{PR}(L_-) + c\mathrm{PR}(L_+).$$

Используя то, что $b + cd + ad^2 = 0$, получаем

$$\mathrm{PR}(L_2) = \lambda^{-1}(\lambda a\mathrm{PR}(L_0) + b\mathrm{PR}(L_+) + c\mathrm{PR}(L_\infty) + d(b\mathrm{PR}(L_0) +$$

$$+ a\mathrm{PR}(L_\infty) + d\mathrm{PR}(L_-) + c\mathrm{PR}(L_+))) =$$

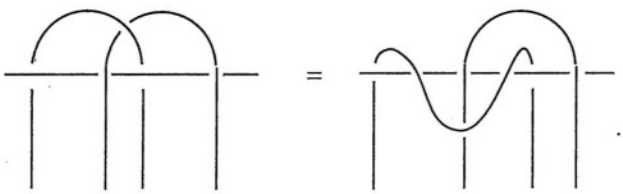
$$= -c/d\mathrm{PR}(L_0) - b/d^4\mathrm{PR}(L_\infty) - a/d\mathrm{PR}(L_-) + 1/d\mathrm{PR}(L_+).$$

Лемма 3. *Если* D — *диаграмма узла, а* $D!$ — *ее зеркальный образ, то*

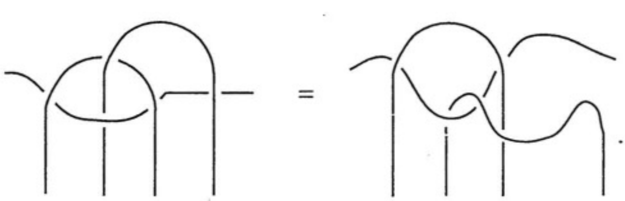
$$\mathrm{PR}(D!)[a, b, c, d] = \mathrm{PR}(D)[-c/d, -b/d^4, -a/d, 1/d].$$

Доказательство. Так как $D!$ получается из D заменой всех проходов на переходы и наоборот, то $L_{-2} \to L_2$, $L_0 \to L_0$, $L_\infty \to L_\infty$, $L_+ \to L_-$. Следовательно, вместо аксиомы 1 нужно использовать свойство 2, в котором L_+ в $D!$ заменяется на L_- в D, и L_- на L_+.

Лемма 4. *Следующая диаграмма может быть упрощена (по числу точек пересечения):*



Доказательство. Воспользовавшись для последней диаграммы аксиомой 1 и свойством 2, получим сумму диаграмм, которые имеют меньшее количество точек пересечения, чем начальная диаграмма, за исключением следующей диаграммы:



Эта диаграмма также может быть упрощена с использованием свойства 2.

Лемма 5. *Если произвести замены* $a = -1 + z\alpha^{1/3}$, $b = z\alpha - z\alpha^{1/3}$, $c = z + \alpha^{1/3}$, $d = \alpha^{1/3}$ *в* PR-*полиномах, мы получим* $\Lambda(z, \alpha)$-*полиномы Кауффмана* [1]. *А если произвести замены* $a = A^2$, $b = 1 + A^4$, $c = 1/A$, $d = -A$, *то в* PR-*полиномах мы получим bracket-инварианты* [2].

Доказательство. Λ-полином есть инвариант относительно регулярной изотопии, удовлетворяющий аксиомам:

1) $\Lambda(L_+) + \Lambda(L_-) = z(\Lambda(L_0) + \Lambda(L_\infty))$;

2) $\Lambda(L_{t\omega}) = \alpha\Lambda(L)$.

Сравнивая аксиомы 2 для PR и Λ-полиномов, получаем $\alpha = \lambda = d^3$ и $d = \alpha^{1/3}$.

Если вместо аксиомы 1 для PR-полиномов воспользоваться аксиомой 1 для Λ-полиномов, то

$$\begin{aligned} \mathrm{PR}(L_{-2}) &= -\mathrm{PR}(L_0) + z(\mathrm{PR}(L_-) + \lambda \mathrm{PR}(L_\infty)) = \\ &= a\mathrm{PR}(L_0) + b\mathrm{PR}(L_\infty) + c\mathrm{PR}(L_-) + d\mathrm{PR}(L_+). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить Λ-полиномы из PR-полиномов, коэффициенты при $\mathrm{PR}(L_+)$, $\mathrm{PR}(L_-)$, $\mathrm{PR}(L_0)$, $\mathrm{PR}(L_\infty)$ в последнем соотношении должны быть пропорциональны коэффициентам при $\Lambda(L_+)$, $\Lambda(L_-)$, $\Lambda(L_0)$, $\Lambda(L_\infty)$ в аксиоме 1 для Λ-полиномов:

$$d = c - z = -(a+1)/z = -(b - \alpha z)/z.$$

Тогда $a = -1 - z\alpha^{1/3}$, $b = z\alpha - z\alpha^{1/3}$, $c = z + \alpha^{1/3}$, $d = \alpha^{1/3}$.

Доказательство того, что PR-полином есть обобщение bracket-инварианта, аналогично.

Используя свойство 1, можно получить следующее утверждение.

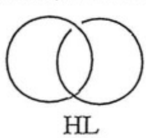
Лемма 6. *Если* D_1 *и* D_2 — *хорошие диаграммы,* $D_1 + D_2$ — *их связное объединение и* $D_1 \sqcup D_2$ — *их несвязное объединение, то*

$$\mathrm{PR}(D_1 + D_2) = \mathrm{PR}(D_1) \cdot \mathrm{PR}(D_2),$$

$$\mathrm{PR}(D_1 \sqcup D_2) = \delta\, \mathrm{PR}(D_1) \cdot \mathrm{PR}(D_2),$$

Воспользовавшись леммами 1, 2, 4 и аксиомами для PR-полиномов, можно упростить любую диаграмму, которая имеет менее 10 точек пересечения, так как каждая такая диаграмма содержит фрагмент, являющийся левой частью этих свойств и аксиом (см. таблицы узлов в [4] или [5]). Таким образом, все такие узлы и зацепления хорошие.

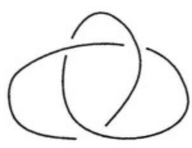
Примеры вычислений. 1) Для зацепления Хопфа HL:

,

HL

$$\begin{aligned} \mathrm{PR}(HL) &= a\delta + b + c/\lambda + d\lambda = (1 - 1/d^4)b + \\ &+ (d^4 + ad^2 - a/d^2) + (ad^6 + a^2d^4 - a^2 - a/d^2)/b. \end{aligned}$$

2) Для трилистника 3_1:



3_1

$$\mathrm{PR}(3_1) = a/\lambda + b\lambda + c\mathrm{PR}(HL) + \delta d = (1/d - 1/d^5)b^2 +$$
$$+ 2(d^3 - a/d^3)b + d^3 + (ad^5 + d^7 - ad - 1/d)(1 - a^2)/b.$$

3) Для узла 4_1:

4_1

$$\mathrm{PR}(4_1) = a/\lambda^2 + b\mathrm{PR}(HL) + c\mathrm{PR}(3_1) + d\lambda.$$

3. Корректность определения PR-полиномов.

Предложение. *PR-полином корректно определен.*

Доказательство проведем по аналогии с доказательством корректности определения полиномов Кауффмана в [1]. Пусть имеем два упрощения одной и той же диаграммы D с помощью аксиом для PR-полиномов и движений Рейдемейсера (можно применять и свойства, следующие из них). Покажем, что из первого упрощения можно получить второе, меняя порядок упрощений фрагментов диаграмм и способы упрощения одного фрагмента таким образом, что при каждой замене результаты упрощений (суммы диаграмм с коэффициентами в V) будут одинаковы. Сначала проводим замены так, чтобы фрагмент, который упрощается первым во втором способе, упрощался первым и в первом (после замен). Второй — вторым и т. д. Если точки пересечения из фрагмента, который упрощается первым во втором способе, упрощаются в первом способе на k-м шагу, то покажем, что, заменяя порядок упрощений, их можно упростить на $k-1$-м шагу, $k-2$-м шагу и т. д. Если части диаграмм, которые упрощаются, не имеют общих точек, то последовательность упрощений может быть произвольной. Проверим идентичность результатов упрощения для частей диаграмм, имеющих общие точки:

а) Для аксиомы 1 и второго движения Рейдемейсера.

Используя второе движение Рейдемейсера $\mathrm{PR}(L_{+1-2}) = \mathrm{PR}(L_-)$, а также аксиому 1 и свойство 2, получаем

$$\mathrm{PR}(L_{+1-2}) = a\mathrm{PR}(L_+) + b/\lambda\mathrm{PR}(L_\infty) + c\mathrm{PR}(L_0) + d\mathrm{PR}(L_2) =$$
$$= a\mathrm{PR}(L_+) + b/\lambda\mathrm{PR}(L_\infty) + c\mathrm{PR}(L_0) +$$
$$+ d\big(-c/d\mathrm{PR}(L_0) - b/d^4\mathrm{PR}(L_\infty) - a/d\mathrm{PR}(L_-) + 1/d\mathrm{PR}(L_+)\big) = \mathrm{PR}(L_-).$$

Здесь


;

L_{+1-2}

b) Для аксиомы 1 и третьего движения Рейдемейсера.

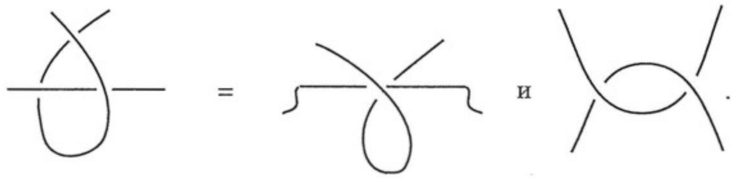
Дважды используя аксиому 1, получаем

$$\mathrm{PR}(L_{-1+2p}) = ad^3\mathrm{PR}(L_\infty) + b\mathrm{PR}(L_-) + c\mathrm{PR}(L_0) + d\mathrm{PR}(L_{-2}) =$$
$$= (c + ad)\mathrm{PR}(L_0) + (bd + ad^3)\mathrm{PR}(L_\infty) + (b + cd)\mathrm{PR}(L_-) + d^2\mathrm{PR}(L_+).$$

С другой стороны, используя третье движение Рейдемейсера и свойство 2, имеем

$$\mathrm{PR}(L_{-1+2p}) = \lambda \mathrm{PR}(L_{-2p}) =$$
$$= -b/d\mathrm{PR}(L_0) - cd^2\mathrm{PR}(L_\infty) - ad^2\mathrm{PR}(L_-) + d^2\mathrm{PR}(L_+),$$

где



L_{-1+2p} L_{-2p}

Так как $b + cd + ad^2 = 0$, то результаты упрощений равны.

Для других фрагментов диаграмм равенство результатов упрощений очевидно.

Теперь предположим, что две диаграммы регулярно изотопны. Тогда одна из другой может быть получена с помощью последовательности вторых и третьих движений Рейдемейсера. Второе движение есть упрощение диаграммы и рассмотрено выше. Если мы используем третье движение Рейдемейсера, а затем упрощаем диаграмму в этих точках с помощью аксиомы 2, то мы можем упростить эту диаграмму без третьего движения Рейдемейсера, как это делалось в п. b). Если мы используем третье движение Рейдемейсера, аксиому 1 или аксиому 2, а затем третье движение Рейдемейсера для следующего фрагмента диаграммы:

то результаты упрощений будут равны. Легко проверить, что результаты упрощений будут одинаковы для диаграмм, которые имеют фрагмент L_{-2} или левую часть второго движения Рейдемейсера вместо L_2 в последней диаграмме.

Если мы имеем две регулярно изотопные диаграммы, то можно рассматривать их как различные упрощения (или диаграммы, которые получаются с помощью движений, не увеличивающих количество точек пересечения) некоторой диаграммы. Используя результаты, полученные выше, заключаем, что их PR-полиномы равны.

1. *Kauffman L. H.* An invariant of regular isotopy // Trans. AMS. – 1990. – **318**, № 2. – P. 417–471.
2. *Kauffman L. H.* State models and the Jones polynomial // Topology. – 1987. – **26**, – P. 395–407.
3. *Freyd P., Yetter D., Hoste J. etc.* A new polynomial invariant of knots and links // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985, **12**. – P. 239–246.
4. *Reidemeiser K.* Knotenteorie. – New York: Chelsea, 1948. – 320 p.
5. *Kauffman L. H.* On knots // Ann. Math. Stud. – 1987. – **115**. – 480 p.

Получено 25.01.96